MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR WISSENSCHAFTSGESCHICHTE
Max Planck Institute for the History of Science

2003

PREPRINT 239

José Luis Montesinos Sirera (ed.)

Symposium Arquímedes
Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia

Symposium Arquímedes
Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia
Congreso de la Real Sociedad Matemática Española
31.02.2002

Table of Contents

Introducción

José Luis Montesinos Sirera

La enorme influencia que la obra de Arquímedes ha tenido a lo largo de la Historia de la Ciencia está fuera de discusión. Sus fundamentales aportaciones a la geometría y a la aritmética, a la mecánica y a la hidrostática, le confieren una importancia singular. En el minisymposium que sobre su figura organizó la Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia en Enero de 2002, en el Puerto de la Cruz (Tenerife), dentro de las actividades del Congreso de la Real Sociedad Matemática Española, se presentaron algunos aspectos de su obra, incidiéndose en la relación que tenía en aquellos momentos, en la cultura griega, la Matemática con la Filosofía y con la Física.

Manteniendo el rigor euclídeo, Arquímedes imprimió a sus obras una clara intención de calcular y medir; y así, al mismo tiempo que exigía a sus "descubrimientos" y teoremas –muchas veces obtenidos por vía heurística– una rigurosa demostración, no dudaba en buscar resultados con fines prácticos, como su famosa aproximación del número π, investigación muy alejada de los intereses platónico-euclídeos vigentes entre los matemáticos de la época. ¿Platón o Aristóteles? ¿Es aplicable la Matemática a la Naturaleza?

Los portentosos artilugios mecánicos ideados por Arquímedes para la defensa de su patria siracusana, magnificados por escritores como Plutarco, potenciaron en la imaginación popular a lo largo de los siglos una visión de las matemáticas como disciplina capaz de controlar los fenómenos de la Naturaleza: el método físico-matemático galileano deberá mucho a la figura de Arquímedes, quien con una teoría matemática formada por definiciones axiomas y teoremas había conseguido las leyes de la Estática.

Presentamos en esta publicación algunos de los trabajos que se expusieron en el Symposium de Tenerife:

Antonio Durán, catedrático de Análisis Matemático de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla y vocal de la Junta de Gobierno de la R.S.M.E., es también el Presidente de la Comisión de Historia de la Matemática de la R.S.M.E. Su ponencia versa sobre los manuscritos griegos de Arquímedes conservados en la Biblioteca del Escorial, y especialmente del perteneciente al fondo de don Diego Hurtado de Mendoza, que fue copiado en la primera mitad del siglo XVI en el entorno de Venecia.

Silvio Maracchia es profesor de Historia de la Matemática en la Universidad La Sapienza de Roma y su trabajo trata sobre *El famoso problema complementario de Arquímedes* que se encuentra en la proposición cuarta del libro segundo de *Sobre la esfera y el cilindro,* que es ciertamente una de las obras más importantes de Arquímedes.

Arquímedes y la geometría dinámica es el título del trabajo de Carlos Mederos Martín, profesor de matemáticas en el IES Viera y Clavijo de La Laguna y miembro de la Fundación Orotava. En él se estudia la famosa cuadratura de la parábola realizada por Arquímedes y su posible aplicación didáctica en la enseñanza de la geometría.

El Profesor Jürgen Renn, Director del Max Planck Institute for the History of Science, presenta aquí su trabajo *La mecánica desde Arquímedes a Galileo-observaciones sobre el desarrollo a largo plazo de las estructuras del conocimiento.* El Prof. Renn, junto a sus colaboradores en Berlín, trabaja en un vasto e interesante Proyecto de digitalización de los textos más importantes relativos a la Mecánica, desde Arquímedes hasta Newton.

Sergio Toledo Prats, profesor de filosofía del IES Villalba Hervás y miembro de la Fundación Orotava nos hablará de la concepción de las matemáticas que tenían Platón y Aristóteles en el marco general de la matemática griega, esa nueva manera de hacer matemáticas, estrechamente ligada a la Filosofía.

Finalmente, quiero expresar mi agradecimiento al Profesor Renn por permitir esta publicación en la prestigiosa colección del Max Planck Institute for the History of Science y a Lindy Divarci por su amabilidad y diligencia.

Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia

Los manuscritos griegos de Arquímedes en la Biblioteca del Real Monasterio de *El Escorial*

Antonio Durán Guardeño

Introducción

En relación con las matemáticas se olvida a menudo un hecho bastante elemental: son producto de la cultura humana, una creación intelectual de la humanidad. En consecuencia, han sido afectadas por los mismos avatares históricos que han actuado sobre el resto de realizaciones intelectuales, manuales, técnicas o del cualquier otro tipo atribuibles a los humanos. Este olvido produce una cierta distorsión en la comprensión de la evolución de las matemáticas a lo largo de su historia que contagia a la percepción misma de las matemáticas como ciencia; me refiero aquí no a la percepción que puede tener la *"gente de la calle"*, que también, sino a la del colectivo más cercano a las matemáticas: físicos, ingenieros, científicos en general, e incluso una buena parte de los matemáticos. Se las suele situar en una esfera de pensamiento abstracto, alejadas del mundanal ruido y de las miserias, pero también de los placeres que las aquejan. Nada más contrario a la verdad; y no sólo porque a lo largo de toda su historia el proceso de creación matemática con frecuencia ha hundido sus raíces en los desafíos intelectuales provenientes de la física, la ingeniería e incluso, aunque esto más recientemente, de las llamadas ciencias de la vida o de las ciencias sociales, sino por el hecho más prosaico y trivial de que la misma transmisión del saber matemático queda afectada por el entorno histórico y su devenir.

Y pocos ejemplos tan ilustrativos de lo dramática que puede ser esa influencia como la pérdida y posterior recuperación del legado cultural griego que tuvo lugar en el mundo occidental en los mil años que separan los siglos V y XV de nuestra era. La aventura afectó a todos los órdenes de la cultura: literatura, filosofía, escultura y, como no podía ser de otra forma, a las matemáticas. Insisto, no estamos aquí hablando de la pérdida de una cierta tradición cultural, que evidentemente se produjo, sino del hecho mucho más simple y dramático que supuso la pérdida definitiva de una parte de los logros intelectuales, al desaparecer el soporte donde estaban contenidos. Este cataclismo cultural afectó, como ha quedado dicho, también a las matemáticas: parte de lo conseguido por los griegos se perdió, otra parte pudo ser recuperada, normalmente con gran esfuerzo y en algunos casos casi milagrosamente. Este último es, desde luego, el caso de la mayor parte de las obras de Arquímedes. Baste recordar que *El método,* una obra tan fundamental para comprender el modo de hacer arquimediano y que tanta ayuda podría haber prestado a los matemáticos de los siglos XVI y XVII, ha sido recuperada en fecha tan cercana como 1906, todavía no hace un siglo.

De lo que voy a tratar aquí, como el título indica, es de los manuscritos griegos con obras de Arquímedes existentes en la Biblioteca del monasterio de El Escorial, pero el enfoque será el apuntado en los párrafos anteriores. Procuraré mostrar que más allá del contenido técnico de estos manuscritos –esto es, de las matemáticas que contienen–, se oculta en ellos casi dos mil años de historia de la humanidad; una historia llena, como sólo la historia sabe estarlo, de miserias y grandezas, de hechos menudos que son sin embargo superlativos y de otros que teniendo fama de extraordinarios quizá no lo fueron tanto. Hay quien pensará que hay en este escrito muy poco de matemáticas: puede ser, aunque estoy seguro de que quien esto lea acabará conociendo de las matemáticas *cosas* que es importante saber.

Antes he dicho que tras esos manuscritos griegos de Arquímedes se ocultan dos mil años de apasionante historia. En realidad hay algo de exageración en esto que digo, aunque no en lo de los dos mil años de historia, sino en lo de ocultar: cabría mejor decir que ese largo periodo trata de camuflarse tras los manuscritos. Pero es un camuflaje que más que pretender pasar desapercibido parece querer llamar la atención una vez detectado. Esos manuscritos tienen necesidad de convertirse en objetos de deseo: ejercen la fascinación de lo oculto. Y, por eso, van destilando a poco que se los estudie el dulce néctar de la Historia, de las historias ...

1. Los helenistas españoles del Renacimiento

El origen de los grandes fondos manuscritos griegos de las bibliotecas europeas se remonta a la primera época del Renacimiento, anterior, por tanto, a la invención de la imprenta. Por la riqueza e interés de los manuscritos conservados, y por su especial relevancia en la recuperación de la obra de Arquímedes, cabe aquí destacar cinco bibliotecas:

- la Bibliothèque Nationale de Francia en París: tiene su origen en la Bibliothèque du Roi fundada por Carlos V a finales del siglo XIV; atesora algunos importantes manuscritos con obras de Arquímedes que fueron adquiridos o mandados copiar por Francisco I cuando la Bibliothèque residió, durante una parte del siglo XVI, en el castillo de Fontainebleau.
- la Laurentiana de Florencia, fundada por Lorenzo el Magnífico. Pronto se ubicó en un palacete diseñado por Miguel Angel construido a partir de 1529 y anexo a la Iglesia de San Lorenzo; esta biblioteca se unió a principios del XIX con la Marciana de Florencia –fundada por Cósimo de Medici a principios del siglo XV en el convento de San Marcos tomando como base los fondos de Nicolás Niccoli–, dando lugar a la actual Mediceolaurentiana.
- la Marciana (San Marcos) de Venecia: la biblioteca del senado de Venecia, fundada hacia mediados del siglo XV con el legado de manuscritos del cardenal Bessarión; se ubica en el edificio diseñado por Sansovino y construido durante el siglo XVI en el lado occidental de la Piazzeta de San Marcos junto al Campanile de la catedral de Venecia.
- la Vaticana, fundada por el papa Nicolás V a mediados del siglo XV; unas décadas después Sixto IV –el papa que mandó construir la capilla Sixtina– la mandó remodelar y decorar en su actual ubicación.
- y la del Escorial: fundada por Felipe II hacia 1566; es pues posterior a las anteriores aunque, como veremos más adelante, una parte de los fondos manuscritos griegos fueron aportados por los helenistas españoles –en general, más jóvenes que el rey fundador–.

Con la aparición de la imprenta se procedió a la publicación de gran parte de este fondo manuscrito. A grandes rasgos, se puede atribuir el impulso inicial a los humanistas italianos que primaron la publicación completa de las obras por encima de la pureza y fidelidad de los textos y las traducciones. Según Charles Graux:

> en menos de cincuenta o sesenta años, ..., la traducción latina de casi todos los clásicos griegos, una parte ya considerable de escritores de segundo rango y de autores científicos habían salido de las imprentas italianas en forma de volúmenes elegantes y a veces espléndidos.

Este impulso cesó durante la segunda mitad del siglo XVI una vez publicadas, y en su caso traducidas, como queda dicho, la mayor parte de las obras de primer y aún de segundo orden conservadas.

Después de los humanistas entraron en liza los filólogos: había que comparar los diversos manuscritos conservados, determinar lo que pertenecía al texto clásico de los añadidos –y errores– de copistas y comentaristas. Cuando declinaba el humanismo emergieron con fuerza los filólogos para depurar lo recuperado. Aunque sus inicios fueron también italianos fue en Francia durante el siglo XVI donde la filología brilló con mayor esplendor.

Digamos que España quedó a medio camino entre Italia y Francia: los helenistas de la época fueron esencialmente un tipo de humanistas –con formación italiana la mayoría– algo más sofisticados, filológicamente hablando, que los italianos, pero sin alcanzar a los franceses. Los más destacados fueron: Fernan Núñez de Guzmán, padre e introductor de los estudios griegos en España –se le llamó el Comendador Griego–, Pedro Núñez de Valencia, Juan Páez de Castro –capellán de Felipe II que, como veremos más adelante, compuso hacia 1560 (poco después de acceder aquel al trono) un Memorial para el rey sobre la utilidad de fundar una gran biblioteca–, Antonio Agustín (Arzobispo de Tarragona), también el Cardenal Cisneros, J. Ginés de Sepulveda, Francisco de Mendoza (Cardenal de Burgos) y, sobre todo, Diego Hurtado de Mendoza, del que habrá tiempo de hablar más adelante.

2. La fundación de la Biblioteca del Monasterio de El Escorial

Hacia 1560, poco después de acceder Felipe II al trono, compuso Juan Páez de Castro un memorial para el rey sobre la fundación de una gran biblioteca. Páez propuso para su sede Valladolid: lugar favorito del rey que contaba, además, con una gran Universidad. La Biblioteca debía albergarse en un edificio apropiado para evitar incendios y con luz entrando a raudales en la sala de lectura; proponía finalmente la manera de adquirir manuscritos griegos: había que adquirir las colecciones que ya habían formado, entre otros, Hurtado de Mendoza, el Cardenal de Burgos, Zurita, Antonio Agustín o el propio Páez de Castro; indicaba también las ciudades italianas de Roma, Florencia y Venecia y los conventos de Sicilia y Calabria como sitios adecuados donde buscar códices.

Antes de fundar la biblioteca todavía consultó el rey al historiador cordobés Ambrosio de Morales. El informe de Morales, compuesto hacia 1565 y 1566 recomienda la selección de originales como método para hacer valiosa a una biblioteca, y pone como ejemplo las del rey Francisco I de Francia –Fontainebleau–, la Vaticana, las de Venecia y Florencia –las cuatro que se han comentado en el punto anterior–. No deja de ser curioso el lenguaje cinegético que usa Morales: “darse han los avisos que conviene usar en esta caza para volver con mucha presa de ella” [Graux, 1982: p. 54]. Y, de hecho, los embajadores en Roma, París y Venecia, los Virreyes de Nápoles y Sicilia, incluso D. Juan de Austria en sus campañas de Oriente y el Duque de Alba en las de Flandes, o el erudito Arias Montano, acabaron a partir de 1567 *cazando* libros para la Biblioteca del rey [Revilla, 1936: XIII].

Como se ve, Felipe II no llegó a seguir los consejos que se le dieron para la fundación de su gran biblioteca. En primer lugar, no eligió Valladolid ni ninguna otra gran ciudad: por el contrario, la ubicó en el magno Monasterio que mandó construir en El Escorial; tampoco las medidas de seguridad pudieron evitar el gran incendio que asoló la Biblioteca en 1671.

La formación del fondo griego de la Biblioteca llevó 21 años, los mismos que la erección del Monasterio: comenzó tres años después de que se pusiera la primera piedra en la construcción del Monasterio –el 23 de abril de 1563– y acabó –salvo pequeñas aportaciones posteriores– también tres años después de puesta la última piedra –el 13 de septiembre de 1584– aunque las tareas de acomodamiento y ornamentación duraron aún algo más–. Hacia finales del siglo XVI había en la Biblioteca uno 1150 manuscritos griegos: quizá mayor número de manuscritos griegos que en cualquiera de las otras bibliotecas renacentistas que mencionamos antes [Revilla, 1936: XVII].

Felipe II reservó un sitio principal para la instalación de la Biblioteca: se ubica en una enorme sala sobre la entrada principal del Monasterio, formando uno de sus lados exteriores parte del monumental frontispicio de la fachada. El propio Juan de Herrera diseñó las magníficas librerías, y los frescos del techo los realizó el italiano Pellegrino Tibaldi. Como una declaración de intenciones, de la decoración de la bóveda se puede inferir la importancia que las matemáticas ocupan en los fondos de la Biblioteca; y es que, aparte de las grandes figuras del techo representando a la Aritmética, la Música, la Geometría y la Astrología, comparecen en las paredes como protagonistas de la Historia, Pitágoras, Arquímedes, Ptolomeo, Sacrobosco o Regiomontano, mientras que en los paños inferiores se representan diversas escenas donde son frecuentes los ábacos, las reglas, los compases y los grupos de filósofos trabajando con números y figuras sobre la arena: el mismo Arquímedes es representado en la típica iconografía de su muerte a manos de un soldado romano mientras culminaba alguna profunda demostración.

Desde los comienzos de la Biblioteca de El Escorial muchos entendieron que lo retirado del Monasterio hacía una mala ubicación para una Biblioteca: “una tumba para los libros”, en expresión de Graux. Conviene reproducir aquí los extractos de unas cartas de eruditos de la época sobre este particular; sobre la posibilidad de que los libros de uno de ellos llegaran a El Escorial le recomienda el otro: “no quiera V.S. meter en tan gran piélago sus libros, que no se echarán de ver y se perderán con los demás, quizá antes que sean gozados;” aunque aquel ya era consciente de la situación

> con recoger allí tan buenos libros y no comunicarlos se hace más daño que provecho. Dan esperanza de hacer venir un impresor y publicar sus tesoros; me temo que será esto tarde para los viejos [Graux, 1982: 71].

A partir de 1565, Felipe II hizo enviar a El Escorial una parte importante de su Biblioteca: el primer manuscrito griego en llegar es también el más antiguo de cuantos se conservan hoy, un Evangelio del sigo IX. A los libros del rey se fueron pronto uniendo los de bibliotecas particulares. Así llegó la colección de Gonzalo Pérez –cuya adquisición ya propuso Morales en su informe–. Hacia septiembre de 1571 el rey pagó a Antonio Pérez –que después tantos quebraderos de cabeza creara al rey–, hijo de Gonzalo, unos 2.500 ducados más un beneficio en Italia que rentaba otros 3.000 ducados. Luego el rey pensó en adquirir las colecciones de Francisco de Mendoza y

Bobadilla –el Cardenal de Burgos– y Jerónimo Zurita, pero por diversas razones las negociaciones no cuajaron. Los manuscritos del Cardenal de Burgos se conservan en su mayor parte en la Biblioteca Nacional. Los de Jerónimo de Zurita, tasados en 35.000 ducados permanecieron en el convento Aula Dei de Zaragoza; la mayoría de la docena del códices griegos asignados hoy a la biblioteca de Zurita acabaron, finalmente, en la biblioteca de El Escorial, donde llegaron hacia mediados del siglo XVII.

La biblioteca que sí se incorporó fue la de Páez de Castro (c. 1515-1570). Páez de Castro fue un gran humanista –estudió en Alcalá de Henares y, posteriormente, en Salamanca y Bolonia– al que frecuentemente el rey pedía consejo para asuntos de ciencias o letras –ya se ha comentado antes el *Memorial sobre la utilidad de juntar una buena biblioteca*–. Tomó parte como capellán del rey en el Concilio de Trento, donde llegó en 1545. En Trento se reunieron muchos humanistas que para pasar los meses tediosos del concilio portaron sus bibliotecas particulares: entre ellos Diego Hurtado de Mendoza, que trasladó la suya desde Venecia cuando se incorporó al Concilio como representante de Carlos V. En Trento se originó lo que Graux dio en llamar una “academia aristotélica”, en referencia a la afición por Aristóteles y al gusto por la filosofía escolástica de buena parte de los Padres de la Iglesia reunidos en aquella pequeña ciudad.

Páez de Castro fue recomendado a Hurtado de Mendoza por Gonzalo Pérez, lo que le permitió usar y copiar los manuscritos de Mendoza. En general, los códices eran usados en Trento con cierta promiscuidad, y se solían prestar para ser copiados y enriquecer las respectivas bibliotecas: esto atrajo un cierto número de copistas griegos a Trento durante los tiempos del Concilio. No fueron pocos los eruditos que formaron sus bibliotecas en este ambiente: entre ellos, el aquí tratado Páez de Castro y los hermanos Covarrubias, que aparecerán más adelante en relación con los manuscritos griegos de Arquímedes en El Escorial.

Páez de Castro es un buen ejemplo de lo que se escribió en el punto anterior sobre los distintos tipos de helenistas del Renacimiento. El prototipo intermedio del erudito español entre humanista y filólogo lo ilustra bien Páez de Castro: durante el Concilio, se dedicó a corregir la edición impresa por Aldo Manucio de Aristóteles, cotejándola con los textos de los manuscritos griegos de Mendoza. Según Graux, Páez había concebido una gran obra sobre Aristóteles y Platón, una gran síntesis de la filosofía griega –a los manuscritos de Mendoza usados en Trento le añadió los del Cardenal de Burgos que estaban a su disposición en España, pero a pesar de las numerosas notas en los márgenes de los manuscritos –que todavía se pueden leer pues estos se conservan en la Biblioteca Nacional–, no llegó nunca a componerla. Páez de Castro consiguió una serie completa de ediciones de Manucio, el gran impresor de Venecia; Aldo Manucio llevó a cabo entre finales del siglo XV y principios del XVI un ambicioso proyecto que incluyó la edición en griego –a tan ilustres autores hay que leerlos sin intermediarios, afirmaba– de Aristóteles, Platón, Sófocles, etc. Como impresor, Manucio fue el responsable de la primera gran revolución de la imprenta tras su invención: encargó al boloñés Francesco Griffo nuevos tipos de letras para hacer un uso mejor del espacio de la página; así nacieron la itálica y la romana con mayúsculas más bajas que las minúsculas –como escribe Alberto Manguel citando a Francis Meynell: “los caracteres itálicos hacen que el ojo del lector vaya más despacio aumentando la capacidad para captar la belleza del texto” [Manguel, 1998: 166]–.

Aparte de filosofía, Páez también estuvo muy interesado en historia de las matemáticas, medicina griega y estudios jurídicos.

3. El fondo Hurtado de Mendoza

Según Graux la llegada en 1576 del fondo Hurtado de Mendoza a El Escorial es el acontecimiento más importante en la historia de la Biblioteca –aparte del terrible incendio de 1671–.

Ingresa en la Biblioteca de El Escorial el fondo de Hurtado de Mendoza el 15 de junio de 1576 –Mendoza murió en 1575– tras donarla este a Felipe II, que pagó a cambio las deudas que gravaban la testamentaría de Mendoza. Desde 1572 el rey ya la consideraba suya, con el visto bueno de Mendoza, que pasó los últimos años de su vida reuniendo los fondos que tenía prestados; así se lee en una carta de Mendoza fechada en Granada a finales de 1573:

> Yo ando juntando mis libros [...] porque su Majestad se quería servir de ellos y mandarlos ver para ponerlos en El Escorial, y paréceme que tiene razón, porque aquélla es la más suntuosa fábrica antigua ni moderna que yo he visto, y no me parece que le falta otra parte, sino poner en ella la más suntuosa librería del mundo, la cual puede hacer lo uno, juntando librerías, y lo otro, buscando libros. [Graux, 1982: 204].

Entre los manuscritos que Mendoza tenía prestados estaba un magnífico ejemplar con obras de Ptolomeo –el *Almagesto*, el *Tetrabiblon*, la *Geografía*–, prestado a Pedro Ponce de León, Inquisidor General, con fama de amante de los libros ajenos: el manuscrito fue finalmente devuelto y se puede todavía hoy disfrutar en la Biblioteca del Monasterio. Se trata del manuscrito Ω-I-1 que aparte de las obras de Ptolomeo antes citadas, contiene también fragmentos de otros autores, entre ellos de la arquimediana *Sobre la medida del círculo;* como veremos más adelante es razonable pensar que este fragmento de Arquímedes fuera copiado del códice Valla. El códice Valla es el manuscrito más importante en relación con la obra de Arquímedes: fue, junto con sus copias, la única fuente griega de los textos arquimedianos, hasta que Heiberg descubriera en 1906 el manuscrito de Constantinopla con la copia de *El Método*.

Diego Hurtado de Mendoza fue nieto del Marqués de Santillana –quinto hijo del segundo hijo del Marqués– y una de las figuras claves de la diplomacia de Carlos I. Se educó en Granada, Salamanca e Italia, y tuvo como preceptor a Pedro Mártir de Anglería –que también lo fue de otro gran bibliófilo español: Hernando Colón, el hijo ilegítimo de Critóbal Colón y Beatriz Henríquez que fundó y formó la gran biblioteca Colombina que todavía se conserva hoy en la Catedral de Sevilla–. Desde el año 1527 –contando 23 años– ya pudo ser enviado por Carlos V como embajador a Venecia. Salvo esporádicas ausencias –una misión diplomática en Inglaterra hacia 1537– estuvo en Venecia hasta 1547, cuando fue nombrado embajador en Roma y gobernador y capitán general de Siena y demás plazas de la Toscana. Participó en distintas fases del Concilio de Trento como representante del Emperador. Páez de Castro en carta a Jerónimo Zurita escribe hacia mediados de 1545:

> Tienen todos por creído que [Hurtado de Mendoza] medrará mucho, concluido este Concilio, y que su Majestad le hará obispo, y que su Santidad cardenal; plega a Dios que sea así, que en él estará todo bien empleado [Graux, 1982: 205]–.

Allí en Trento llevó a término, ayudado por Páez de Castro, una traducción castellana anotada de la *Mecánica* de Aristóteles de la que todavía se conservan en El Escorial dos copias manuscritas por uno de sus secretarios con correcciones del propio Mendoza. Sobre esta colaboración leemos en una carta de Páez fechada en agosto de 1545 en Trento:

> Ahora entendemos en la *Mecánica* de Aristóteles, demostrando grandes cosas, porque él [Hurtado de Mendoza] la tiene trasladada en romance, y le ha hecho glosa; creo que le ayudaré en parte [Graux, 1982: 205]–.

Hacia 1568, cuando ya llevaba cerca de una década de vuelta en la Corte, fue desterrado a Granada donde participó en la Guerra de las Alpujarras contra los moriscos –escribió una crónica crítica y no exenta de simpatía hacia los moriscos titulada *De la Guerra de Granada,* donde más que como guerra de religión le dio un tratamiento de guerra civil: "guerra de españoles contra españoles" la tituló–. Se le permitió volver a la capital en 1574, aunque no el acceso a palacio. Diego Hurtado de Mendoza murió en Madrid en 1575. A este político, erudito y humanista de enorme estatura y mirada torva que, según Paéz de Castro, siempre tuvo en los labios la palabra "estudiemos", hay quien le ha atribuido, con más yerro que acierto, la redacción de *El lazarillo de Tormes.*

Diego Hurtado de Mendoza adquirió el grueso de su biblioteca de manuscritos en Venecia entre 1538 y 1548. Las colecciones de manuscritos griegos acumuladas en el Renacimiento contenían los manuscritos llamados *originales*, que eran manuscritos escritos en Bizancio para bizantinos –por tanto susceptibles de tener cierta antigüedad– y que habitualmente llegaban a Europa Occidental a través de Venecia; y otros copiados por bizantinos para europeos occidentales, siendo lo más común los copistas griegos desplazados a occidente. Se sabe que Mendoza compró de los manuscritos *originales:* envió de hecho a comprar manuscritos a un tal Nicolás Sofiano, griego de Corfú que vivía en Venecia, a monasterios de Turquía y Grecia, el monte Athos incluido. Mendoza, según cuenta cierta tradición, recibió también 31 o 32 códices de Solimán II –el gran Turco– en recompensa por haber liberado Mendoza –previo pago de una fuerte recompensa– al hijo de Solimán II (sobre a quién liberó hay diversas versiones: otras dicen que fue un cautivo sin asignar parentesco con el gran Turco); hoy sólo se conserva uno de estos códices atribuible con seguridad a la remesa del Gran Turco: el Ω-I-13 –contiene un fragmento del Antiguo Testamento–. Mendoza también copió muchos códices de otros ya existentes en Venecia; en particular mandó copiar bastantes de la Biblioteca Marciana de Venecia: a pesar de cierta mala fama, consta que todos fueron religiosamente devueltos [Graux, 1982: 197]. Hay constancia de que entre 1545 y 1546 –29 de marzo de 1545 al 18 de marzo de 1546, para ser más exactos– pidió y devolvió –del 23 de diciembre de 1545 al 20 de diciembre de 1546– unos ochenta manuscritos, aunque ya antes había obtenido otros préstamos que no constan por ser el registro de préstamos más antiguo que se conserva en la Biblioteca el correspondiente a los años 1545 a 1548. Durante estos años venecianos, cuando Mendoza acumuló el grueso de su biblioteca, tuvo de bibliotecario al flamenco Arnoldo Arlenius, un gran erudito responsable, entre otras cosas, de la edición príncipe de las obras de Josefo publicadas en Basilea en 1544 –el mismo año y lugar en que aparecieron las de Arquímedes–, y al que hay que adjudicar parte de la grandeza de la biblioteca de manuscritos griegos acumulada por Hurtado de Mendoza.

Diego Hurtado de Mendoza llegó a poseer 350 manuscritos griegos, de los cuales 256 acabaron en la Biblioteca del monasterio de El Escorial. Hoy se conservan 136; el resto, 120, fueron destruidos por el fuego cuando el gran incendio que asoló la biblioteca en 1671 (ardieron unos 650 manuscritos griegos: algo más de la mitad de todos los que se conservaban).

4. Los manuscritos griegos de Arquímedes

La recuperación de las matemáticas de Arquímedes desde sus fuentes griegas ha sido un proceso marcado por el azar y los vaivenes de la historia que cabe calificar de milagroso. Las obras de Arquímedes que desde la Edad Media conocemos directamente de fuentes griegas son:

1. *Sobre la esfera y el cilindro* (dos libros),
2. *Sobre la medida del círculo,*
3. *Sobre conoides y esferoides,*
4. *Sobre las espirales,*
5. *Sobre el equilibrio de los planos* (dos libros),
6. *El arenario,*
7. *Sobre la cuadratura de la parábola.*

A estas hay que añadir *El Método,* descubierto en el célebre manuscrito bizantino de Heiberg en 1906, que también contiene una parte considerable de *Sobre los cuerpos flotantes,* conocida con anterioridad a partir de una traducción latina de Guillermo de Moerbecke, y el prefacio y dos proposiciones cortas del *Stomachion.* La obra arquimediana conocida se completa con otros dos tratados menores que, en cualquier caso, son dudosamente atribuibles tal y como se conocen a Arquímedes: *El libro de los lemas,* conocido a través de una traducción árabe, y el *Problema de los bueyes.*

Si dejamos aparte el manuscrito de Heiberg descubierto en 1906 –hace apenas un siglo–, las siete obras antes mencionadas fueron todas ellas recuperadas a partir de un único manuscrito, el códice Valla, y las copias de este. Aparte de este códice Valla, sólo tenemos referencias de otro manuscrito griego con obras de Arquímedes: un compendio de trabajos sobre mecánica y óptica proveniente del periodo bizantino y disponible en la Edad Media; estuvo también a disposición de Guillermo de Moerbecke para su traducción latina; de él tradujo *Sobre los cuerpos flotantes,* antes mencionado, aunque también contenía *Sobre el equilibrio de los planos, Sobre las espirales y Sobre la medida del círculo.* Este manuscrito desapareció sin dejar rastro ni, lo que es peor, descendencia en forma de copias; sólo nos queda una vaga referencia sobre él que se remonta al siglo XIV: aparecen sus rastros en catálogos de la biblioteca papal entre 1295 y 1311 [Clagett, 1959: 420].

Es muy posible que estos tres manuscritos griegos con las obras de Arquímedes deban su existencia a la escuela que se formó en Constantinopla en el primer tercio del siglo VI y de la que fueron representantes principales Isidoro de Mileto –probable autor del apócrifo libro XV de *Los Elementos* de Euclides– y Antemio de Tralles. Ambos fueron arquitectos de Santa Sofía, que por entonces se levantaba por orden del emperador Justiniano; Isidoro de Mileto fue también uno de los últimos directores de la Academia de Platón, que Justiniano clausuró por esa época, acusada de impartir enseñanzas paganas. Si bien esta escuela de Constantinopla no produjo matemáticas de relevancia, debemos a su interés por las fuentes clásicas la conservación de la obras de Arquímedes y Apolonio. No es pues de extrañar que el códice de Heiberg se descubriera en 1906 en la Iglesia del Santo Sepulcro en Constantinopla, o que el códice Valla inicie su existencia en Constantinopla hacia el siglo IX y que algo parecido también pudiera ocurrir con el tercero de los manuscritos.

Aquí nos vamos a centrar en el códice Valla. Como a continuación se va a relatar, no tuvo precisamente una vida sosegada: fue literalmente una frágil hoja zarandeada por el huracán de los tiempos. Por fortuna, en su agitada vida el códice Valla engendró un tropel de hijos de vida más serena a partir de los cuales fue posible conocer, de fuentes griegas, los trabajos de Arquímedes.

4.1. El códice Valla

Como acaba de referirse, hasta 1906 en que Heiberg descubrió su célebre manuscrito de Constantinopla, el códice Valla ha sido, con sus copias, la única fuente para el texto griego de las obras de Arquímedes. Su apasionante historia es la siguiente.

En el siglo IX, el códice Valla ya estaba en poder de León de Tesalónica, a quien se debe una cierta recuperación de la ciencia bizantina y una enciclopedia médica. Además del códice Valla con la obras de Arquímedes, al interés de León por las matemáticas se debe también la recuperación a partir de fuentes griegas de los cuatro primeros libros de las cónicas de Apolonio –los libros del V al VII sólo se conservan a través de traducciones árabes, mientras que el VIII se da por perdido–.

No hay que confundir a este León de Tesalónica con León VI, emperador de Constantinopla que nació hacia 866 casi coincidiendo con la muerte de León de Tesalónica; León VI, llamado el Sabio o el Filósofo, fue un erudito más que un soldado: completó *Las Basílicas,* los códigos legislativos del Imperio Bizantino iniciados por su padre Basilio I; además escribió poemas litúrgicos, oraciones o poesía secular, y perdió, entre otros territorios, Sicilia a manos de los árabes en 902. Precisamente hay que trasladarse allí, a Sicilia, para seguir la pista del códice Valla.

Sabemos que el códice Valla pasó en el siglo XII a la corte normanda de Palermo y de allí a la Casa de Hohenstaufen –cuyo más célebre representante fue Federico I Barbarroja: el jefe de Baudolino, el último personaje de Umberto Eco–. La Casa de Hohenstaufen desaparece del sur de Italia a mediados del siglo XIII; concretamente entre 1266 y 1268 cuando Carlos I de Anjou derrota y mata a Benevento Manfredo en Benevento en 1266 y, después, en la batalla de Tagliacozzo en 1268 mata al joven Conradino –16 años– último de los Hohenstaufen.

Carlos I de Anjou fue, como su hermano el rey San Luis (Luis IX de Francia), hijo de Blanca de Castilla –nieto, por tanto, de Alfonso VIII, el vencedor de las Navas de Tolosa–; no logró mantener Sicilia, que pronto pasó a manos de los aragoneses, tras expulsar Pedro III de Aragón en 1282 a los franceses. Carlos de Anjou sí mantuvo el reino de Nápoles, pero regaló la biblioteca de Benevento Manfredo, donde estaba el códice Valla con la obras de Arquímedes y también el manuscrito con obras sobre mecánica y óptica al que nos referimos arriba, a los papas –no olvidemos que hubo cuatro papas franceses que ayudaron a los anhelos imperialistas de Carlos de Anjou: Urbano IV, Clemente IV, que lo coronó rey de Sicilia, Inocencio V y Martín IV–.

Después de 1368, esto es, en pleno Cisma de Occidente, el códice Valla pasó a manos privadas. En 1491 ya estaba en manos de Giorgio Valla que tradujo algunos fragmentos del manuscrito –se publicarían de manera póstuma en Venecia en 1501 con el título de *De expetendis et fugiendis rebus*–; Valla murió en 1500.

A la muerte de Valla, que da nombre al manuscrito, este pasó a la familia de los Píos de la ciudad italiana de Carpi: primero fue comprado por 800 piezas de oro por Alberto Pío, príncipe de Carpi, pasando en 1530 a su nieto el cardenal Rodolfo Pío, que aún lo conservaba en 1544.

En 1564 muere Rodolfo Pío y en el catálogo de su biblioteca no aparece referencia alguna a ningún manuscrito con obras de Arquímedes; así pues, en algún momento entre 1544 y 1564, el códice Valla desapareció sin que nunca más se haya sabido de él.

4.2. La descendencia del códice Valla

Afortunadamente para el conocimiento de la obra de Arquímedes, el códice Valla dejó una numerosa descendencia antes de desaparecer. Conviene recogerla aquí, aunque parcial y sumariamente, para poder después dar noticia de la genealogía de los códices griegos de El Escorial.

El códice Moerbecke (latino)

Hacia 1269 Guillermo de Moerbecke tradujo gran parte del códice Valla al latín en la corte papal de Viterbo. Moerbecke se ayudó, como se comentó antes, de otro manuscrito griego con obras de Arquímedes que había en la biblioteca de los papas. De ese manuscrito tradujo otras obras de Arquímedes que no estaban en el códice Valla: en concreto, los dos libros de *Sobre los cuerpos flotantes.* Moerbecke fue un dominico procedente de Flandes, confesor de seis papas, que llegó a obispo de Corinto en 1278, donde permaneció hasta su muerte ocurrida hacia 1297; revisó y tradujo, a instancias de Tomás de Aquino, casi toda la obra de Aristóteles. Moerbecke no era un experto matemático, por lo que su traducción de Arquímedes fue muy literal, lo que, no obstante, ha ayudado bastante a efectos de cotejar el códice Valla con otras copias griegas. El manuscrito con la traducción, escrito por la propia mano de Moerbecke, acabó en 1740 en la biblioteca vaticana, donde fue encontrado en 1884 y donde se conserva hoy: es el códice Ottobonianus Lat. 1850. En el códice se pueden apreciar también las correcciones de Andreas Conerus hechas en Roma hacia 1508. Todavía se conservan otras dos copias parciales de la traducción de Moerbecke; una de ellas es el manuscrito BN-9119 de la Biblioteca Nacional en Madrid que contiene *Sobre la medida del círculo, Sobre el equilibrio de los planos, Sobre la cuadratura de la parábola y Sobre los cuerpos flotantes.*

Durante la Edad Media circuló con anterioridad a la traducción de Moerbecke alguna que otra obra de Arquímedes traducida al latín –en cualquier caso de fuentes árabes–. Es el caso de *Sobre la medida del círculo* que fue traducida del árabe en el siglo XII, primero por Platón de Tívoli –muy probable, aunque no seguro– y después de forma mucho más precisa por Gerardo de Cremona; se conservan copias medievales de ambas traducciones.

El códice Marcianus 305

Es la copia más antigua conservada del manuscrito de Valla. La copia se hizo entre los años 1449 y 1472. Perteneció al cardenal Bessarión, con cuyos fondos se fundó la Biblioteca Marciana de Venecia, donde esta copia se conserva hoy en día.

El códice Laurentiano 28 (4)

Es cronológicamente la segunda copia del códice Valla todavía conservada: fue con toda certeza copiada en 1491 por orden del poeta, filósofo y filólogo Angelo Poliziano para Lorenzo de Medici. Poliziano, traductor al latín de la Iliada, había viajado a Bolonia, Ferrara, Padua y Venecia en 1491 para copiar manuscritos que enriquecieran la biblioteca Laurentiana y, según se desprende del contenido de una carta a Medici, pudo costarle trabajo obtener el permiso para copiar el códice de Arquímedes debido al celo con que Valla guardaba sus manuscritos. Del cotejo de las copias conservadas del códice Valla y de la traducción publicada por este último, cabe inferir que este códice Laurentiano es la copia más fiel al manuscrito original. Se conserva en la Biblioteca Laurentiana de Florencia.

Los códices de París 2360 y 2361

Fueron copiados, el primero después de que el manuscrito pasara a poder de Alberto Pío y antes de la muerte de este (1531) –se describe explícitamente en esta copia que fue transcrita de un manuscrito que había pertenecido a Valla, pero que ahora, en el momento de ser copiado, era de Alberto Pío–. El segundo en 1544 por Christopherus Auverus para George d'Armagnac, Obispo de Rodez, que estaba en una misión para el rey de Francia Francisco I –según consta en una nota escrita en el mismo manuscrito–; en una carta de un tal Guilelmus Philander a Francisco I, publicada en una edición de Vitrubio de 1552 encontramos más referencias de este manuscrito: allí se menciona que le fue permitido, por gracia de Rodolfo Pío a instancias de George d'Armagnac, ver y hacer extractos de una copia de Arquímedes para la gran biblioteca que Francisco I proyectaba en Fontainebleau. Estos dos manuscritos pasaron posteriormente de Fontainebleau a la Bibliothèque Nationale de Francia en París donde todavía hoy se conservan.

El códice Pío II 16

Se copió en el siglo XVI y perteneció a la biblioteca del gran humanista Enea Silvio Piccolomini –que fue papa con el nombre de Pío II–, de donde pasó a la Biblioteca Vaticana –en el siglo XVIII–, donde todavía se conserva. Curiosamente la edición príncipe de las obras de Arquímedes que publicó Venatorius en Basilea en 1544 no se hizo a partir de ninguno de estos manuscritos. La historia es la siguiente.

A instancias del papa Nicolás V, Jacobo de Cremona hizo, hacia 1450, otra traducción latina de las obras de Arquímedes. Es muy posible que esta traducción se hiciera del manuscrito de Valla –con la ayuda también de la traducción de Moerbecke–: Nicolás V tuvo pues acceso al códice, aunque parece que nunca le perteneció. Hacia 1468 Regiomontano hizo una copia de la traducción de Cremona que revisó él mismo con la ayuda del códice Marcianus 350 y, probablemente también, de la traducción de Moerbecke. A partir de este manuscrito, que se conserva todavía en Nuremberg, se hizo la versión latina de la edición príncipe de Basilea. Es muy posible que el magnífico manuscrito latino f-III-9 de El Escorial sea copia, o copia de copia de esta traducción de Regiomontano.

La versión griega de la edición príncipe se hizo a partir de una probable copia del códice Valla hecha en el siglo XVI y llevada de Roma a Nuremberg, donde todavía se conserva, por Wilibald Pirckheymer. Posiblemente se realizó, además de con el Valla, cotejando con algunos otros –entre ellos, el códice Laurentiano 28 (4) y la traducción de Cremona–.

Es muy posible que este mismo manuscrito griego fuera también usado por Tartaglia para su traducción latina de las obras de Arquímedes publicada en Venecia en 1543. Probablemente Tartaglia también usara el manuscrito de Valla. En cualquier caso plagió, para los tratados *Sobre la cuadratura de la parábola* y *Sobre la medida del círculo,* la traducción latina de Moerbecke –

con las correcciones de Conerus– publicada por Lucas Gauricus en Venecia en 1503 y, para *Sobre los cuerpos flotantes,* otra vez la traducción de Moerbecke, de una copia que Tartaglia tuvo del manuscrito de Madrid BN-9119. Las palabras de Tartaglia en el prólogo, sobre las dificultades de la traducción que había abordado, sólo superadas por su increíble deseo de llevar a cabo tal trabajo, se han convertido ya en un clásico del descaro.

Quizá la mejor de las traducciones al latín de Arquímedes publicadas en el siglo XVI sea la de Federico Commandino, publicada en Venecia en 1558: más original y matemáticamente interesante que la de Moerbecke [Clagett, 1959: 429].

5. Los manuscritos griegos de Arquímedes en la Biblioteca del Monasterio de El Escorial

Cinco son los manuscritos griegos del Monasterio de El Escorial que contienen obras de Arquímedes. Tres de ellos contienen las siete obras mencionadas al inicio del punto anterior: el R-I-7, el T-I-6 y el X-I-14; mientras que otros dos contienen sólo algunas obras, el T-I-5, o fragmentos de obras, el Ω -I-1. De estos cinco manuscritos, tres pertenecen al fondo de don Diego Hurtado de Mendoza –X-I-14, T-I-5 y Ω -I-1–, mientras que el R-I-7 pudo pertenecer a Antonio de Covarrubias y el T-I-6 a Silvestre Marolo. Empezaremos analizando estos dos últimos.

5.1. El manuscrito R-I-7

Por las características de su encuadernación, Graux atribuye la pertenencia de este manuscrito en papel del siglo XVI, con unas dimensiones de 303X210 mm., a Antonio de Covarrubias [Graux, 1982: 354]. Dado que los Covarrubias no aparecieron en la breve reseña que sobre la Biblioteca de El Escorial se hizo en el punto 2, conviene aquí recoger unas cuantas notas explicativas.

Debemos empezar por Diego de Covarrubias y Leyva, hermano de Antonio de Covarrubias, y personaje de relevancia histórica en el Renacimiento español. Nacido en Toledo fue profesor de cánones en Salamanca y luego arzobispo de Santo Domingo (1549) –nombrado por Carlos V–, y obispo de Ciudad Rodrigo (1559) y Segovia (1565). Fue nombrado presidente del Consejo de Castilla en 1572 y del Consejo de Estado en 1574; murió en 1577. Fue sobre todo un gran jurista –experto en derecho romano y problemas relacionados con los derechos temporales de los papas y la jurisdicción efectiva del Emperador–: participó en el Concilio de Trento y redactó –junto con Hugo de Buocompagni (después Gregorio XIII)– los decretos de reforma. Precisamente durante su estancia en el Concilio de Trento –a partir de 1563– hizo, como Juan Páez de Castro, una biblioteca de manuscritos griegos. Su biblioteca fue cedida al colegio Oviedo en Salamanca. Su hermano Antonio de Covarrubias envió, a petición del secretario real, una lista con los códices griegos para incorporar a la Biblioteca de El Escorial los que se considerara oportuno; finalmente no se retuvo ninguno porque todas las obras contenidas en los manuscritos de Diego de Covarrubias estaban ya en el Monasterio. Parece que la colección pasó posteriormente a manos reales y se conservó en el Palacio Real de Madrid hasta que en 1954 fue trasladada a la Universidad de Salamanca. Acaba de aparecer Antonio de Covarrubias –1524-1602–, hermano de Diego y personaje de bastante menos relevancia histórica. Según Gregorio de Andrés (cfr.

[Graux, 1982: 360]), poco se sabe de su biografía: se dedicó al derecho civil en Salamanca, fue miembro del Consejo de Castilla y Gobernador de Valladolid; al final de su vida se quedó sordo y Felipe II le confirió la dignidad de canónigo maestrescuela en Toledo, donde se retiró y murió. Hay unos 23 manuscritos griegos en El Escorial que, según Graux, parecen proceder de la biblioteca de Antonio de Covarrubias: entre ellos este R-I-7: "El ms. de Arquímedes R-I-7 está cubierto –para no resaltar, entre muchas otras, más que esta señal de parentesco– de una encuadernación especial, muy semejante a aquellas de R-I-20 y sobre todo de R-I-9. Tiene la apariencia de proceder, como aquellos, de Antonio de Covarrubias" [Graux, 1982: 354].

El manuscrito contiene las 7 obras de Arquímedes y los comentarios de Eutocio:

S*obre la esfera y el cilindro,* libro I:	folios 1-31
Sobre la esfera y el cilindro, libro II:	folios 31-42
Sobre la medida del círculo:	folios 43-44
Sobre conoides y esferoides:	folios 45-81
Sobre las espirales:	folios 82-104
Sobre el equilibrio de los planos, libro I:	folios 105-111
Sobre el equilibrio de los planos, libro II:	folios 111-118
El arenario:	folios 118-126
Sobre la cuadratura de la parábola:	folios 126-136

Siguen a continuación los comentarios de Eutocio a *Sobre la esfera y el cilindro* –folios 137 a 171–, *Sobre la medida del círculo* –folios 172 a 185– y *Sobre el equilibrio de los planos* –folios 186 a 196–.

Heiberg asegura que este códice R-I-7 fue transcrito del códice vaticano Pío II 16 –ver los detalles filológicos en Heiberg, 1915: XXXVI–.

5.2. El manuscrito T-I-6

Perteneció este manuscrito en papel del siglo XVI al fondo de Silvestre Maurolico, que fue sobrino del matemático siciliano Francisco Maurolico. Francisco Maurolico, un benedictino siciliano de origen griego, publicó, aparte de varias traducciones importantes, unas *Opusculas Mathematica* (Venecia 1575) de cierto interés; Maurolico fue uno de los matemáticos que primero introdujo y usó con cierta precisión la inducción matemática [Durán, 1996: 269]. Silvestre Maurolico ofreció al rey hacia 1582 las obras impresas de su tío. A partir de ahí recibió la correspondiente encomienda del rey para buscar libros y manuscritos. Después de un viaje de dos años por toda Europa fueron entregados en 1586 a la Biblioteca de El Escorial 186 volúmenes. A esta entrega se le unieron otras en 1589 y 1596 [Revilla, 1936: XCIV]. Aunque en la colección de Silvestre Maurolico, según escribiera el doctor Bartolomé Valverde a Felipe II, apenas había 9 códices griegos con auténtico valor. Graux asigna el T-I-6 a este fondo (cfr. [Graux, 1982: 286]).

El manuscrito, con unas dimensiones de 325X225 mm, contiene todas las obras de Arquímedes y los comentarios de Eutocio en distribución idéntica al anterior. Heiberg asegura, por las mismas razones filológicas del anterior, que este códice T-I-6 fue también transcrito del códice vaticano Pío II 16.

5.3. Los manuscritos con obras de Arquímedes del fondo Hurtado de Mendoza

En el esbozo biográfico que hicimos arriba de Diego Hurtado de Mendoza se puede apreciar su carácter erudito y humanista, que incluía necesariamente curiosidad e interés por las matemáticas. Así nos lo pinta su protegido en Trento Juan Páez de Castro:

> su erudición es muy varia y estraña; es gran aristotélico y matemático; latino y griego, que no hay quien se le pare. Al fin, él es un hombre muy absoluto. Los libros que aquí ha traído son muchos, y son en tres maneras: unos de mano, griegos, en gran copia; otros impresos, en todas facultades; otros, de los luteranos [Graux, 1982: 205].

Diego Hurtado de Mendoza fue, también, protector y amigo de Tartaglia en Venecia: de hecho Hurtado de Mendoza comparece como interlocutor en las *Quesiti et inventioni diverse* obra que Tartaglia publicó en 1546 en respuesta al *Ars Magna* de Cardano: las *Quesiti* están compuestas en forma de preguntas y respuestas –el estilo que después Galileo usó para componer sus más célebres obras–; uno de los interlocutores de estos diálogos es, como se ha dicho, Hurtado de Mendoza. No se olvide que Tartaglia también publicó una traducción de Arquímedes, gran parte de la cual fue plagiada. Tres son los manuscritos del fondo Hurtado de Mendoza que conservan obras de Arquímedes.

El manuscrito Ω-I-1

Como contamos antes, este manuscrito en papel del siglo XVI lo tuvo prestado el Inquisidor General, Pedro Ponce de León, del que lo recuperó Hurtado de Mendoza al final de su vida. Esencialmente el manuscrito contiene obras de Ptolomeo: el *Almagesto* en XIII libros –folios 6 a 117; los folios 4 y 5 contienen un fragmento del primer libro del *Almagesto* sobre la invención del seno en el círculo–, la *Geografía* –folios 118 a 181–, el *Tetrabiblon* –folios 182 a 206–. Contiene también fragmentos de otros autores, entre ellos de *Sobre la medida del círculo* de Arquímedes. Según Heiberg, las obras de Ptolomeo fueron transcritas por Carpio en 1523 a partir de un códice de Alberto Pío que fuera antes de Giorgio Valla; es razonable, por tanto, pensar que el fragmento de Arquímedes fuera copiado del códice Valla, con quien el copista debía estar familiarizado.

El manuscrito T-I-5

Este manuscrito en papel del siglo XVI, con unas dimensiones de 335X235 mm., contiene tres códices –(a): abarca los folios 1 a 67; (b): 67-161; (c): 162-246– de los cuales el tercero contiene tres obras de Arquímedes. La primera de estas obras es *Sobre la esfera y el cilindro* que abarca de los folios 162 a 206, –o 1 a 39, según la numeración primitiva de esta parte del códice–; sigue *La medida del círculo* que abarca los folios 221 a 223 –54 a 56 del orden primitivo– y, finalmente, *Sobre conoides y esferoides* que va del 223 al 245 –56 a 78–. En esta parte del códice faltan todas las figuras, aunque se dejaron los correspondientes espacios en blanco. Se desconoce de dónde pudo ser copiado. Uno de los otros códices contiene obras de Herón de Alejandría y anotaciones de Arias Montano.

El manuscrito X-I-14

A mi modo de ver este es el mejor de los manuscritos griegos de Arquímedes que se custodian en la Biblioteca del Monasterio de El Escorial. Es un manuscrito en papel de mediados del siglo XVI con dimensiones 333X230 mm. Tiene diversos adornos y filigranas muy sobrios –ancla, ballesta o flechas cruzadas–, y también orlas, títulos, iniciales y capitales en tinta roja. Los dibujos que acompañan al texto no son, sin embargo, demasiado buenos. Tiene un índice de mano de Nicolás de la Torre con el nombre en griego de los autores contenidos en el códice –Arquímedes, Eutocio y Herón–. Tiene la encuadernación especial de los códices de Hurtado de Mendoza, en cuero rojo y negro con un medallón en ambas tapas –[Revilla y Andrés, 1965: 259]–.

Contiene las siete obras de Arquímedes con los comentarios de Eutocio. La distribución es como sigue:

Sobre la esfera y el cilindro, libro I:	folios 2-48
Sobre la esfera y el cilindro, libro II:	folios 49-65
Sobre la medida del círculo:	folios 66-68
Sobre conoides y esferoides:	folios 69-123
Sobre las espirales:	folios 124-161
Sobre el equilibrio de los planos, libro I:	folios 162-172
Sobre el equilibrio de los planos, libro II:	folios 172-183
El arenario:	folios 184-195
Sobre la cuadratura de la parábola:	folios 195-211

Siguen a continuación los comentarios de Eutocio a *Sobre la esfera y el cilindro* –folios 212 a 280–, *Sobre la medida del círculo* –folios 281 a 288– y *Sobre el equilibrio de los planos* –folios 289 a 303–. Completa el manuscrito el *De mensuris* de Herón –folios 304-314–.

Heiberg asegura que este códice X-I-14 fue transcrito del códice 305 de la Biblioteca Marciana de Venecia –ver los detalles filológicos en Heiberg, 1915: XXXVII–. Como se apuntó antes, Hurtado de Mendoza mandó copiar bastantes códices de la Biblioteca de San Marcos en Venecia. El códice 305 no consta en la lista de manuscritos prestados a Hurtado de Mendoza en el periodo que va del 29 de marzo de 1545 al 18 de marzo de 1546, del que hay registro. Es por tanto probable que fuera copiado con anterioridad a 1545 –no se han conservado los registros de préstamos en la Biblioteca Marciana anteriores a 1545–. Tampoco está identificado el copista; se sabe que es el mismo de otros manuscritos griegos de Hurtado de Mendoza conservados en El Escorial –los X-I-7 X-I-8, para ser precisos–. Es probable que fuera alguno de los copistas ocasionales que Hurtado de Mendoza utilizó aparte de los más habituales, como Juan Mauromata, Nicolás Gaitanus Marulus o Andrónico Nuncius.

Universidad de Sevilla

Bibliografía

- Boyer, C.: *Historia de la matemática,* Alianza Editorial, Madrid, 1986.
- Clagett, M.: The Impact of Archimedes on Medieval Science, *Isis*, 50, (1959), 419-429.
- Dijksterhuis, E.J.: *Archimedes,* Princeton University Press, Princeton, 1987.
- Graux, Charles: *Los orígenes del fondo griego del Escorial*, Fundación Universitaria Española, Madrid, 1982. Edición y traducción de Gregorio de Andrés de la obra del francés publicada en 1880.
- Crombie, A.C.: *Historia de la ciencia de San Agustín a Galileo* (dos tomos), Alianza Editorial, Madrid, 1985.
- Durán, A.J.: *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo,* Alianza Editorial, Madrid, 1996.
- Durán, A.J. (Edit.): *El legado de las matemáticas,* Real Sociedad Matemática Española y otros, Sevilla 2000.
- Heath, T.L.: *The Works of Archimedes*, Dover, Nueva York. Reimpresión de la edición de Heath de 1897 con el suplemento de 1912.
- Heath, T.L.: *A History of Greek Mathematics,* Dover, Nueva York, 1981. Reimpresión corregida de la edición de Heath de 1921.
- Heiberg, I.: *Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii,* Leipzig, 1910-1913-1915.
- Manguel, Alberto: *Una historia de la lectura,* Alianza Editorial, Madrid, 1998.
- Pérez, Joseph: *Historia de España,* Crítica, Barcelona, 1999.
- Revilla, A y Andrés, Gregorio de: *Catálogo de los códices griegos de la Biblioteca de El Escorial,* Madrid, Patronato de la Biblioteca Nacional, 1936-1965-1967.
- Sánchez Pérez, J.A.: *Las matemáticas en la Biblioteca del Escorial,* Memorias de la Real Academia de Ciencias Exactas, Física y Naturales, Madrid, 1929.

Archimede e il problema complementare: un ponte tra geometria e algebra

Silvio Maracchia

Il "problema complementare o ausiliario", enunciato da Archimede nel corso della quarta proposizione del secondo libro della sua *Sfera e Cilindro*, e di cui promette la dimostrazione senza che essa si trovi però nell'opera e in nessun'altra parte, consiste nel determinare, assegnati due segmenti AB ed AC e un'area S, un punto M tale che risulti:

$$AM : AC = S : BM^2. \qquad (*)$$

Possiamo immaginare, per nostra comodità e per l'uso che verrà fatto nel commento di Eutocio, i punti disposti lungo una retta:

Figura 1

oppure nella forma:

Figura 2

Questo è uno dei problemi che, interpretati per via algebrica, conducono ad un'equazione di terzo grado alla stregua, ad esempio, del problema della trisezione dell'angolo.

Se, infatti, si considera nella figura 1 un sistema di riferimento orientato, ad esempio, da A verso B con origine in A; indicate con 0; x; c; b le ascisse rispettivamente dei punti A; M; C; B; si ottiene:

$$x : c = S : (b - x)^2$$

che è appunto un'equazione di terzo grado in x. Da ciò la difficoltà di stabilire una costruzione geometrica capace di individuare il punto M cercato.

Il problema, infatti, non è risolubile, solamente con "riga e compasso" e cioè con la sola possibilità di tracciare rette e circonferenze. Vedremo però che la risoluzione sarà accessibile attraverso la possibilità di considerare "date" e dunque tracciabili, determinate coniche; per la parabola, ad esempio, nel caso che siano assegnati vertice, asse e parametro oppure per l'iperbole (equilatera, nel caso che interesserà a noi) nel caso che siano assegnati gli asintoti, il parametro o un suo punto.

A questo punto dobbiamo rispondere alle seguenti domande:

(a) Come si risolve il problema complementare per via geometrica?
(b) Quale può esser stata la via che ha portato alla dimostrazione?
(c) Come nasce il problema?
(d) Quali sono stati gli sviluppi algebrici del problema?

Tenendo conto dell'opera di Archimede, del commento di Eutocio, che presenta anche una dimostrazione forse dello stesso Archimede[1] e dello sviluppo algebrico, si dovrebbe seguire il percorso (c); (b); (a); (d). Noi seguiremo per maggior chiarezza espositiva il percorso (a); (b); (c); (d).

(a) Soluzione geometrica della proporzione (*) oppure dell'equivalente uguaglianza:

$$BM^2 \cdot AM = S \cdot AC. \tag{**}$$

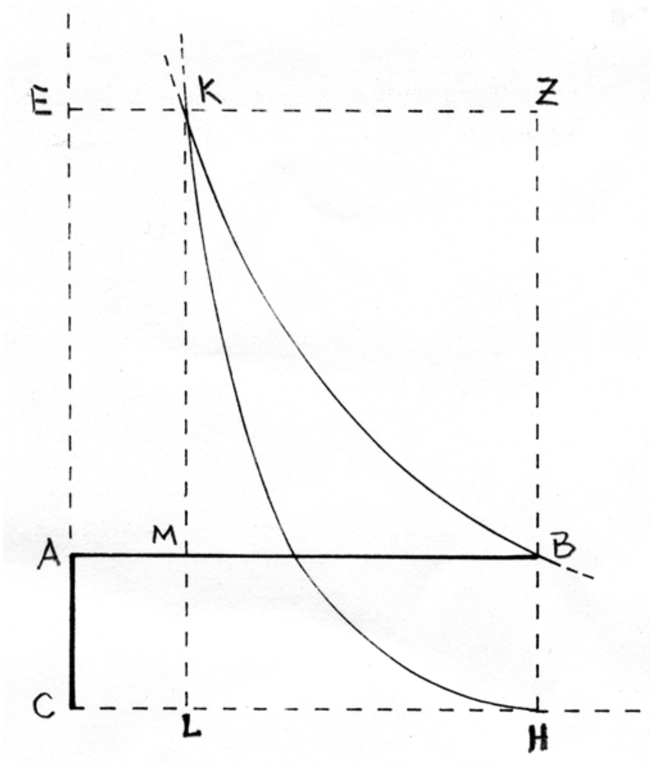


Figura 3

[1] Vi sono argomenti a favore dell'attribuzione ad Archimede della dimostrazione riportata da Eutocio ed argomenti a favore. Personalmente consideriamo più forti i primi poiché alcune lungaggini usate nella dimostrazione non usuali nello stile sintetico di Archimede si potrebbero spiegare con il desiderio di un amanuense nel cercare di spiegare "meglio" alcuni passaggi troppo rapidi alla stregua delle aggiunte di Simplicio riguardo alle lunule di Ippocrate. Più significativo appare invece il dialetto dorico, proprio di Archimede, la dimostrazione promessa di Archimede cui abbiamo accennato e la difficoltà della dimostrazione che appare semplice solo a posteriori.

A partire dalla figura 2, si costruiscano la parabola di vertice *H*, di asse *HB* e di parametro $p = S/AB$ e l'iperbole equilatera passante per *B* e di asintoti *CA* e *CH*. Indichiamo con *K* il loro punto d'incontro la cui proiezione *M* (vedremo che *M* sarà proprio il punto richiesto) risulti interno al segmento *AB*.

Per il fatto che il punto *K* appartiene alla parabola si ha (v. figura: 4):

$$KZ^2 = \frac{S}{AB}HZ \quad (^)$$

[2]

cioè

$$MB^2 = \frac{S}{AB}KL. \quad (^^)$$

Per il fatto che *K* appartiene all'iperbole equilatera si ha:

$$KE \cdot KL = AB \cdot BH \quad (^^^)$$

[3]

Moltiplicando membro a membro le (^^) e (^^^), si ottiene, semplificando:

$$MB^2 \cdot AM = S \cdot AC \text{ c.d.d.}$$

(b) Per osservare quale è stata la via per giungere alla soluzione vista, Archimede (o chi per lui) si serve del metodo dell'analisi, detto anche da Pappo metodo zeetetico,[4] che consiste nel considerare già risolto il problema. In altre parole, si suppone che *M* sia noto e sia tale che si abbia:

$$AM : AC = S : BM^2 \quad (*)$$

Facendo riferimento alla figura 2 in cui *M* è supposto dato, si mandino da *C* la parallela alla retta *AB* e la retta *CM* e si indichino con *H* e *Z* i rispettivi punti d'incontro di tali rette con la perpendicolare alla *AB* condotta da *B*.

---

2 Si tenga presente che, dall'antica definizione di parabola, il quadrato di un segmento condotto da un suo punto perpendicolarmente all'asse è uguale alla parte di asse determinato dal piede della perpendicolare, moltiplicato per il parametro. D'altronde si pensi di considerare nella figura 3 un sistema di riferimento cartesiano con origine in *H*, assi *HB* e *HC* rispettivamentre come assi delle ascisse e delle ordinate; in questo caso l'equazione della parabola $y^2 = px$ calcolata in *K* porta proprio alla (^).

3 Si pensi ad esempio di considerare nella figura 3 un sistema di riferimento cartesiano con origine in *C*, assi *CH* e *CA* rispettivamente come assi delle ascisse e delle ordinate. In questo caso l'equazione dell'iperbole equilatera avente per asintoti gli assi coordinati è $xy = \text{cost.}$ ove la costante è proprio il prodotto delle coordinate dei suoi punti da cui la relazione (^^^).

4 Pappo ne parla nelle prime righe del suo VII libro delle *Collezioni* anche se il termine verrà introdotto maggiormente dall'uso che ne farà F. Viète.

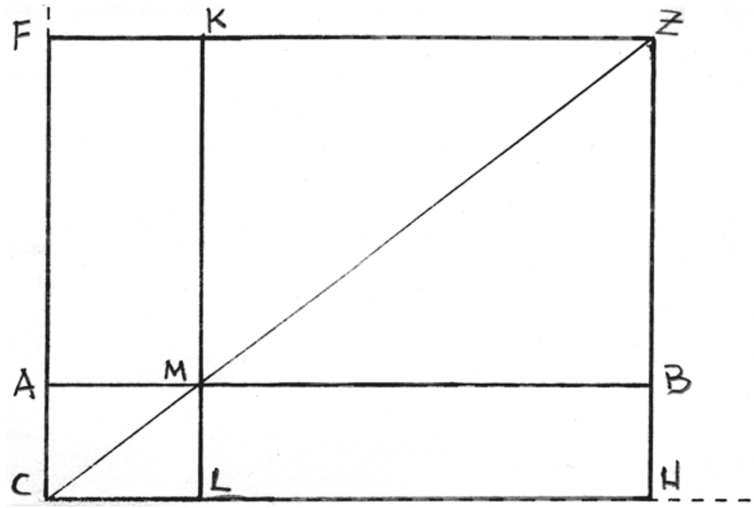


Figura 4

Si completi ora la figura (v. figura 4) costruendo i punti *K* (punto d'incontro delle perpendicolari per *Z* ed *M* rispettivamente alle rette *HZ* e *AB*) *F* ed *L*.

Per la similitudine dei triangoli *MAC* e *CHZ*, si ha:

$$AM : AC = CH : HZ = \text{(moltiplicando per } CH\text{)}\ CH^2 : CH \cdot HZ$$

cioè

$$AM : AC = CH^2 : CH \cdot HZ.$$

e confrontando questa proporzione con la (*) si ha:

$$S : MB^2 = CH^2 : CH \cdot HZ:$$

vale a dire

$$MB^2 = \frac{CH \cdot HZ \cdot S}{CH^2} = HZ\frac{S}{CH} = HZ\frac{S}{AB}\ .$$

E poiché

$$MB = KZ$$

Si ha in conclusione la (^):

$$KZ^2 = HZ\frac{S}{AB}.$$

Si può considerare pertanto il punto K appartenere alla parabola di vertice H, di asse HZ e parametro il valore noto S/AB.

Il teorema dello gnomone porta inoltre all'equivalenza dei rettangoli *MH* e *KA* [5] e dunque, sommando ad entrambi il rettangolo *AL*, all'equivalenza (^^^):

$$KF \cdot KL = AB \cdot BH$$

Questo è sufficiente per indicare che K e B appartengono all'iperbole equilatera i cui asintoti siano CA e CH.

Una volta trovate le condizioni per individuare *K* (e quindi *M*) si può operare come abbiamo visto per sintesi.

(c) Ma come è nato il "problema" complementare? Esso si trova inserito nella dimostrazione del problema II,4 dell'opera *Sfera e Cilindro* nel quale si chiede di "Tagliare una sfera data in modo che i segmenti sferici abbiano un dato rapporto [*k*]".

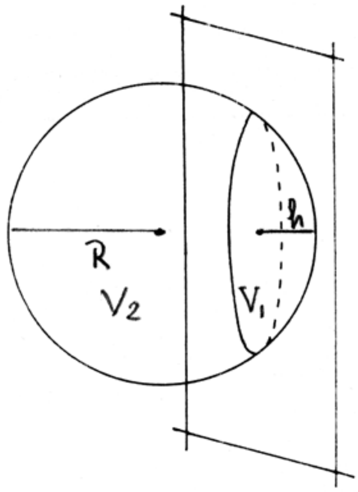


Figura 5

Noi sappiamo, oggi, che il volume di un segmento sferico di altezza *h*, appartenente ad una sfera di raggio *R* è espresso dalla formula:

$$V_{\text{seg.sf.}} = \frac{\pi}{3}h^2(3R - h)$$

In questo caso il problema di Archimede diverrebbe, indicando con *V* il volume della sfera assegnata:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{V - V_1} = \frac{\frac{\pi}{3}h^2(3R-h)}{\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{\pi}{3}h^2(3R-h)} = K$$

5 Cfr. Euclide, *Elementi*, I,43; l'equivalenza si ottiene come differenze dei triangoli uguali: *CZF* con *CZH*; *KMZ* con *ZMB* e *ACM* con *MCL*.

da cui segue l'equazione di terzo grado in *h*:

$$(K + I)h^3 - 3R(K + I)h^2 + 4KR^3 = 0 \qquad (°)$$

Archimede, non avendo a disposizione il nostro simbolismo, si serve di un notevole risultato che stabilisce l'equivalenza tra un segmento sferico e il cono avente base uguale a quella del segmento e altezza *MH* (v. figura 6) tale che sia:

$$MH : AM = (OA + A'M) : A'M$$ [6]

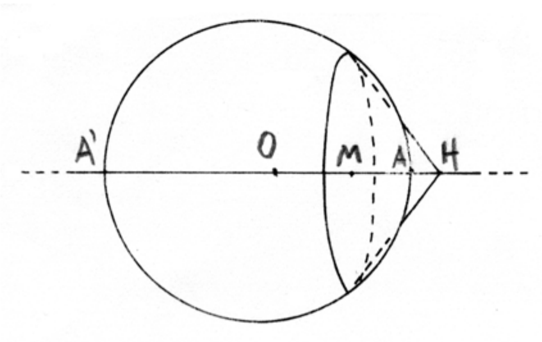


Figura 6

Dal risultato di Archimede segue che il rapporto dei due segmenti sferici V_1 e V_2 è uguale al rapporto dei due coni C_1 e C_2 equivalenti, rapporto che a sua volta, data la base comune dei due segmenti, è uguale al rapporto delle rispettive altezze (v. figura 7).

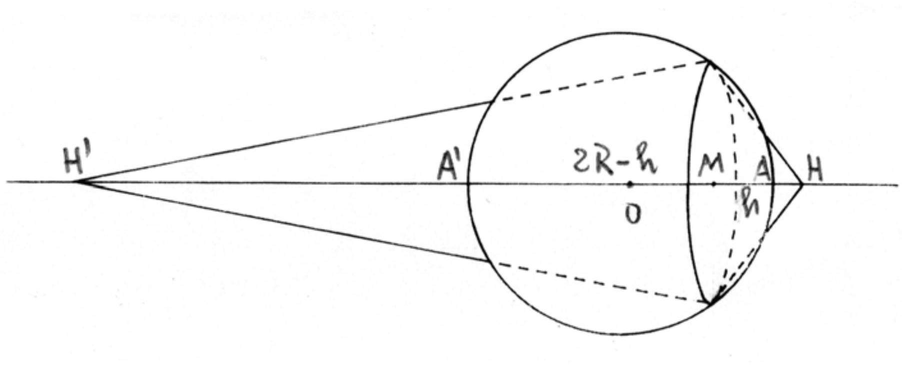


Figura 7

$$k = V_1/V_2 = C_1/C_2 = MH/H'M$$

con

[6] Archimede, *Sfera e Cilindro*, II,2 oppure *Metodo*, prop. VII: "Qualunque segmento sferico è uguale al cono avente base uguale a quella del segmento e per altezza la retta che rispetto all'altezza del segmento ha lo stesso rapporto che il raggio della sfera e l'altezza del rimanente segmento [sommati insieme] hanno rispetto all'altezza del rimanente segmento [sferico]" (tr. di A. Frajese). In simboli più espliciti la condizione si può scrivere *MH* : *h* = (3*R* - *h*) : (2*R* - *h*).

$$MH : AM = (OA + A'M) : A'M \qquad (per V_1) \tag{1}$$

$$H'M : A'M = (OA + MA) : MA \qquad (per V_2) \tag{2}$$

Per fissare le idee, supponiamo $V_1 < V_2$, cioè $MA < A'M$.

Ebbene, con una serie di passaggi applicati alle (1) e (2) che esporremo tra poco, il problema diviene:
"Dati due segmenti $A'A$ e AD con $2\ AD = A'A$ e il punto E in AD in modo che risulti $AD : ED = H'H : H'M$ trovare il punto M in $A'A$ tale che si abbia:

$$MD : ED = A'A^2 : A'M^2\text{"} \tag{°°}$$

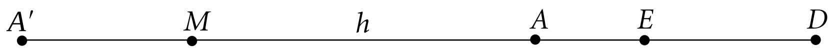


Figura 8

Si noti che la determinazione di E comporta:

$$ED = \frac{AD \cdot H'M}{H'H} = \frac{AD}{H'H : H'M} = \frac{AD}{(H'M + MH) : H'M} = \frac{AD}{H'M : H'M + MH : H'M}$$
$$= \frac{AD}{1 + k}.$$

Prima di mostrare come Archimede abbia potuto trasformare il problema iniziale nella determinazione del punto M ora vista, ci possiamo render conto dell'esattezza del risultato raggiunto tenendo presente che con: $A'A = 2R$, $MA = h$ e con E in AD tale che sia $ED = R/1 + k$, la proporzione (°°) cui è giunto Archimede diventa:

$$(h + R) : R(K + 1) = 4R^2 : (2R - h)^2$$

che è proprio l'equazione (°).

La riduzione di Archimede [7]

La "riduzione"[8] di Archimede consiste, come abbiamo visto, nello spostare il problema di trovare un punto M in $A'A$ tale che il rapporto $MH/H'M$ sia uguale ad un valore assegnato k [con H ed H' definiti dalle (1) e (2)], nel problema di trovare M in $H'H$ tale che con i punti D ed E verificanti le rispettive condizioni: $2AD = A'A$ *e* $AD : ED = H'H : H'M$ [cioè $ED = AD/(1 + k)$], si abbia:

[7] Seguiremo nella sostanza il testo di Archimede ma tenendo anche conto delle traduzioni operate da A. Frajese (*Opere di Archimede*, UTET, Torino, 1974, pp. 192-195), da P. Ver Eecke (*Les oeuvres d'Archimède*, Blanchard, Paris, 1960, pp. 101-105) e dell'esposizione di T. Heath (*A History of Greek Mathematics*, Oxford, Clarendon Press, vol. II, 1921, pp. 43-45).

[8] "Riduzione", απαγωγη, è quella operazione matematica che trasferisce la dimostrazione di una certa proprietà a quella di un'altra proprietà da cui segue la prima.

$$MD : ED = A'A^2 : A'M^2.$$

Dalla (1),[9] applicando note proprietà delle proporzioni si ottiene:

$$(MH - MA) : MA = (OA + A'M - A'M) : A'M;$$

$$AH : MA = OA : A'M;$$

$$AH : OA = MA : A'M;$$

$$OA : AH = A'M : MA. \qquad (3)$$

Analogamente, dalla (2),[10] seguendo le stesse operazioni $(OA = A'O)$:

$$H'A' : A'M = OA : MA;$$

$$H'A' : A'O = A'M : MA. \qquad (4)$$

Tenendo presente le (3) e (4) ottenute, si ha:

$$OA : AH = A'M : MA = H'A' : A'O; \qquad (5)$$

da cui, di seguito:

$$A'O : H'A' = AH : OA;$$

$$(A'O : H'A') : H'A' = (AH + OA) : OA;$$

$$H'O : H'A' = OH : A'O;$$

$$A'O : H'A' = OH : H'O;$$

$$(A'O + H'A') : H'A' = (OH + H'O) : H'O;$$

$$H'O : H'A' = H'H : H'O;$$

$$H'O^2 = H'A' \cdot H'H.$$ [11]

Si dividano i due membri per $H'A'^2$, per cui:

---

[9] Ricordiamo che la (1) è la proporzione $MH : AM = (OA + A'M) : A'M$.

[10] Ricordiamo che la (2) è la proporzione $H'M : A'M = (OA + MA) : MA$.

[11] *"Dunque"* scrive Archimede "il quadrato di $H'O$ è equivalente al rettangolo di $H'A'$, $H'H$" (le lettere non sono quelle di Archimede ma le abbiamo prese dall'op. cit. di T. Hesth.

$$H'O^2 : H'A'^2 = H'H : H'A'. \tag{6}$$

Si noti inoltre, che dalla (4) si ha:

$$(A'M + MA) : A'M = (H'A' + A'O) : H'A';$$

$$A'A : A'M = H'O : H'A'. \tag{7}$$

Si tenga presente che, dovendo determinare il punto *M*, lo si è supposto dato in modo da coinvolgerlo con segmenti noti in modo da poterlo individuare. Nella (7) anche il punto H' dipende da *M* e quindi essa non è sufficiente per la sua determinazione.

Dalla (7) si ha:

$$A'A^2 : A'M^2 = H'O^2 : H'A'^2$$

che per la (6) diventa:

$$A'A^2 : A'M^2 = H'H : H'A'. \tag{8}$$

Definiamo ora il punto *D* sul prolungamento di $A'A$, dalla parte di *A*, tale che sia:

$AD = OA.$ [12]

Per la (2) si ha di seguito *(OA = AD* per cui *OA + MA = MD)*:

$$H'M : A'M = MD : MA$$

$$H'M : (H'M - A'M) = MD : (MD - MA)$$

$$H'M : H'A' = MD : AD \tag{9}$$

Si noti che *AD* è un segmento noto, cioè dato, ed avendo supposto *M* dato, è dato anche il segmento *MD* per cui è dato il rapporto *MD* : *AD* e dunque anche il rapporto $H'M : H'A'$. Come sappiamo anche il rapporto $H'H : H'M$ è un rapporto dato (uguale a 1 + *k*) e si ha evidentemente:

$$\frac{H'H}{H'M} = \frac{H'H}{H'A'} \cdot \frac{H'A'}{H'M} \tag{10}$$

Tenendo presenti la (8) e la (9) questo formula (10) diventa:

[12] Da ciò segue che $AD > AH$, infatti, poiché dalla (3) $OA : AH = A'M : MA$, essendo $A'M > MA$, avendo considerato $V_2 > V_1$, segue che $OA > AH$ vale a dire $AD > AH$.

$$\frac{H'H}{H'M} = \frac{A'A^2}{A'M^2} \cdot \frac{AD}{MD} \tag{11}$$

Sappiamo però, per la definizione del punto E che:

$$AD : ED = H'H : H'M$$

cioè

$$\frac{H'H}{H'M} = \frac{AD}{ED};$$

per cui l'uguaglianza (11) diventa:

$$\frac{AD}{ED} = \frac{A'A^2}{A'M^2} \cdot \frac{AD}{MD};$$

vale a dire, semplificando:

$$MD : ED = A'A^2 \cdot A'M^2. \tag{12}$$

Pertanto il problema di trovare il punto M da cui mandare il piano secante tale da individuare i due segmenti sferici cercati, diventa quello di trovare il punto M che verifichi la proporzione (12) con D tale che $2AD = A'A = 2R$ ed E tale che $ED = AD/(1+k)$. Si tratta proprio della proporzione (°°) che avevamo già indicata come "riduzione" del problema II,4 della *Sfera e Cilindro* di Archimede.

Ma Archimede rende ancora più generale la proporzione (°°) da trovare estendendola a quel problema che vien detto comunemente il "problema complementare o ausiliario" che, come sappiamo consiste nel: "Trovare nel segmento dato AB un punto M in modo che assegnata un'area S e un punto C, si abbia $AM : AC = S : BM^2$" (v. figura 1).

Infatti una volta risolto il "problema complementare" è possibile risolvere anche il più particolare problema indicato dalla (°°) con le seguenti sostituzioni che trasformano la (*) nella (°°):

$A \to D$; $B \to A'$; $C \to E$, A preso in modo che $A'A = 2AD$

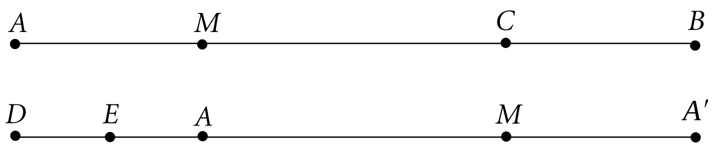


Figura 9

In questo modo *AM* diventa *DM; AC* diventa *DE; S* è una qualsiasi area assegnata e BM^2 diventa $A'M^2$ (figura 9).[13]

Siamo ritornati al primitivo “problema complementare” ed abbiamo così chiuso il cerchio del ragionamento.[14]

(d) Abbiamo visto che il problema iniziale $V_1/V_2 = K$ (anche quando si traduce nella proporzione vista $MD : ED = A'A^2 : A'M^2$ o nella più generale $AM : AC = S : BM^2$) si collega con un’equazione di terzo grado. Di questo non ebbero sentore, però, né l’Archimede della *Sfera e Cilindro,* né il probabile Archimede che risolve il “problema complementare” e neppure Eutocio che riporta tale dimostrazione e le altre di Dionisidoro (III-II secolo a. C.) e di Diocle (”50-100 a. C.).

Furono gli Arabi a riprendere il problema e, ignorando le soluzioni che Eutocio aveva riportato, lo affrontano traducendolo però in un problema algebrico.

Così racconta Omar Khayyam (XII secolo) nella *Introduzione* della su *Algebra.*

> Riguardo ai moderni, uno di questi, al Mahani, concepì l’idea di analizzare il teorema ausiliario impiegato da Archimede nella quarta proposizione del secondo libro del suo trattato sulla sfera e cilindro; quel teorema che lo condusse alla fine ad un’equazione contenente cubi, quadrati e numeri di cui non giunse a soluzione. Dopo lunga meditazione si dichiarò allora che era impossibile risolvere questa equazione, fino alla comparsa di Abu-Ja’far al Khazin che vi arrivò per mezzo delle sezioni coniche.

Notiamo che anche l’arabo al Haytam (Alhazen) aveva ottenuto il medesimo risultato e Omar Khayyam stesso risolve i vari tipi delle equazioni di terzo grado mediante intersezioni tra coniche.

Costruire segmenti che risolvono le equazioni non vuol dire però riuscire a calcolare le soluzioni per via algebrica, ma ottenere solo valori approssimati poiché approssimate sono le misure dei segmenti. È necessario per questo ottenere formule risolutive radico-razionali che possano consentire il loro uso nel calcolo e consentire inoltre la possibilità di ottenere l’approssimazione spinta a piacere.

Questo passo decisivo sarà però raggiunto solo dagli algebristi italiani Scipione Dal Ferro (1465-1526), Tartaglia (1500/06-1556), e Girolamo Cardano (1501-1576). Saranno essi, ma sarebbe lungo raccontare tutti gli avvenimenti che li coinvolsero nella scoperta,[15] che, prima riescono a portare ogni equazione di terzo grado nelle forme:

$$x^3 + q = px; \quad x^3 + px = q; \quad x^3 + q = px$$

e poi risolvendo queste mediante formule risolutive radico-razionali e non costruendo segmenti tali da risolvere le equazioni come aveva già fatto, ad esempio, Omar Khayyam.[16]

---

[13] Il secondo segmento della figura 9 è il medesimo di quello della figura 8 a parte la sua inversione o, se si vuole, l’inversione di tutti i suoi punti.

[14] Dei due casi, quello generale e quello particolare, Archimede promette di dare dimostrazioni: “e per ciascuno di questi” scrive infatti “verranno date alla fine analisi e sintesi”.

[15] Cfr. a questo proposito S. Maracchia, *Da Cardano a Galois. Momenti di storia dell’Algebra,* Feltrinelli, Milano, 1979, cap. I.

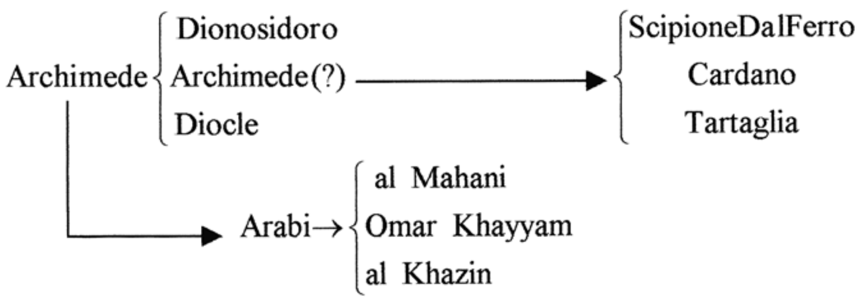
Ad esempio, nel primo caso, che è quello che si presenterebbe nell'equazione relativa al "problema complementare", si ha:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

Termino questo articolo ricordando che anche Cardano, come aveva fatto anche Tartaglia,[17] mostra come è possibile costruire un segmento risolvente una particolare equazione di terzo grado e dichiara esplicitamente di aver tratto lo spunto della sua costruzione proprio dal commento di Eutocio: "Questo ci ha insegnato di fare" scrive prima di affrontare la costruzione "Eutocio di Ascalona due volte nel [commento del] secondo libro della Sfera e Cilindro, ma è sufficiente riportare la sua prima dimostrazione".[18]

Cardano si riferisce proprio alla costruzione attribuita ad Archimede; egli evidentemente non conosce i matematici arabi, conosce però il commento di Eutocio che questi ignoravano.

Noi oggi che abbiamo la fortuna di conoscere quasi tutte le opere di Archimede, il commento di Eutocio, *l'Algebra* di Omar Khayyam e le opere di Cardano, possiamo ben valutare l'importanza che ebbe nello sviluppo dell'algebra il problema geometrico enunciato da Archimede e possiamo concludere osservando che spesso hanno causato maggior stimolo allo sviluppo della matematica i problemi rimasti aperti piuttosto che grandi risultati raggiunti e completamente esaminati.



Università La Sapienza, Roma

---

[16] La costruzione di segmenti la cui misura risolverebbe determinate equazioni, consente solo un'approssimazione della soluzione cercata legata inoltre alla più o meno esattezza di una figura. Le formule radico-razionali consentono, invece, un'approssimazione sempre più spinta dovuta all'algoritmo dell'estrazione delle radici oltre che alla possibilità di operare con le soluzioni ottenute.

[17] Tartaglia, *General Trattato*, sesta parte della *Terza parte*, quesito 47.

[18] Cardano, *De regula Aliza Libellus*, cap. XII: *De modo demonstrandi geometricé aestimationem* [Capituli] *cubi et numeri aequalium quadratis*, pp. 389-390 del volume IV dell'opera omnia, Lugduni, Sumptibus I. A. Huguetan & M. A. Ravaud, 1663.

Arquímedes y la geometría dinámica

Carlos Mederos Martín

Introducción

Podemos afirmar que a la hora de enseñar matemáticas no basta con "explicar" los conceptos propios de esta disciplina. Por el contrario, si queremos que sean asimilados de una forma significativa por los estudiantes es fundamental estudiar sus orígenes y su evolución a lo largo de la historia; es decir, hay que estudiar cómo ha evolucionado la construcción del conocimiento matemático, así como los recursos intelectuales implicados en dicha construcción.

Pero acudir a la Historia como recurso didáctico presenta ciertas dificultades, entre las que podemos destacar, en primer lugar, la necesidad de disponer de suficientes fondos documentales (textos) sobre la actividad científica a lo largo de los siglos, necesidad esta no siempre bien cubierta, sobre todo en los lugares alejados de los tradicionales centros de producción cultural; y, en segundo lugar, si suponemos resuelta la dificultad anterior, nos encontramos con que los textos antiguos son difíciles de leer, dado que están escritos en lenguas que, generalmente, no son de dominio común, las figuras no son muy claras y, a menudo, se usan notaciones desacostumbradas para la mayoría de los estudiantes, lo que produce cierto rechazo entre los posibles lectores.

Estas dificultades pueden ser paliadas en parte usando, bajo determinadas condiciones, diferentes tipos de software. La primera, por medio de la *digitalización de los documentos* y su almacenamiento en bibliotecas virtuales, accesibles desde cualquier lugar. La segunda, por medio del uso de programas relacionados con la didáctica, como, por ejemplo, el software orientado a la "geometría dinámica", cuyo uso nos permite prescindir del estudio de ciertos detalles "técnicos", para, al mismo tiempo, ayudarnos a percibir la belleza y el ingenio de las ideas simplificadas al máximo ("desnudas"): Esto es lo que podemos llamar la *digitalización de las ideas*. Este trabajo es un intento de poner en práctica esto último, usando el software de geometría dinámica *Geometer's Sketchpad*[1] y uno de los tópicos más conocidos de los trabajos de Arquímedes: la cuadratura de la parábola.

Importancia "didáctica" de los trabajos de Arquímedes

Si queremos introducirnos en el estudio de la evolución del conocimiento matemático a lo largo de la historia, debemos considerar la obra de Arquímedes como prototípica, dadas las especiales características de la misma, entre las que podemos destacar:

– Arquímedes desarrolla técnicas de demostración orientadas a la consecución del "rigor", concepto éste de vital importancia en el desarrollo histórico de la Matemática. En este sentido podemos destacar la maestría de Arquímedes en la aplicación del Método de Exhausción, cuyo

[1] *Geometer's Sketchpad.* © by Key Currículum Press. Berkeley. CA.

objetivo es evitar el uso del “infinito” en las demostraciones, siguiendo la tradición filosófica griega que excluía el uso de este concepto para la adquisición del conocimiento racional, es decir, del conocimiento “verdadero”, debido a la multitud de contradicciones en las que nos hace caer.

– Pero la aplicación del Método de Exhausción presenta un problema: se debe conocer a priori el resultado que se quiere demostrar. En consecuencia es necesario disponer de otros métodos para obtener estos resultados que luego serán demostrados “rigurosamente”, es decir, “sin hacer intervenir el infinito”. Estos métodos suelen ser bastante intuitivos y basados en el conocimiento empírico. Arquímedes descompone áreas en infinitos segmentos que luego “pesa” con su balanza; halla centros de gravedad, donde supone concentrado todo el “peso” de una figura, llegando así a resultados que luego demuestra por el Método de Exhausción.

En resumen, la obra de Arquímedes es un conjunto “cerrado” respecto a la construcción del conocimiento matemático: dispone de métodos exploratorios para obtener nuevos resultados y de métodos demostrativos para confirmar la “verdad matemática” de dichos resultados. Esta característica convierte la obra de Arquímedes en una herramienta didáctica única, que debería ser considerada “obligatoria” en la formación de los estudiantes, en particular, en la formación de los futuros matemáticos.

A continuación se presentan algunos de los conocidos resultados de Arquímedes usando *Geometer’s Sketchpad,* con el propósito de ilustrar, por una parte, las diferencias entre *descubrimiento y demostración* en matemáticas, y por otra, la relación entre el rigor en las demostraciones y su conexión con la prohibición del uso del infinito en la construcción de las mismas. Es importante recordar que su “método” exploratorio se basa, fundamentalmente, en considerar los objetos geométricos compuestos por infinitos elementos más sencillos, de manera que del estudio de ciertas propiedades de dichos elementos podemos deducir propiedades del “todo”; mientras que sus demostraciones “rigurosas” (Método de Exhausción) se basan en evitar radicalmente el uso del infinito.

Un recorrido “dinámico” por algunos resultados de Arquímedes

1. El método de exhausción

Este método se basa en la utilización de la demostración indirecta (o reducción al absurdo) junto con la Proposición X.1 de los *Elementos* de Euclides (llamada por algunos Axioma de Arquímedes).

Un ejemplo paradigmático de aplicación del Método de Exhausción lo encontramos en la Proposición 1 de *La medida del círculo:*

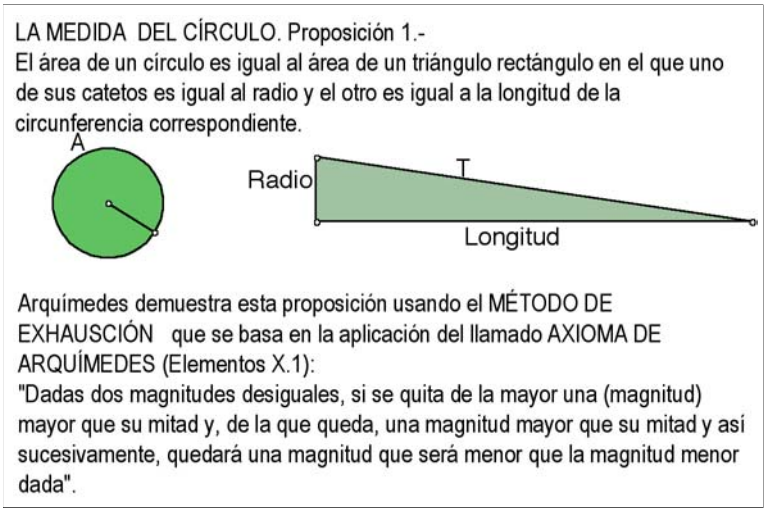


Figura 1

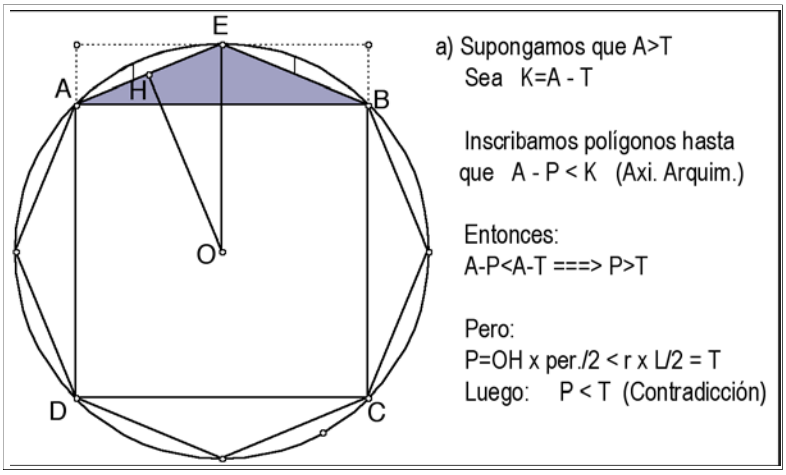


Figura 2

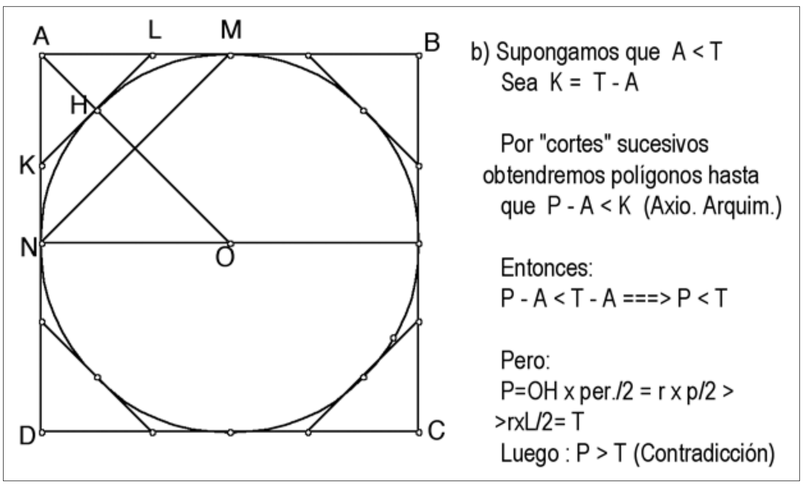


Figura 3

Obsérvese que antes de proceder a la demostración debemos conocer el hecho de que el área del círculo (A) es igual al área de cierto triángulo (T), resultado que se ha obtenido previamente aplicando algún otro método. Por último, vemos que el Axioma de Arquímedes, junto con la negación de lo que queremos demostrar (A distinto de T), nos permite encontrar un polígono de área P, comprendida entre A y T, y que resulta ser contradictorio.

2. Una demostración rigurosa

Como ya se ha dicho la idea de “rigor” en la demostración arquimediana está ligada, entre otras cosas, a la ausencia de referencias al infinito. Esta característica se puede observar de forma clara en la Proposición 9 del libro *Sobre el equilibrio de los planos:*

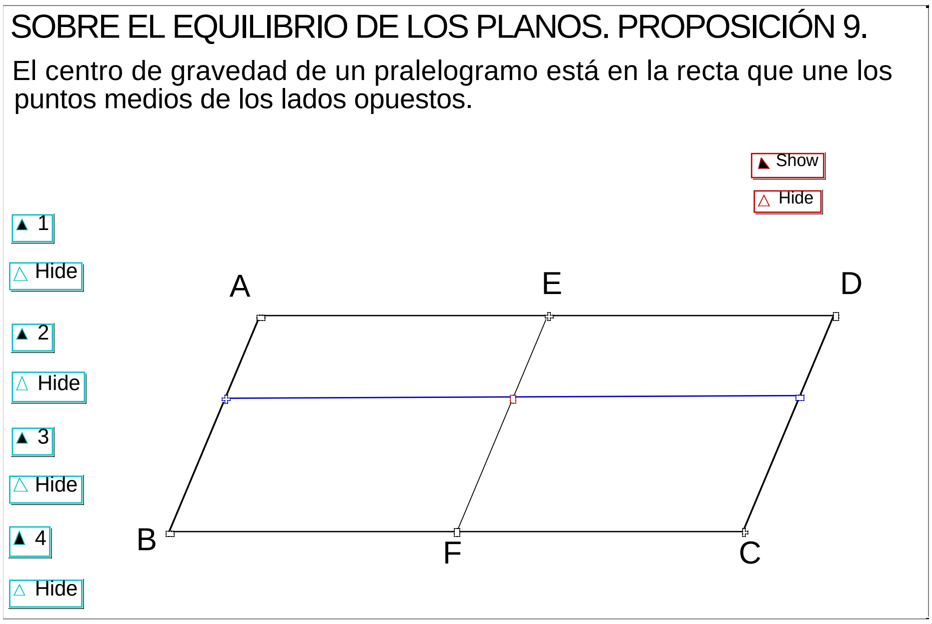


Figura 4

Queremos probar que el centro de gravedad del paralelogramo ABCD está en la línea EF. Podríamos afirmar que el paralelogramo está formado por *infinitos* segmentos, cada uno de los cuales tiene su centro de gravedad en la recta EF, por estar en ella su punto medio; por lo tanto, el centro de gravedad de todo el “conjunto” estará también en esta recta. Sin embargo Arquímedes razona de la siguiente manera:

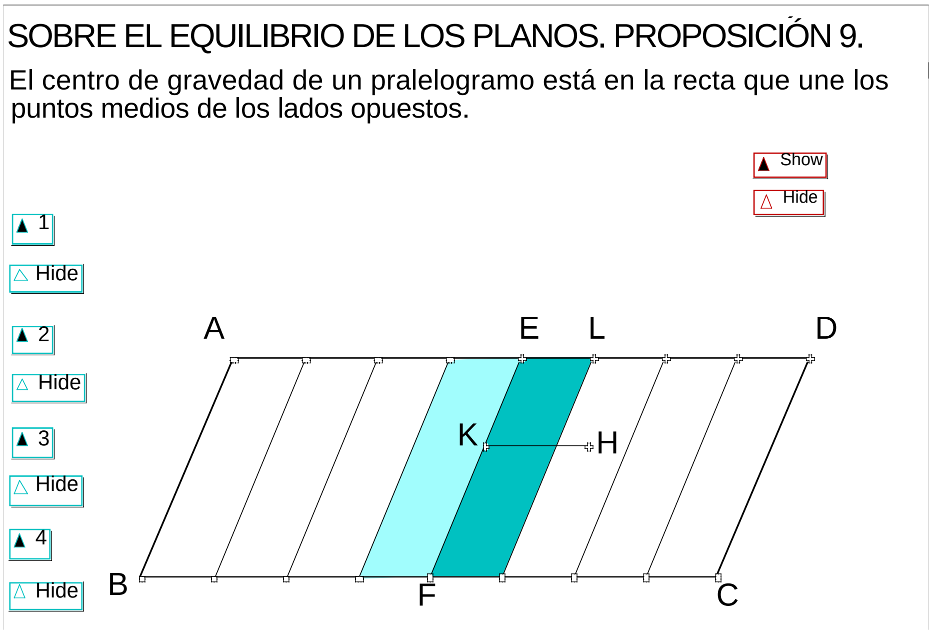


Figura 5

Supongamos que el centro de gravedad no está en EF, sea éste H. Tracemos HK paralela a AD y a BC, que corta a EF en K. Entonces es posible por bisección determinar el segmento EL de manera que EL < KH. Ahora dividimos EA en las mismas partes que ED y trazamos paralelas a AB y DC. Tenemos así un número par de paralelogramos iguales, tal que sus centros de gravedad estarán situados a igual distancia a lo largo de una recta; por lo tanto, el centro de gravedad de todo el conjunto estará situado en la línea que une los centros de gravedad de los dos centrales [Prop. 5 -Corolario 2 del Libro I de *Sobre el equilibrio de los planos*]; pero esto es imposible porque H está fuera de los dos paralelogramos centrales.

Obsérvese cómo negando lo que queremos demostrar y aplicando la bipartición *un número finito de veces*, encontramos una contradicción que nos permite afirmar la veracidad de la proposición. Podemos decir que esta sencilla demostración resume de manera admirable la noción de “rigor matemático” en Arquímedes.

3. El “método” mecánico de Arquímedes

Veamos ahora los recursos usados por Arquímedes para obtener algunos de los resultados que luego probará “rigurosamente”. Este conjunto de recursos lo denominaremos “método mecánico” y se basa en dos principios fundamentales: el uso de la balanza (ley de la palanca) para “pesar” geométricamente magnitudes (áreas, volúmenes, etc.) y el cálculo de centros de gravedad, en los que suponemos concentrado el “peso” (es decir, el área, el volumen, etc) de los objetos geométricos a estudiar. A continuación se presentan ejemplos sobre estos aspectos extraídos de la obra de Arquímedes.

En primer lugar veremos la Proposición 8 del Libro I de *Sobre el equilibrio de los planos,* que nos permite ilustrar el uso geométrico de la balanza:

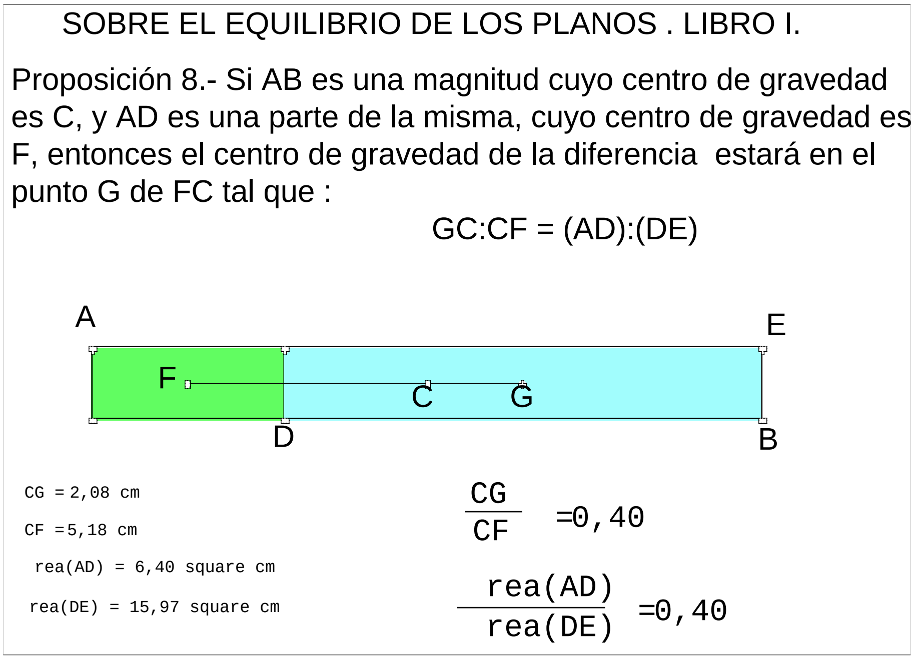


Figura 6

Si aprovechamos las posibilidades dinámicas de *Geometer's Skechpad* y desplazamos el punto D, podemos ver que se conserva la igualdad de razones enunciada, lo que nos permite pasar de una relación entre áreas a una relación entre segmentos, es decir, comparamos (medimos) áreas a través de la comparación (medida) de segmentos. Esto puede ser considerado como una reducción de un problema más complicado a otro más sencillo.

En segundo lugar nos referiremos al otro aspecto importante del "método mecánico": el cálculo de los centros de gravedad. Como ejemplo ilustrativo de esta cuestión podemos ver la Proposición 15 del Libro I de *Sobre el equilibrio de los planos:*

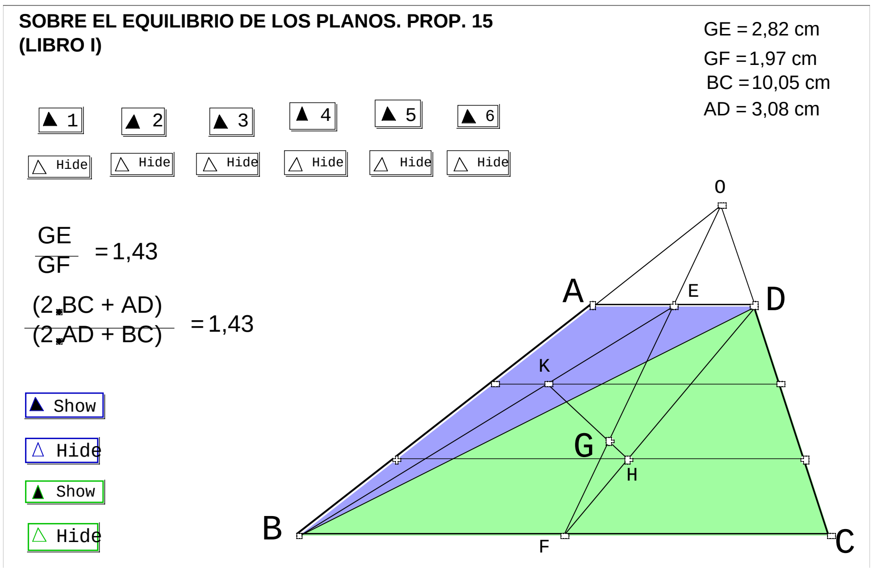


Figura 7

Esta proposición muestra cómo se puede hallar el centro de gravedad de un trapecio descomponiéndolo en dos triángulos y aplicando los postulados y las proposiciones anteriores.

Por último, veremos una proposición en la que se combinan los dos resultados anteriores; se trata de la Proposición 6 de *La cuadratura de la parábola:*

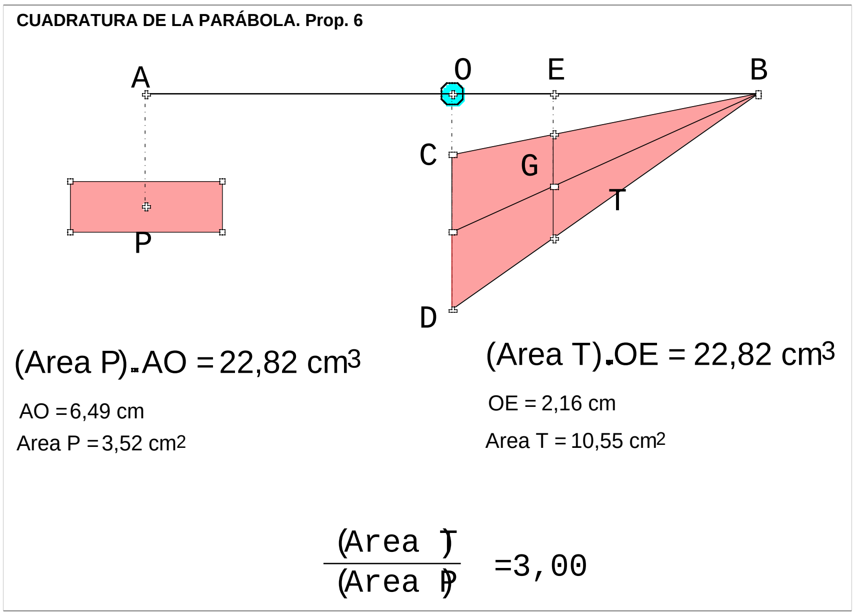


Figura 8

En la figura 8 tenemos una balanza AOB colocada horizontalmente y apoyada en su punto medio O. Sea el triángulo BCD suspendido desde los puntos B y O y tal que CD está en la misma vertical que O. Entonces, si P es un área tal que suspendida del punto A hace que el sistema permanezca en equilibrio, se cumplirá que P es un tercio del triángulo BCD. En efecto, si el sistema está equilibrado y suponemos que el área del triángulo está concentrada en su centro de gravedad, aplicando la ley de la balanza, llegamos a la conclusión de que la razón entre las áreas es igual a la razón inversa entre sus brazos, es decir 3, dado que AO/OE = OB/OE = 3, por ser G el centro de gravedad de un triángulo. Esto nos permite expresar una razón entre áreas por medio de una razón entre segmentos, o lo que es lo mismo, medir áreas a través de la medida de segmentos.

4. El método y la cuadratura de la parábola

Una vez expuestos los principios básicos del método mecánico estamos en condiciones de presentar un ejemplo del mismo. La Proposición 1 de *El Método* es, posiblemente, el ejemplo más característico:

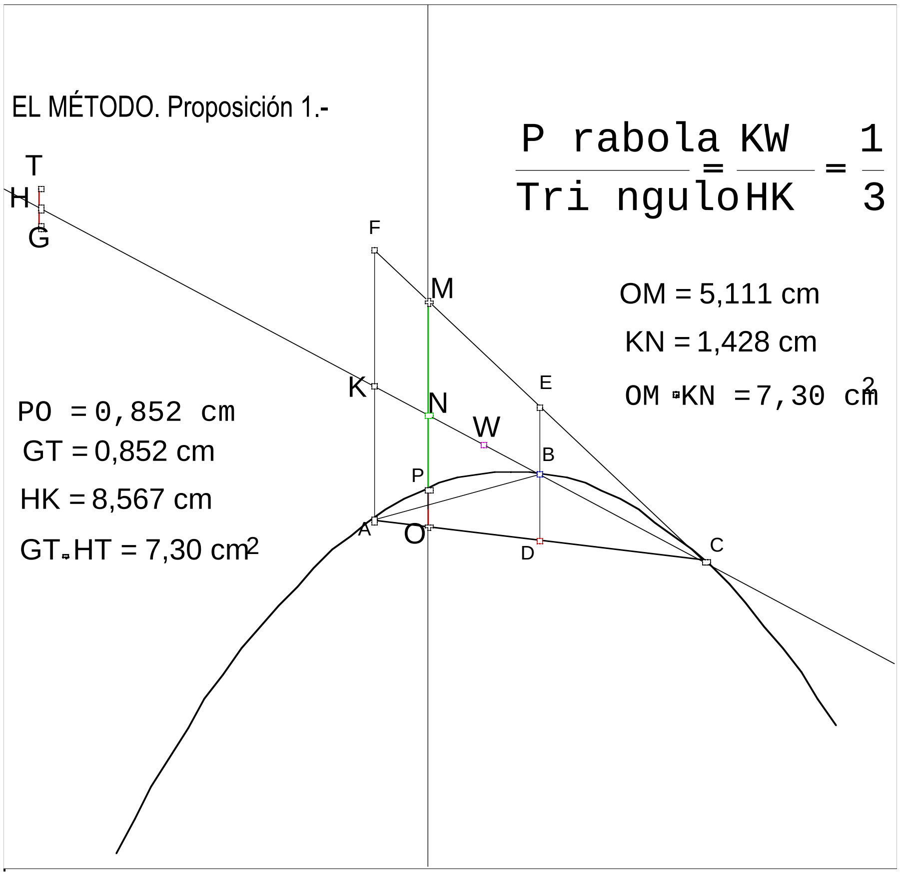


Figura 9

En el *Sketch* de la Figura 9 tenemos el segmento parabólico ABC cuya área queremos evaluar. Construimos el triángulo ACF, siendo CF tangente a la parábola en C y con AF paralelo al eje de la parábola. Pues bien, la proposición en cuestión establece que la razón entre el área del segmento parabólico y el área del triángulo es 1/3. Para llegar a este resultado podemos hacer lo siguiente: sea K el punto medio del segmento AF. Construyamos el segmento CH, tal que K sea su punto medio. Sea una recta cualquiera paralela al eje de la parábola que determina los segmentos MO con el triángulo ACF y PO con el segmento parabólico. Situemos ahora el segmento PO en el punto H, es decir, GT=PO. Si movemos la recta citada, de manera que el punto O se desplace a lo largo de AC, veremos que se conserva la igualdad de los productos GT·HT y MO·KN. Esto significa que el segmento TG, que es igual a PO, situado en H equilibra al segmento MO situado en su posición en el triángulo. Por otra parte, al mover la recta vemos que los *infinitos* segmentos PO recorren el segmento parabólico y los *infinitos* MO el triángulo. Luego, todo el segmento parabólico situado en H se equilibra con el triangulo situado en su posición. Pero, como hemos dicho antes, si están en equilibrio entonces la razón entre las áreas es igual a la razón inversa entre los correspondientes “brazos” de la balanza, siendo estos HK y KW, donde W es el centro de gravedad del triángulo. Como HK es igual a KC (mediana) y W es el centro de gravedad, podemos concluir que la razón buscada es 1/3; por lo que podemos afirmar que el área del segmento parabólico es 1/3 del área del triángulo ACF, o lo que es lo mismo, 4/3 del área del triángulo ABC.

5. La cuadratura "rigurosa" de la parábola

Conocido el anterior resultado, Arquímedes procede a demostrarlo de una forma rigurosa, es decir, sin hacer intervenir el infinito, haciendo uso del Método de Exhausción. La demostración la podemos encontrar, por ejemplo, en su libro *La cuadratura de la parábola*, concretamente en la Proposición 24, en cuya demostración se hace uso de la Proposición 23. Ambas proposiciones se exponen a continuación:

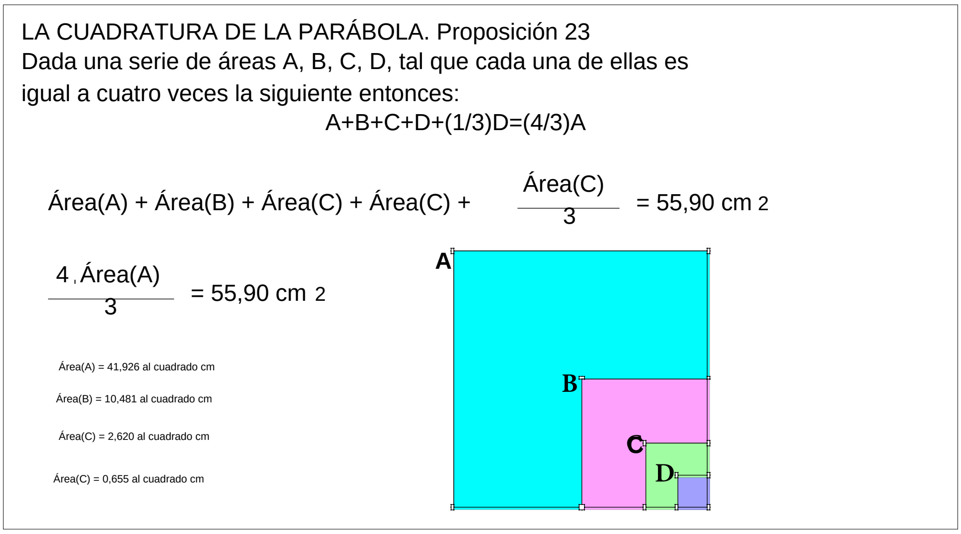


Figura 10

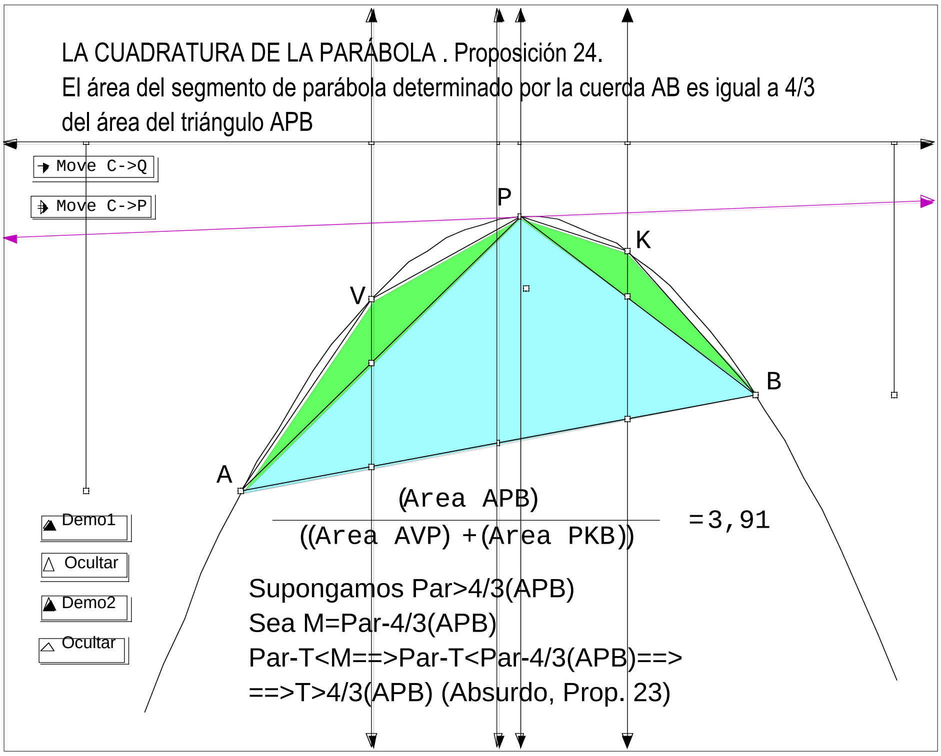


Figura 11

La Proposición 23 es una simple propiedad algebraica usada en la demostración indirecta de la Proposición 24. Esta última afirma que la razón entre el área del triángulo APB y la suma de las áreas de los triángulos AVP y PKB es igual a 4; es decir, el triángulo APB es cuatro veces mayor que la suma de los otros dos. Podemos aplicar nuevamente esta construcción en los cuatro pequeños segmentos de parábola que quedan fuera de los triángulos considerados, y así sucesivamente. Pero la Proposición 23, junto con la suposición de lo contrario de lo que queremos demostrar y el Axioma de Arquímedes (*Elementos* X.1) nos permiten encontrar una contradicción, que probaría el teorema, antes de tener que recurrir a un número infinito de repeticiones de la construcción expuesta.

Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia

Aristotle, Archimedes, Euclid, and the Origin of Mechanics: The Perspective of Historical Epistemology

Jürgen Renn, Peter Damerow, and Peter McLaughlin

The Law of the Lever from the Perspective of a Long-Range History of Mechanical Knowledge

The science of mechanics has a history extending over more than two millennia. Its origin is closely associated with the name of Archimedes and his proof of the law of the lever. But the law of the lever was not only among first mechanical laws to be formulated and proven, it also played a dominant role throughout the history of mechanical knowledge. On the basis of work undertaken at the Max Planck Institute for the History of Science in cooperation with a number of colleagues,[1] we will in the following analyse the origin of mechanics from the perspective of a "historical epistemology" as we pursue it at the Institute. Historical epistemology in this sense aims at understanding the structures of such long-term developments of knowledge.

Periods of mechanical knowledge

A rough survey suggests that the long-term history of mechanical knowledge can be divided into six more or less coherent periods:

The first period may simply be called the "prehistory of mechanics"; it comprises the long period of time in which human cultures accumulated practical mechanical knowledge without documenting this knowledge in written form and without developing theories about it. Although the origin of other sciences such as mathematics and astronomy can be traced back to the ancient urban civilizations of Babylonia and Egypt, this, surprisingly, is not the case for mechanics. In fact, although there are numerous sources testifying to the large construction projects of these civilizations, there is no single document referring to the mechanical knowledge that must have been involved in these endeavours.

The next period is that which properly merits the label "origin of mechanics." It saw, in particular, the formulation and proof of the law of the lever. More generally, it is characterized by the appearance of the first written treatises dedicated to mechanics and to physics, associated in particular with names such as Aristotle, Euclid, Archimedes, and Heron. These works had an enormous impact on subsequent development. Aristotelian physics, in particular, provided the conceptual basis for physical theories until the advent of classical mechanics.

The third period is, in its beginning, characterized by the transformation of mechanics into a "science of balances and weights" in which the law of the lever again played a key role. This period covers the Arab and Latin Middle Ages, which saw the production of an extensive mechanical literature focused, however, on a relatively small range of subjects.

---

[1] Markus Asper, Istvan Bodnar, Brian Fuchs, Elke Kazemi, and Paul Weinig.

The fourth period is that of preclassical mechanics, ranging from the sketches of Renaissance engineers such as Leonardo da Vinci to the mature works of Galileo Galilei. In contrast to the preceding period it deals with an increasingly large number of subjects, among them the inclined plane, the pendulum, the stability of matter, the spring, etc. Nevertheless, the law of the lever continued to play an important role also for the foundation of preclassical mechanics.

The fifth period is that of the "rise of a mechanistic world view." It extends from the first comprehensive visions of a mechanical cosmos such as that of Descartes, via the establishment of classical and later analytical mechanics, to the attempts of 19th century scientists to build physics on an entirely mechanical basis.

The sixth period comprises the decline of the mechanical world view and the disintegration of mechanics at the turn of the 19th to the 20th century and is associated with the emergence of modern physics and its conceptual revolutions represented by the relativity and quantum theories.

An overview of the long-term development of mechanics raises a number of puzzling questions. For example: How did (theoretical) mechanics originate in ancient Greece and why did this not happen earlier? What kind of knowledge made the formulation of the law of the lever possible, and what knowledge was required for its proof? What accounts for the remarkable differences between the medieval science of weights and preclassical mechanics? What kind of empirical knowledge made the emergence of classical mechanics possible and what accounts for its remarkable stability over the more than 200 years of classical physics? What explains the even greater stability of Aristotelian physics over more than 2000 years? How can one explain the disintegration of mechanical concepts around the turn of the last century and how could the emergence of revolutionary theories such as the theory of general relativity, which proved to be the foundation for knowledge, actually not be available at the time of their creation? And how did the law of the lever survive all these changes?

Three types of knowledge

In view of the remarkable continuities and discontinuities of the development of mechanical knowledge it may be tempting to look for contingent reasons which shaped its history, and which are unrelated to the intrinsic nature of mechanical knowledge. But is it really plausible to explain, for instance, the long dominance of Aristotelian physics, which even extended up to the period of preclassical mechanics with its widespread anti-Aristotelian attitude, merely by external factors such as the adoption of Aristotelian philosophy as the official doctrine of the Catholic Church? Such explanations only sound convincing if one assumes that scientific knowledge is exclusively represented by scientific ideas and theories. However, if one takes other dimensions of knowledge into account such as the intuitive knowledge governing thinking and behaviour in our natural environment, it becomes rather more plausible to assume that certain aspects of Aristotelian physics were as convincing for medieval and early modern scholars as they are for children and even high-school students today.

In short, we would like to suggest that an understanding of the long-term development of mechanical knowledge must take into account, in addition to the theoretical knowledge usually considered in the history of science, two further types of knowledge, intuitive physics and practical mechanical knowledge.

Intuitive physics is based on experiences acquired almost universally in any culture by human activities. Experiences relevant to intuitive mechanical knowledge include, for instance, the perception of material bodies and their relative permanence, their impenetrability, their mechanical qualities, and their physical behaviour. Intuitive physics not only forms the basis of practical human activities but also of the arguments of scientific theories of mechanics. In proofs of the law of the lever, it is, for instance, usually assumed tacitly and without any need of justification that if one arm of the balance goes up, the other one cannot go up as well but necessarily must go down.

A second kind of mechanical knowledge which predates any systematic theoretical treatment of mechanics is practical mechanical knowledge—the knowledge achieved by dealing with mechanical tools such as the balance. In contrast to intuitive mechanical knowledge, this type of knowledge is no longer universally shared by every human being. It is closely linked to the production and use of such tools by professionalized groups of people, and it consequently develops in history.

Mental models

An analysis of the relation between the various layers of knowledge and their development—the aim of an historical epistemology—requires an appropriate description of the architecture of knowledge. In our approach to historical epistemology, we make use of the concept of "mental models," taken over from cognitive science and adapted to the needs of an historical epistemology.[2] Mental models are knowledge representation structures which allow for drawing inferences from prior experiences about complex objects and processes even when only incomplete information on them is available. Furthermore, conclusions based on mental models can be corrected in the light of new information, in contrast to monotonic deductive systems, in which a valid inference is not affected by the addition of new premises.

A mental model consists of a relatively stable network of possible inferences relating inputs that are variable. Cognitive science often uses the term *slots* to indicate the nodes in the structure which have to be filled with inputs satisfying specific constraints. Applying a mental model presupposes the assimilation of specific knowledge to its structure, that is, input information compatible with the constraints of the slots is mapped into them. Filling the slots is the crucial process that decides on the appropriateness and applicability of a mental model for a specific object or process. Once the mapping is successful—if the input information satisfies the constraints of the slots—the reasoning about the object or process is, to a large extent, determined by the mental model.

Let us consider the example of the "motion-implies-force" model for instance, which, when involved in the interpretation of a process of motion, yields the conclusion that the moved object is moved by a force exerted upon it by some mover. While this conclusion is incorrect from the perspective of classical physics, contradicting as it does Newton's principle of inertia, it is in agreement with Aristotelian dynamics. What is more important in our context, the "motion-implies-force" model represents elementary human experiences. In fact, when observing some moving object, for instance a car moving on the road, one usually presumes that there is some

[2] See (Gentner and Stevens 1983; Renn 2000).

mover at work which drives the object by its force, even when the mover itself and its force cannot be directly observed. The missing information about the mover is simply added by the default settings of the model based on prior experiences. If, however, additional empirical information eventually becomes available, such as when a closer look reveals that the car is not actually being driven by its engine but rather pushed by its driver, then this information replaces the original default settings without, however, challenging the model itself.

Mental models relevant to the history of mechanics either belong to generally shared knowledge or to the shared knowledge of specific groups. Accordingly, they can be related to the three types of knowledge introduced earlier. First, there are the basic models of intuitive physics, such as the motion-implies-force model just described. Another group of mental models is part of the professional knowledge of more or less specialized practitioners. Their historical transmission is related to the transmission of the real instruments that embody them. And, finally, there are the mental models which belong to theoretical knowledge and which are communicated by an explicit description of their structure and of the conditions of their applications.

Again, let us consider examples. A foundational experience of practitioners' knowledge since ancient times has been the equivalence of the weight of a body and the force required to lift it up. This equivalence is prototypically embodied in a real model, namely that of the balance with equal arms. In fact, the force which keeps the balance in equilibrium is equal to the weight in the scale pan. We hence call this model of compensation between force and weight the "equilibrium model." However, the practical knowledge of the technicians and engineers of Antiquity also involved other basic experiences, and, in particular, the experience of how one can free oneself from the constraint of the equivalence between weight and force. In fact, the art of the mechanician consisted precisely in overcoming the natural course of things with the help of instruments such as the lever. According to this understanding, a mechanical instrument serves to achieve, with a given force, an "unnatural" effect that could not have been achieved without the instrument. We have therefore called the model underlying this understanding the "mechanae model"—according to the Greek word "mechanae" which means both mechanical instrument and trick, and which is at the origin of the word *mechanics*.

After this survey of the epistemological framework of our analysis, let us turn to the proofs of the law of the lever by Archimedes and Euclid in order to analyse their common epistemic roots.

The Aristotelian Origin of Mechanics (I)

The origin of the law of the lever

The first encounter between theoretical and practical knowledge had long since taken place before the texts of Archimedes and Euclid that are usually considered the classical references for the discovery of the law of the lever were written. This encounter is represented by the first surviving treatise on mechanics, the so-called "Mechanical Problems" traditionally and, as we believe, correctly ascribed to Aristotle, who was born in 384 B.C. about a century before Archimedes. This treatise is centred around the question:[3]

[3] Aristotle, *Mechanical Problems,* 850a30.

> Why is it that small forces can move great weights by means of a lever?

The answer is given on the basis of a principle which is repeatedly applied in the treatise:[4]

> Moved by the same force, that part of the radius of a circle which is farthest from the centre moves quicker than the smaller radius which is close to the centre.

While this principle does not express the law of the lever as we are accustomed to it, it nevertheless comes so close to its formulation that we may consider it as its direct precursor. In fact, according to this principle, the same force can compensate an ever greater weight, the further it is away from the centre or fulcrum of a lever. The law of the lever now merely specifies that the weight that can be compensated in this way is proportional to the distance of the force from the centre. According to our analysis of Aristotle's text, the knowledge structures it displays emerged from a reflection of experiences made possible by the invention of the balance with unequal arms, an invention that had taken place only recently.[5] These knowledge structures are determined by a specific mental model resulting from an integration of the mechanae model with the equilibrium model, a model that we have called "the balance-lever model." This model can indeed be understood as a generalization of the equilibrium model associated with the ordinary balance with equal arms. In the case of an equal-arms balance, weight differences are balanced by weights; in the case of an unequal-arms balance, they are balanced by changing the position of the counterweight along the scale or, as in Aristotle's case, by fixing the counterweight at the end of the beam and changing the position of the suspension point. This necessarily generalized the equilibrium model: weights can be compensated not only by weights but also by distances. It was thus the practical knowledge related to the balance with unequal arms that provided the empirical basis for the formulation of the law of the lever. In a sense, the law of the lever is even stated at one point in Aristotle's treatise, when he sums up:[6]

> The weight moved is to the moving weight inversely as the length to the length.

This proposition, however, comes somewhat as an afterthought and is never taken up again in the entire treatise; thus it may well be that it actually represents the later insertion of a commentator, which entered the text when it was copied. While the question whether or not Aristotle himself actually formulated the law of the lever must therefore be left open, it is clear that the law must have been well known when it was given a proof a generation or two later by Euclid and Archimedes.

---

4 Aristotle, *Mechanical Problems*, 848b4-6.
5 See Damerow, Renn, and Rieger 2002.
6 Aristotle, *Mechanical Problems*, 850b2.

Archimedes' Proof of the Law of the Lever

The key idea of Archimedes' proof

The treatise of Archimedes on the equilibrium of planes contains, at its beginning, a demonstration of the law of the lever, formulated in the sixth and the seventh proposition.[7] The treatise makes use of sophisticated mathematical arguments involving, for instance, the distinction between commensurable and incommensurable quantities. Nevertheless, the key idea of Archimedes' proof can be expressed in relatively simple terms by taking a specific example.

- Consider a (weightless) beam which is divided into 6 equidistant units and which is supported in its middle. Consider, furthermore, two weights, one composed of 4 units of weight, the other consisting of 2 units of weight.
- Now take the 6 units of weight and place each of them at the middle point of one of the 6 sections of the beam (figure 1). It is then immediately clear that the balance will be in equilibrium.
- Next assume that the effect of the 4 units of weights does not change when they are placed not one-by-one on the beam but when they are concentrated at their middle point as shown in figure 2. Similarly assume that also the effect of the 2 units of weight does not change if they are conceived as being concentrated at their middle point.

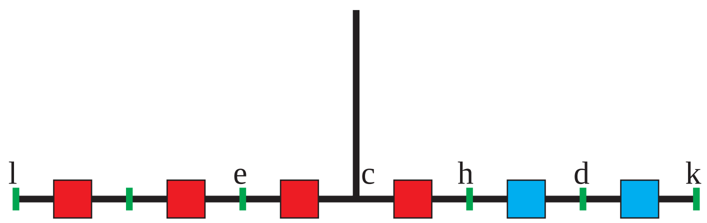


Figure 1

[7] Archimedes, *On the Equilibrium of Planes*; Heiberg 1910, 132-138, See (Clagett 1959, 34-37).

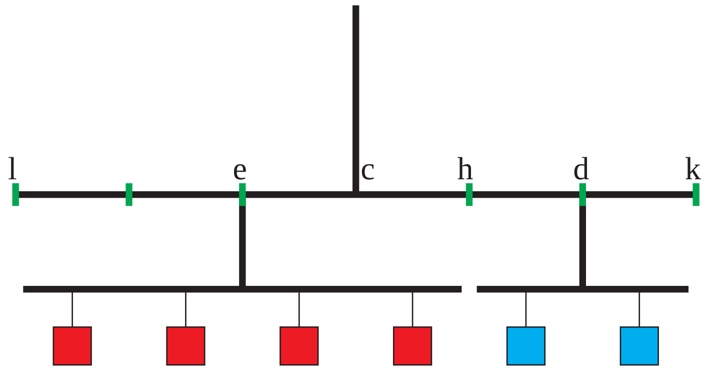


Figure 2

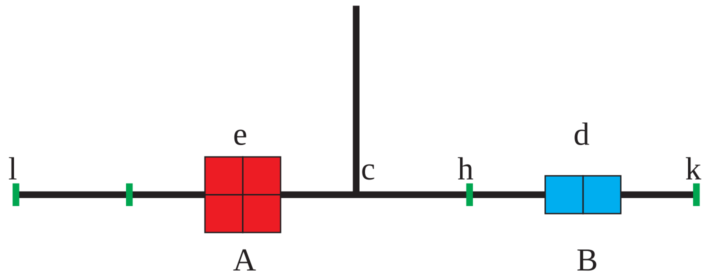


Figure 3

- In other words, the equilibrium of the total configuration remains unchanged when the original weights of 4, respectively 2, units are placed at these middle points (figure 3). We have thus arrived at a situation in which the weight A of 4 units is placed at a distance of 1 unit and the weight B of 2 units is placed at a distance of 2 units. If the equilibrium is not changed by this concentration, we have thus established a special case of the law of the lever.

The general proof essentially follows the same line of reasoning which is carefully prepared by a number of postulates stated in the beginning of the treatise and the preceding 5 propositions derived from them. As has already been indicated, the proof of the law of the lever is then performed separately for the case of commensurable and incommensurable quantities.

Mach's critique of Archimedes' proof

Clearly the critical point of Archimedes' proof is, however, not its mathematical part but the last step in our analysis, i.e. the question of the legitimacy of substituting a group of equal weights, placed at equal distances on a beam, by a single weight equal to their sum and placed at the middle point of the distance spanned by these weights.

The legitimacy of this argument has been often been disputed, in particular vividly and powerfully by the historian and philosopher of science Ernst Mach around the turn of the last century.[8] He argued that this step actually presupposes what has to be shown, the law of the lever. In fact, he argued, this step involves the assumption that equal displacements of a weight placed on a beam from and towards the point of support cancel each other, which assumes that the effect of a weight placed on a beam is a linear function of distance, a presupposition essentially equivalent to the law of the lever.

A closer look at Archimedes' proof reveals, however, that he does not actually talk about such displacements of weights at all. This objection to Mach's analysis has been raised by several historians and has been masterfully elaborated in Dijksterhuis's book on Archimedes.[9] In his analysis Dijksterhuis correctly emphasizes that, in the critical step of his proof, Archimedes makes use of the concept of centre of gravity in order to justify that the original weights keep the system in equilibrium. Indeed, Archimedes argues that these weights maintain the equilibrium because they are placed at the respective centres of gravity of the two groups of equally spaced weights which correspond to them and which, taken together, keep the beam in equilibrium because their overall centre of gravity coincides with the point of support of the beam.

Without analysing the course of Archimedes' line of argument in detail it is clear that his use of the concept of centre of gravity essentially presupposes three properties:

1. The centre of gravity of a symmetric configuration as used in the proof will be at the middle point of the configuration.
2. If a body is supported at (or suspended from) its centre of gravity, it will be in equilibrium.
3. Bodies of equal weight may be substituted for each other (whatever their suspension) without changing the state of equilibrium as long as their centres of gravity coincide.

As a matter of fact, these properties are all introduced in the earlier part of the treatise, either in the postulates or in the propositions that are demonstrated. In particular, the first property is explicitly demonstrated in the fifth proposition, the second property is introduced as an apparently self-evident property of the centre of gravity in the proof of the fourth proposition, and the third property is formulated, as it seems, somewhat obscurely as the sixth postulate which reads:[10]

> If magnitudes at certain distances be in equilibrium, other [magnitudes] equal to them will also be in equilibrium at the same distances.

The term "magnitudes" in the formulation of this postulate is indeed somewhat surprising, differing as it does from the use of the term "weight" elsewhere in the postulates. In the propositions this term occurs whenever they also involve the notion of the centre of gravity. And indeed, "magnitude" is used by Archimedes to denote a generic body of unspecified shape insofar as it can be represented by its centre of gravity both with regard to its weight and its position. The sixth postulate hence claims that bodies which are equal magnitudes in this abstract sense can also

---

8 Mach 1988, 10-24. Mach also reports other criticisms.

9 Dijksterhuis 1956, Chapter 9.

10 Archimedes, *On the Equilibrium of Planes*; Heiberg 1910, 124; Clagett 1959, 31. In the definitions of Book V of the *Elements* Euclid defines the term "magnitude" in terms of itself so that it is in fact only implicitly defined by its actual use in the arguments.

be substituted for each other if placed on the lever (or suspended from a balance)—without disturbing the state of equilibrium. With this understanding, the crucial step of Archimedes' proof is apparently justified.

On what knowledge is the proof based?

But is it really justified? Let us to return once more to Mach's criticism. The starting point of his analysis was amazement about the very possibility of Archimedes' proof:[11]

> From the mere presupposition of the equilibrium of equal weights in equal distances the inverse proportion between weight and lever arm is being derived! How is that possible?

The above analysis has indeed hardly refuted the legitimacy of Mach's quest for the epistemic foundation of Archimedes' proof. What is the knowledge on which this proof is based? This question is best answered with the help of our description of knowledge structures in terms of mental models. Archimedes' concept of magnitude, in connection with the concepts of weight and centre of gravity, indeed works like the mental models introduced above—we shall refer to the corresponding model as the "centre of gravity model." It can be applied to any heavy body, allowing us mentally to replace it by its total weight and its centre of gravity. Its slots are therefore the heavy body itself, its total weight, and the centre of gravity. The structure of the model is determined by noting that any axis through the centre of gravity turns the body into a lever in equilibrium, or, in the words of Pappus:[12]

> We say that the centre of gravity of any body is a point within that body which is such that, if the body be conceived to be suspended from that point, the weight carried thereby remains at rest and preserves its original position.

In other words, the centre of gravity model allows any body to be conceived as a generalized balance with a fulcrum and a distribution of weights around it in equilibrium. In contrast to the fulcrum, however, the centre of gravity no longer has to be a physically distinguished point that can be identified by visual cues but its identification is rather the result of the application of the model to a heavy body. In fact, the centre of gravity model can be applied to every body whether it physically resembles a balance or not. This is the step taken by Archimedes in his work on the equilibrium of plane figures.[13]

To what kind of knowledge does the centre of gravity model belong? It is clearly rooted in practical knowledge dealing with balances as it is embodied in the equilibrium model and also in observations on the stability of bodies. There are, on the other hand, indications of the existence of an earlier barycentric theory collected by Dijksterhuis, which are, however, based only on passages in later works by Heron and Pappus which still display the deficiencies in the notion of the centre of gravity that Dijksterhuis ascribes to this earlier theoretical tradition.[14] But also the text by Archimedes itself makes it sufficiently clear that understanding the centre of gravity model

11 Mach 1988, 14.
12 Pappus, *Collections*; Hulsch 1965, 1030-31. See (Gerhard 1871, 310-11; Dijksterhuis 1956).
13 Archimedes, *On the Equilibrium of Planes*, Heiberg 1910, 124-138. See (Clagett 1959, 31-37).
14 Dijksterhuis 1956, 298-300.

actually requires an explicit or implicit description of its properties. In other words, neither the emergence nor the transmission of this mental model is conceivable without its representation by written language. The very fact that the model is applicable to all heavy bodies suggests that it could hardly have emerged in the context of practitioners' knowledge dealing with specialized domains but that the model rather belongs to theoretical knowledge.

It is therefore plausible to assume that the centre-of-gravity model resulted from a reflection on the applicability of the equilibrium model to all bodies. Indeed, the application of a mental model to different objects and processes and the outcome of such applications may become themselves the object of reasoning that produces new knowledge, provided that such knowledge is appropriately represented—in our case by written language. Knowledge about knowledge structures may then in turn change these knowledge structures. Thus, the application of a mental model may lead to changes—in our case to a generalization—of that model by a deliberate reorganization of its structure as the result of the accumulated meta-knowledge obtained by reflection.

As an example for such a reorganization take the transformation of the concept of fulcrum into that of the centre of gravity. While in the equilibrium model the fulcrum is primarily characterized by its physical properties as the turning point of a balance, and only then by the functions it takes on as a consequence of the application of the model, in the more developed model, these secondary properties now become the primary properties of the centre of gravity. Because of the new abstract quality which the concept of fulcrum assumes when generalized to the concept of centre of gravity, it can now be applied iteratively, making it possible, in particular, to conceive the point of suspension of a weight on a balance in turn as the new fulcrum of another balance. This iterative application of the concept of centre of gravity is in fact the crucial feature of Archimedes' proof. As figure 2 shows, even this iteration may still be visualized as a complex combination of balances—with the important difference, however, that the substitution operations necessary to make Archimedes' proof work are justified only for the abstract concept of centre of gravity and not for concrete balances.

Our answer to the question of the epistemic roots of Archimedes' proof of the law of the lever can hence be summarized as follows: The proof makes essential use of the centre-of-gravity model which results from a reflective abstraction of the equilibrium model rooted in practical knowledge, made possible because of the representation of this knowledge in terms of written language. Although the postulates with which Archimedes' work begins make no mention of levers, balances or fulcrums, but only speak of weights, magnitudes, distances, and centres-of-gravity, they nonetheless actually describe operations of adding and taking away weights on a balance.[15]

Euclid's Proof of the Law of the Lever

The key idea of the proof

Fortunately, the far-going implications of this interpretation of Archimedes' proof for an epistemological understanding of the origins of theoretical mechanics can be checked by comparing it with another early proof of the law of the lever ascribed to Euclid. Euclid's proof is preserved only

15 Archimedes, *On the Equilibrium of Planes*, Heiberg 1910, 124, Clagett 1959, 31.

in Arabic and its ascription to Euclid is even somewhat doubtful.[16] The following discussion is restricted to a description of the proof's key idea and leaves out most of the technicalities, just as we have done for Archimedes' proof. Euclid's proof starts with a description of a peculiar set-up: Imagine a cross-like structure formed by rigid but weightless beams supported at its middle point (figure 4).[17] One corner of the cross is closed by two further weightless beams forming a square. Since all beams are weightless, the planar structure supported in the middle will obviously be stable. It will also remain in equilibrium if three equal weights are positioned on it, two at the open ends of the cross at *a* and *e*, and one at the corner point *h* of the square. The author justifies this fact by imagining that each of the main beams of the structure can be conceived as the arm of a balance, moveable only around an axis formed by the other beam. Then one of the weights is placed right on the axis of rotation and has hence no effect on the balance, while the other two weights are placed at equal distances from the fulcrum and hence keep the balance in equilibrium. The fact that one of these weights is directly attached to the beam while the other is attached at a certain distance from it by means of another of the beams forming the complex structure is considered to be of no effect since the latter beam comes off vertically from the beam of the balance so that it does not affect the distance of the weight from the axis of rotation.

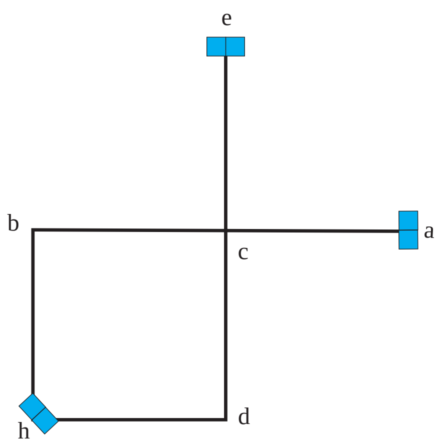


Figure 4

Since this structure is hence in equilibrium around any conceivable axis of rotation, one can imagine that one such axis lies along the diagonal of the square crossing the suspension point (figure 5). Without changing the distance from this axis of rotation, the two weights at the open ends of the cross can now be moved towards this axis until they form one weight *w* of two units lying on this axis. The distance *l* of this double weight *w* from the fulcrum *c* is now just one half the distance of the weight at the end point of the square *h* which has not changed its place. In other words, a special case of the law of the lever has been demonstrated.

[16] Euclid, *The Book of the Balance*, Clagett 1959, 24-30.
[17] Euclid actually starts with a real beam of uniform thickness rigidly fastened to an axis; then he abstracts from both aspects when giving the proof.

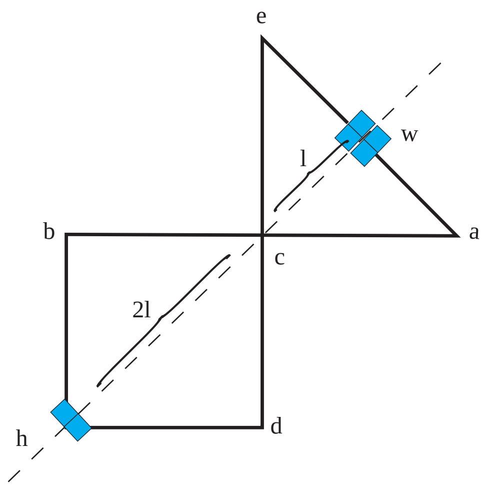


Figure 5

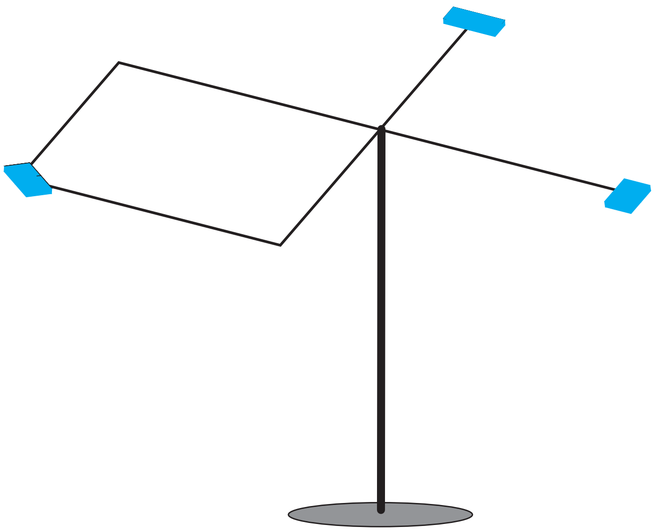


Figure 6

Euclid's proof and Mach's objection

The proof as we have so far considered it displays a number of remarkable features. It refers to a complex planar structure that at first sight has little in common with balances familiar from practical experience. What has been shown so far is merely a special case of the law of the lever. How can this special case be generalized? The sequel of the proof pursuing such a generalization appears to be even more complex. First of all, the planar construction is generalized from a square to rectangular figure. At first sight, little is achieved in this way. It is merely shown that one weight can be in balance with two other weights that are displaced by equal distances from their original positions at the fulcrum of the balance and at the end of the other lever arm, respectively. The crucial point, however, is that the insight into the legitimacy of such displacements is then taken as the basis for justifying an approach similar to that familiar from Archimedes' proof. In fact, if it is possible to move two equal weights by equal distances, one towards, the other away from the fulcrum, then it is possible to transform an equal distribution of weights along the beam of a balance into one weight concentrated at its middle point. In other words, the author so demonstrated the legitimacy of the operations criticized by Mach because they were supposedly used by Archimedes. In fact, however, they occur only in the proof of Euclid but here as the result of a complex justification based on projecting displacements in the plane onto displacements along the beam of a lever. In order to characterize this quality of weights, Euclid even introduces a term characterizing the effect of a weight on a balance, the force of heaviness.[18] In terms of this concept, his proof amounts to showing that the displacements leave the force of heaviness unchanged, just as Archimedes' proof amounts to showing that the centre of gravity is left unchanged by passing from a symmetric to an asymmetric constellation.

On what knowledge is the proof based?

The most remarkable aspect of Euclid's proof, if compared to that of Archimedes, is perhaps the fact that it proceeds without involving the concept of centre of gravity. On what knowledge then is Euclid's proof based? Like Archimedes' proof it starts from a number of assumptions that are closely related to the equilibrium model associated with the ordinary balance. But again, as it was the case of Archimedes' centre-of gravity model, these assumptions actually characterize a mental model far more general than the equilibrium model, a model one could call the "force-of-weight model." Similar to the centre-of-gravity model, it was based on practical experiences, in particular on the experience gained with unequal-arms balances that differences of weight can be compensated by differences of length. But also similar to the centre-of-gravity model, the theoretical character of this model depended on the formulation of its properties in terms of written language. As a matter of fact, Euclid's proof starts from rather artificial looking assumptions about the indifference of the equilibrium state with regard to displacements of the weights perpendicular to the axis of rotation. While these assumptions can easily be made plausible for the default case of an equal-armed balance, they determine a mental model with a much greater range of applicability, including, in particular, such strange planar constructions as used in the proof. As a matter of fact, the statements of the properties of the model are evidently formulated in such a way that they are apt to legitimize precisely the operations that need to be performed on these constructions in order to make the proof work. The postulates may hence be considered as the result of a reflection on such operations. But in spite of the contrived character of Euclid's postulates, the theoretical model he used had as wide a range of applicability as Archimedes' centre-of-gravity model. Both constitute reflective abstractions not just of the specific operations used in the proofs but generally of operations on balances.

Our answer to the question of the epistemic roots of Euclid's proof of the law of the lever can hence be summarized as follows: The proof makes essential use of the force-of-weight model which

---

[18] qūwat al-thiql. See Clagett 1959, 27.

results from a reflective abstraction of the balance-lever model rooted in practical knowledge, made possible because of the representation of this knowledge in terms of written language.

The Aristotelian Origin of Mechanics (II)

The above analysis of the proofs of Archimedes and Euclid has highlighted the role of written representations of practical knowledge as starting point for the theoretical reflection yielding the abstract concepts at the core of theoretical mechanics. This brings us back to Aristotle's "Mechanical Problems," which in fact constitutes a kind of missing link between the tradition of practical knowledge and the theoretical tradition usually considered to constitute the origin of mechanics as a science. Indeed, Aristotle's text not only transposes the experience of practitioners with unequal-armed balances into the medium of written language, formulating the balance-lever model which captures the practioners' experience that differences of weight can be compensated also by differences of lengths, thus providing the stepping stone for Euclid's proof based on the force-of-weight model. It also contains a first generalization of the equilibrium model to the case of a balance with a material beam, that is, a beam which itself possesses weight, thus offering the crucial stepping stone for Archimedes' proof based on the centre-of gravity model, as we shall now see. Considering an equal-arms balance with an extended, material beam, it is necessary to distinguish between the case in which the balance is suspended from above and the case in which it is supported from below. In fact, a balance displays different behaviours when its equilibrium is disturbed by adding or removing a weight in these two cases, as Aristotle's question makes clear:[19]

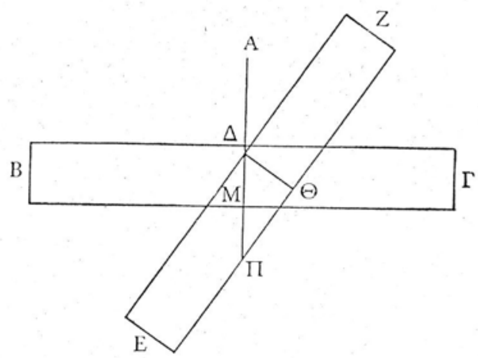


Figure 7. Why is it that, when one removes the weight that has inclined the balance downwards, it rises again, but that, when it is supported from below, the balance does not rise but remains where it is?

The answer to Aristotle's problem is based on considering the perpendicular line across the point of suspension which represents a plane dividing the balance in two parts. The relation between the weights of these two parts of the balance now decides whether or not the balance rises again. In this way, the equilibrium model is generalized to apply to the suspended beam itself, without the

[19] Aristotle, *Mechanical Problems*, 850a3-6.

weights usually attached to a balance. The criterion for whether it moves or remains at rest is now no longer the relation between such weights but that between the two parts divided by the perpendicular plane across the point of suspension. Although applied to the special case of the material beam of a balance either suspended from above or supported from below, this model works quite generally for all bodies and if pursued naturally singles out the case in which the two parts are always of equal weight. If one moves the suspension point down through the beam and moves the fulcrum up through the beam, one reaches a point where the downwardly displaced side of the beam is neither greater nor lesser than the other side. For the material beam this happens if it is suspended in the middle rather than from above or below, in other words, if it is suspended from its centre of gravity—a conclusion that Aristotle does not in fact draw although his explicit program is to identify suspension point, fulcrum, and centre of the circle. And he only compares the sizes of the areas without taking into account whether the area and thus the weight is evenly distributed on both sides of the suspension point.[20]

Aristotle's argument thus provides, when read in reverse, a first characterization of the centre of gravity as the point from which suspended a body will remain at rest and preserve its position. This characterization is exactly the definition of the centre of gravity later given by Pappus and ascribed to an early tradition of barycentric theory by Dijksterhuis. Our analysis suggests that this tradition goes actually back to the Aristotelian "Mechanical Problems" and hence to what probably represents the first encounter of theoretical tradition and practical traditions.

The Character of the Ancient Proofs

In conclusion, what is the character of the ancient proofs of the law of the lever from the perspective of historical epistemology? Where do the concepts on which these proofs depend come from and what makes these proofs convincing? The law of the lever, the centre of gravity, the indifference of the effect of a weight with regard to displacements perpendicular to the axis of rotation of a balance, the force of heaviness on a balance changing with its position, all of these concepts are, as we have seen, reflective abstractions resulting from mental models rooted in practical experience, in particular the equilibrium model and the balance-lever model. The representation of these models in the medium of written language constituted not only the basis for using these models far beyond the original extension of their range of applicability but also the presupposition for reflecting on the properties of the model as they are revealed by "running or applying it." Whereas the original mental model emerged from a reflection on the operations directly performed with the real object, secondary abstractions such as the centre of gravity or the force of a weight resulted from a reflection on mental operations represented by language and performed in order to explore the properties of the model and its application. In fact, the conclusion that all heavy bodies have a unique centre of gravity with certain properties directly results from a reflection on the use of the equilibrium model and the balance-lever model for

[20] The barycentric theory reconstructed by Dijksterhuis (1956, 298-300) found the center by dividing a plane figure into two parts of equal area or weight. However, depending on how the area, and thus the weight, is distributed, the body may or may not in fact be in equilibrium at this point. Asymmetric figures need not balance on the orthogonal plane dividing them in half.

interpreting mechanical devices, as it is illustrated in the treatise by Aristotle and in practical procedures described in Heron.[21] Insofar as these interpretations work, every body to which they apply has a point that corresponds to the fulcrum of a balance. If the identification of this point turns out to be independent of the specific way in which the model is applied to a particular body, it must be unique. Such a conclusion obviously proposes that the application of the model itself has become the object of reflection, justifying our characterization of it as a secondary reflection. Without the representation in terms of language, this could hardly have happened.

According to our interpretation, a similar process of reflective abstraction has brought about the concept of force of heaviness. As we have pointed out, this concept resulted from a reflection on the implication of the balance-lever model that weight differences can be compensated by differences in length. The fact that a small weight may balance a larger weight if it is placed at a larger distance can be interpreted according to the equilibrium model as an equivalence between the force and the weight involved. This interpretation may now trigger a modification of the force concept which is differentiated so that force no longer simply equals the weight but is qualified according to the position of the weight. This can also be found in Vitruvius in a more practical context where he explains how the small counterweight of the steelyard can balance out a "greater force" by its *momentum ponderis*.[22]

On this background we recognize the ancient proofs of the law of the lever as a third step in the genesis of mechanics, after the invention of balances with unequal arms and after the theoretical constitution of the equilibrium and balance-lever models in the Aristotelian mechanics. Although all three steps are temporally close, they are genetically distinct because each step builds on the preceding one. The proofs thus presuppose not only the practical knowledge about balances with equal and unequal arms, which gave rise to the equilibrium and the balance-lever model, but also the constitution of concepts of theoretical knowledge such as centre of gravity and force of heaviness, which result as reflective abstractions from these models. Both proofs involve, however, not only these abstract concepts but also, just like the proofs of Euclidean geometry after which they are modelled, complex constructions corresponding to physical arrangements and the operations performed on them. While in Euclidean geometry the physical operations are constructions performed with compass and ruler, they here correspond to operations with balances. And just as the admissible operations in Euclid's geometry are formulated in the postulates, the postulates here circumscribe the admissible operations with a balance. In this way, the practical knowledge about balances continued to provide the empirical grounding that made these proofs convincing.

Max Planck Institute for the History of Science, Berlin

[21] Heron, *Mechanics*, Nix/Schmidt 1900, 64-67.
[22] Vitruvius, *De architectura*, X.iii.4

References

Archimedes. 1910-15. *Opera omnia*, ed. J. Heiberg. Leipzig: Teubner.

Aristotle. 1936. *Mechanical Problems.* In *Minor Works.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Clagett, Marshall. 1959. *The Science of Mechanics in the Middle Ages*. University of Wisconsin Press.

Damerow, Peter, Jürgen Renn, and Simone Rieger. 2002. "Mechanical Knowledge and Pompeian Balances." In *Homo Faber: Studies on Nature, Technology, and Science at the Time of Pompeii*, eds. G. Castagnetti and J. Renn, 93-108. Rome: L'Erma di Bretschneider.

Dijksterhuis E. J. 1956. *Archimedes*. Copenhagen: Munksgaard.

Euclid. 1959. *The Book of the Balance.* In *The science of mechanics in the Middle Ages,* ed. M. Clagett, 24-30. Madison: Univ. of Wisconsin Press.

Gentner, Dedre and Albert L. Stevens. 1983. *Mental models.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Heron of Alexandria. *Mechanik und Katoptrik,* ed. L. Nix/W. Schmitt. Leipzig: Teubner.

Mach, Ernst. 1988. *Die Mechanik*, ed. G. Wolters. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Renn, Jürgen. 2000. "Mentale Modelle in der Geschichte des Wissens: Auf dem Wege zu einer Paläontologie des mechanischen Denkens." In *Dahlemer Archivgespräche* vol. 6, ed. E. Henning, 83-100. Berlin: Archiv zur Geschichte der Max-Planck-Gesellschaft.

Vitruvius. 1985. *De architectura*, 2 vols, ed. F. Granger. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Aristóteles, Arquímedes y los orígenes de la mecánica: perspectiva desde la epistemología histórica

Jürgen Renn, Peter Damerow, Peter McLaughlin
(lecture version)

La ley de la palanca desde la perspectiva de una historia a largo plazo del conocimiento mecánico

La ciencia de la mecánica tiene más de dos mil años de historia. Sus orígenes se hallan estrechamente asociados al nombre de Arquímedes y su prueba de la ley de la palanca, que no sólo es una de las primeras leyes mecánicas en ser formuladas y demostradas, sino que jugó un papel dominante a través de la historia del conocimiento mecánico. Gracias a un trabajo conjunto con mis colegas del Instituto Max-Planck de Historia de la Ciencia, a continuación voy a analizar los orígenes de la mecánica, desde la perspectiva de la "epistemología histórica" que desarrollamos en nuestra institución. La epistemología histórica en este sentido pretende la comprensión de las estructuras de desarrollo del conocimiento a largo plazo.

Incluso una primera panorámica sugiere que la historia a largo plazo del conocimiento mecánico puede ser dividida en seis períodos distintos:

Período del conocimiento mecánico

El primer período podemos llamarlo simplemente "prehistoria de la mecánica"; abarca el largo período de tiempo durante el que las culturas humanas acumularon conocimiento mecánico práctico sin que este conocimiento esté documentado en forma escrita, ni hubiera desarrollo de teorías sobre él. Aunque los orígenes de otras ciencias como las matemáticas y la astronomía pueden remontarse hasta las antiguas civilizaciones urbanas de Babylonia y Egipto, de modo sorprendente no es éste el caso de la mecánica. De hecho, aunque hay numerosas fuentes que atestiguan los proyectos de grandes edificios en estas civilizaciones, no hay un simple documento referente al desarrollo mecánico que implicaban tales obras.

El siguiente período es el que propiamente merece el nombre de "origen de la mecánica". Contiene, en particular, la formulación y prueba de la ley de la palanca. De modo más general, se caracteriza por la aparición de los primeros tratados escritos dedicados a la mecánica y la física, asociados a nombres tales como Aristóteles, Euclides, Arquímedes y Herón. Estas obras tuvieron un enorme impacto sobre el desarrollo subsiguiente. La física aristotélica va a suministrar el fundamento conceptual de las teorías físicas hasta el advenimiento de la mecánica clásica.

El tercer período se caracteriza, en sus inicios, por la transformación de la mecánica en una "ciencia de balanzas y pesos", en la que una vez más la ley de la palanca jugó un importante papel. Abarca la Edad Media árabe y latina, que viò la producción de una extensa literatura mecánica enfocada, sin embargo, sobre un corto número de temas.

El cuarto período es el de la mecánica preclásica, arrancando desde los bosquejos de ingenieros renacentistas como Leonardo da Vinci hasta las obras de madurez de Galileo Galilei.

En contraste con el período precedente se ocupa de un creciente número de temas, entre ellos el plano inclinado, el péndulo, el movimiento de los proyectiles, el resorte, etc. No obstante, la ley de la balanza siguió jugando un papel importante como fundamento de la mecánica preclásica.

El quinto período es el del “desarrollo de la perspectiva mecanicista”. Se extiende desde las primeras visiones totalizadoras de un cosmos mecánico, como la de Descartes, mediante el establecimiento de la mecánica clásica y luego analítica, hasta los intentos de los científicos del siglo XIX de construir la física sobre una base completamente mecánica.

El sexto período es el de la decadencia de la perspectiva mecanicista y la desintegración de la mecánica hacia 1900, asociado a la emergencia de la física moderna y su revolución conceptual representada por la relatividad y la mecánica cuántica.

Esta ojeada a vista de pájaro sobre el desarrollo a largo plazo de la mecánica plantea una serie de cuestiones problemáticas. Por ejemplo, ¿Por qué y cómo surgió la mecánica en la Grecia antigua y no antes? ¿Qué tipo de conocimiento hizo posible la ley de la palanca y qué conocimiento se requería para probarla? ¿Qué produce las notorias diferencias entre la ciencia medieval de los pesos y la mecánica preclásica? ¿Qué tipo de conocimiento empírico posibilitó la emergencia de la mecánica clásica y qué produce su notable estabilidad durante más de 200 años? ¿Cómo se explica la estabilidad aún mayor de la física aristotélica durante más de 2000 años?

Tres tipos de conocimiento

En vista de las notables continuidades y discontinuidades del desarrollo del conocimiento mecánico es tentador buscar razones accidentales que expliquen su historia, no conectadas con la naturaleza intrínseca del conocimiento mecánico. ¿Pero es acaso plausible explicar, por ejemplo, el largo dominio de la física aristotélica, que se extiende incluso hasta el período de la mecánica preclásica, con su amplia actitud antiaristotélica, meramente por factores externos como la adopción de la filosofía aristotélica por la Iglesia Católica como doctrina oficial? Tales explicaciones sólo suenan convincentes si se asume que el conocimiento científico está exclusivamente constituido por las ideas científicas y las teorías.

Sin embargo, si se tienen en cuenta otras dimensiones del conocimiento, tales como el conocimiento intuitivo que gobierna el pensamiento y la conducta en nuestro entorno natural, resulta mucho más plausible asumir que ciertos aspectos de la física aristotélica eran tan convincentes para los estudiosos medievales y premodernos como lo son aún hoy para los niños y estudiantes de secundaria.

Resumiendo: me gustaría señalar que la comprensión del desarrollo a largo plazo del conocimiento mecánico debe tener en cuenta, además del conocimiento teorético usualmente considerado por la Historia de la Ciencia, otros dos tipos de conocimiento: la física intuitiva y el conocimiento práctico.

La física intuitiva se basa en experiencias adquiridas de modo casi universal en cualquier cultura mediante la actividad humana. Un segundo tipo de conocimiento mecánico que precede a cualquier tratamiento teórico es el conocimiento mecánico práctico, esto es, el conocimiento alcanzado trabajando con instrumentos mecánicos como la balanza. Al contrario que el conocimiento mecánico intuitivo este otro tipo de conocimiento no es compartido de modo universal por todos los seres humanos. Esto se halla estrechamente ligado a la producción y uso de tales instrumentos por grupos de profesionales, y consecuentemente se desarrolla a lo largo de la historia.

El análisis de la relación entre los diversos niveles de conocimiento y su desarrollo requiere una descripción apropiada de la arquitectónica del conocimiento. En nuestro acercamiento a la epistemología histórica usamos el concepto de "modelos mentales", tomado de las ciencias cognitivas y adaptado a sus propias necesidades. Los modelos mentales son estructuras de representación que permiten extraer inferencias a partir de experiencias previas con objetos y procesos complejos, incluso cuando se dispone solamente de información incompleta sobre ellos. Además, las conclusiones basadas en modelos mentales pueden ser corregidas, al contrario que en la lógica formal, según la cual hay que descartar un sistema deductivo si una de las premisas resulta ser falsa.

Un modelo mental consta de una red relativamente estable de inferencias posibles conectando inputs variables. Usamos el término "slots" para indicar los nodos en la estructura que deben rellenarse con inputs que tienen que satisfacer condiciones específicas. Aplicar un modelo mental presupone una adaptación de conocimiento específico a su estructura, esto es, la entrada de información compatible con las condiciones de los slots queda configurada en ellos. El rellenado de los slots es el proceso crucial que decide la adecuación y aplicabilidad de un modelo mental a un objeto o proceso específico. Una vez que la configuración ha tenido éxito, es decir, si la entrada de información satisface las condiciones de los slots, el razonamiento sobre el objeto o proceso se halla en gran medida determinado por el modelo mental.

Modelos mentales

Consideremos un ejemplo; el modelo "movimiento-implica-fuerza" arroja la conclusión, cuando está implicado en la interpretación de un proceso de movimiento, de que el objeto móvil es movido por una fuerza ejercida sobre él por algún motor. Mientras que esta conclusión es incorrecta desde la perspectiva de la física clásica, ya que contradice el principio de inercia de Newton, concuerda sin embargo con la dinámica aristotélica. Y lo que es más importante en nuestro contexto, el modelo "movimiento-implica-fuerza" representa experiencias humanas elementales. De hecho, cuando observamos algún objeto móvil, como un coche por una calle, suponemos normalmente que hay algún motor funcionando que lo dirige mediante su fuerza, incluso cuando el motor mismo y su fuerza no pueden ser directamente observados. La información que falta acerca del motor es sustituida por los valores por defecto del modelo basado en experiencias previas. Sin embargo, si eventualmente se llega a disponer de información empírica adicional, como cuando una mirada más próxima revela que el coche no está siendo conducido por su motor, sino empujado por su conductor, entonces esta información reemplaza al valor por defecto original, sin desafiar por ello al modelo mismo.

Los modelos mentales relevantes para la historia de la mecánica o pertenecen al conocimiento general compartido o al conocimiento compartido de grupos específicos. En consecuencia pueden estar relacionados con los tres tipos de conocimiento que mencionamos anteriormente. Así pues hay, lo primero de todo, modelos básicos de física intuitiva. Un ejemplo es el modelo "movimiento-implica-fuerza" antes descrito. Otro grupo de modelos mentales forma parte del conocimiento específico de profesionales más o menos especializados. Su transmisión histórica está conectada con la de los modelos reales que actúan como sus representaciones externas.

Finalmente están los modelos mentales que pertenecen al conocimiento teorético y que se transmiten mediante una descripción explícita de su estructura y de las condiciones de sus aplicaciones.

Consideremos algunos ejemplos. Una experiencia fundamental del conocimiento profesional desde los tiempos antiguos es la equivalencia del peso de un cuerpo y la fuerza requerida para levantarlo. Esta equivalencia se encuentra recogida de modo prototípico en un modelo real, el de la balanza de brazos iguales. De hecho, la fuerza que mantiene la balanza en equilibrio es igual al peso en la escala. Por tanto, llamamos a este modelo de compensación entre fuerza y peso “modelo de equilibrio”. Sin embargo, el conocimiento práctico de los técnicos e ingenieros de la Antigüedad implica también otras experiencias básicas, y en particular, la experiencia de cómo puede uno sustraerse a la condición de equivalencia entre peso y fuerza. En efecto, el arte del mecánico consistía precisamente en superar el curso natural de las cosas con la ayuda de instrumentos como la palanca. Según este conocimiento, un instrumento mecánico sirve para alcanzar, mediante una fuerza dada, un efecto “no natural” que no podría haberse conseguido sin el instrumento. Así pues, hemos llamado al modelo subyacente en este conocimiento “modelo mecánico” – según el término griego “mechanae”, que significa a la vez, instrumento mecánico y trampa, origen de la palabra “mecánica”.

La ley de la palanca y la invención de balanzas de brazos desiguales

Problemas de Mecánica

El primer tratado sobre la mecánica que nos ha llegado, es el llamado *Problemas de Mecánica* tradicionalmente adscrito a Aristóteles que nació casi un siglo antes que Arquímedes, en el 384 antes de nuestra era.

En el centro del tratado está el problema de combinar la física aristotélica, según la cual un efecto debe ser proporcional a su causa, con el conocimiento plasmado en el “modelo mecánico” que supone que una pequeña fuerza puede lograr un gran efecto por medio de una tecnología mecánica.

Los *Problemas de Mecánica* consisten esencialmente en treinta y cinco preguntas y sus respuestas; y casi todas siguen precisamente el mismo patrón argumental. Primero, se presenta un problema comenzando con una pregunta como: “Por qué es que ...,” seguido por la descripción de un mecanismo o técnica que le posibilíta superar una gran fuerza por una más pequeña. Segundo, ciertos elementos de los arreglos mecánicos construidos a tal fin se identifican con las partes esenciales de la palanca, esto es, con la barra, el fulcro, la fuerza motriz, y el peso a mover. En tercer lugar, la aplicación siempre del mismo principio que se consideraba como característico tanto de la palanca como de la balanza.

Este esquema silogístico puede ser concebido como la aplicación de un cierto modelo mental que nosotros hemos llamado el “modelo balanza-palanca”. Ello sirve para explicar cómo es posible que una fuerza pueda producir un efecto mayor que el natural, aplicando un artilugio mecánico, en contraste con la estricta proporcionalidad entre fuerza y efecto sugerida por el modelo “movimiento-implica-fuerza” que subyace a la dinámica aristotélica.

La ley de la palanca

¿Pero y sobre la ley de la palanca? ¿Conocía esta ley el autor de los *Problemas de la Mecánica?* El problema tres del tratado, toca explícitamente el tema de la palanca. De acuerdo con el planteamiento general del argumento el problema se plantea de la siguiente forma:

> ¿Por qué sucede que pequeñas fuerzas pueden mover grandes pesos por medio de la palanca?

A lo largo del argumento, la palanca es identificada, punto por punto, con una balanza de brazos desiguales. Entonces, de repente, aparece la ley de la palanca:

> Hay tres elementos en lo relativo a la palanca, el fulcro, el núcleo o centro, y los dos pesos, el que causa el movimiento y el que es movido. Ahora la razón entre el peso movido y el peso que mueve está en razón inversa a las distancias al centro.

La ultima afirmación no se deduce del argumento precedente, ni siquiera es usado en este u otro punto del tratado, ni tampoco en el desarrollo de la balanza de brazos desiguales. Esta desconcertante aparición de la ley de la palanca, plantea incluso la posibilidad de que el pasaje correspondiente haya sido introducido en el texto por algún copista posterior. Si Aristóteles consideró esta ley alguna vez, ciertamente fracasó en reconocer su importancia.

La balanza de brazos desiguales

¿Pero que nos dice este tratado de la mecánica sobre los conocimientos en los que se basó el descubrimiento de la ley de la palanca? Acabo de mencionar que el texto trata también de la balanza de brazos desiguales, aunque sin hacer uso de la ley de la palanca para explicar su funcionamiento. ¿Pero qué cosa fue primero: la balanza de brazos desiguales o la ley de la palanca?

Esta cuestión apunta a una sorprendente coincidencia temporal. La balanza fue inventada probablemente en la primera mitad del tercer milenio antes de nuestra era. En Egipto los primeros grabados de balanzas datan del Imperio Antiguo. En Mesopotamia, el uso de balanzas está documentado por medidas de peso que aparecen en documentos del temprano periodo dinástico Fara, esto es, alrededor de 2700 (dos mil setecientos) antes de nuestra era.

Entonces, durante casi 2500 (dos mil quinientos) años no sucedió nada substancial, al menos en lo que concierne a las técnicas de pesadas. Después de este gran periodo de estancamiento, dos cosas sucedieron virtualmente al mismo tiempo. Se inventaron las balanzas de brazos desiguales y, se creó la ciencia de la mecánica a partir del descubrimiento de la ley de la palanca.

Que la invención de la balanza de brazos desiguales precedió a los primeros textos mecánicos está indicado por un texto literario que data de alrededor de cien años antes de los *Problemas de la Mecánica:* la comedia "Paz" de Aristófanes que ya contiene una broma sobre una balanza de brazos desiguales construida a partir de una trompeta. Para convencernos de que fue realmente posible producir una balanza de brazos desiguales sin la ley de la palanca, hemos reconstruido sistemáticamente los conocimientos necesarios para la invención, producción y uso de tales balanzas.

A lo largo de este estudio se han investigado los conocimientos mecánicos de diversas culturas incluidas las Griega, Romana, China e Incaica, con el análisis de hallazgos arqueológicos y también con las prácticas artesanales que han sobrevivido. Tanto nuestro análisis de las antiguas balanzas, en particular las de la gran colección de balanzas romanas conservadas en Pompeya, como nuestro trabajo sobre las prácticas tradicionales en Italia y en China han mostrado que los cálculos relativos a la ley de la palanca no juegan un papel en esas prácticas tradicionales.

Por otra parte, ha quedado también claro que las estructuras de conocimiento documentadas en los *Problemas de Mecánica,* resultan de una reflexión de experiencias hechas posible por la invención de la balanza de brazos desiguales.

La Prueba de Arquímedes de la ley de la palanca

La idea clave de la prueba

Este primer encuentro entre el conocimiento teórico y práctico, representado por el texto de Aristóteles, había tenido lugar hacía tiempo, cuando en algún momento del siglo III antes de nuestra era, Arquímedes escribió su tratado sobre el equilibrio de los planos, que al principio contenía una demostración de la ley de la palanca, formulada en las proposiciones sexta y séptima del mismo. El tratado hace uso de sofisticados argumentos matemáticos que incluyen, en particular, la distinción entre cantidades conmensurables e inconmensurables. No obstante, la idea clave puede ser expresada en términos relativamente simples tomando un ejemplo específico.

Primer paso: Considérese una barra dividida en seis unidades equidistantes y mantenida en su punto medio –por tanto en equilibrio–. Considérese además dos pesos; uno compuesto de cuatro unidades de peso, y el otro de dos unidades de peso.

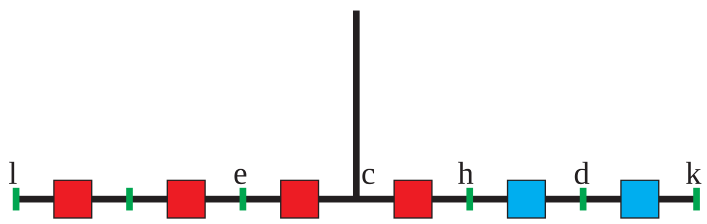


Figura 1

Segundo paso: Ahora se toman las seis unidades de peso y se sitúan cada una de ellas en el punto medio de cada una de las seis secciones de la barra. Entonces es evidente que la barra seguirá estando en equilibrio.

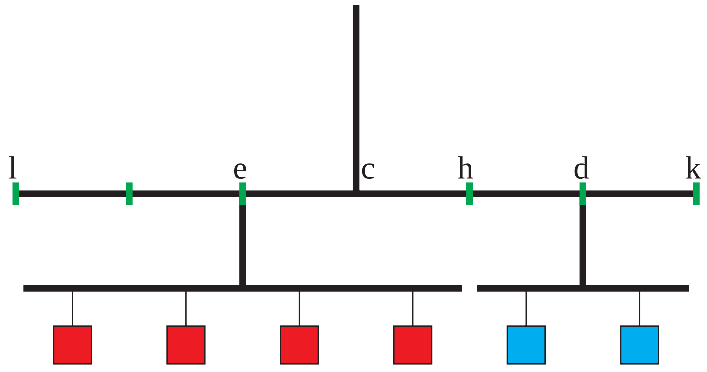


Figura 2

Tercer paso: Luego se asume que el efecto de las cuatro unidades de peso no cambia cuando son situadas no una a una en la barra, sino cuando están concentradas en su punto medio, como se muestra en la figura. Igualmente se asume que también el efecto de las dos unidades de peso no cambia si están concebidas como concentradas en su punto medio.

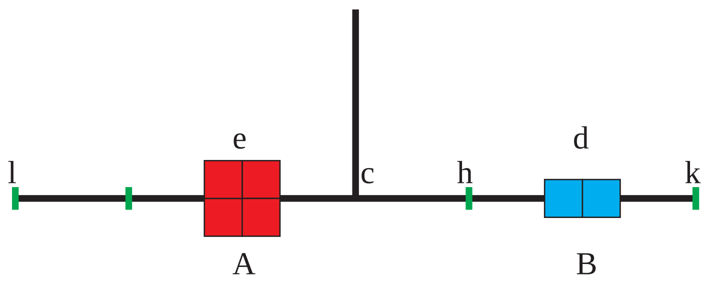


Figura 3

En otras palabras, el equilibrio de la configuración total continúa inmutable cuando los pesos originales de las cuatro, respectivamente, de las dos unidades, están ubicados en esos puntos medios. Así, hemos llegado a una situación en la que el peso A de cuatro unidades está situado a una distancia de una unidad y el peso B de dos unidades está colocado a una distancia de dos unidades. Si el equilibrio no ha cambiado por esta concentración, habremos, por tanto, establecido un caso especial de la ley de la palanca.

La prueba general sigue esencialmente la misma línea de razonamiento preparada por un número de postulados expuestos al comienzo del tratado y en las proposiciones precedentes derivadas de ellos.

La crítica de Mach sobre la prueba de Arquímedes

Queda claro que el punto crítico de la prueba de Arquímedes es, sin embargo, no su parte matemática, sino el último paso de nuestro análisis, esto es, la cuestión de la legitimidad de sustituir un grupo de pesos iguales, situados a distancias iguales en una barra, por un único peso igual a su suma y ubicado en el punto medio de la distancia abarcada por estos pesos.

La legitimidad de esta concentración de los pesos ha sido cuestionada a finales del siglo diecinueve por el historiador y filósofo de la ciencia Ernst Mach. Él argumentó que este paso presupone prácticamente lo que tiene que ser demostrado, la ley de la palanca. De hecho, defendió que este paso supone la hipótesis de que desplazamientos iguales de un peso situado en una barra desde y hacia el punto de soporte se anulan uno al otro, lo cual supone que el efecto de un peso ubicado en una barra es una función lineal de distancia, una presuposición esencialmente equivalente a la ley de la palanca.

Un estudio más cercano a la prueba de Arquímedes revela, sin embargo, que él en realidad no habla sobre esos desplazamientos de pesos. En su análisis, el historiador Dijksterhuis enfatiza que, en el paso crítico de su prueba, Arquímedes hace uso del concepto de centro de gravedad para justificar que los pesos originales mantienen el sistema en equilibrio.

Sin analizar en detalle el curso de la línea argumental de Arquímedes, queda claro que su uso del concepto de centro de gravedad presupone esencialmente tres propiedades:

1. El centro de gravedad de una configuración simétrica como la utilizada en la prueba estará en el punto medio de la configuración.
2. Si un cuerpo es mantenido (o suspendido desde) su centro de gravedad, estará en equilibrio.
3. Cuerpos de igual peso pueden ser sustituidos uno por el otro sin que cambie el estado de equilibrio en tanto sus centros de gravedad coincidan.

De hecho, estas propiedades están todas introducidas en la primera parte del tratado, bien en los postulados, o en las proposiciones demostradas.

La tercera propiedad está formulada, al parecer, de manera un tanto oscura, como sexto postulado, en el que se lee:

> Si magnitudes a ciertas distancias están en equilibrio, otras (magnitudes) iguales a ellas estarán también en equilibrio a las mismas distancias.

El término “magnitud” es usado por Arquímedes para denotar un cuerpo genérico de forma no específica en la medida en que puede ser representado por su centro de gravedad y su peso. Esto es, “magnitud” describe una entidade compatible con el sistema axiomático de Arquímedes. El sexto postulado propone, por tanto, que magnitudes iguales en este sentido abstracto pueden ser sustituidas unas por las otras si colocadas en la palanca (o suspendidas desde una balanza) sin que se modifíque el estado de equilibrio. Entendido esto, el paso crucial de la prueba de Arquímedes está justificada.

¿En qué conocimientos está basada la prueba?

¿Pero, está ella realmente justificada? Permítanme retornar una vez más a la crítica de Mach.

El punto de partida de su análisis era de asombro ante la mera posibilidad de la prueba de Arquímedes:

> A partir de la mera presuposición del equilibrio de pesos iguales a distancias iguales ¡se deriva la proporción inversa entre peso y brazo de balanza! ¿Cómo es ello posible?”

El análisis anterior no ha ciertamente refutado la legitimidad de la búsqueda de Mach sobre los fundamentos epistémicos de la demostración de Arquímedes. ¿Cuál es el conocimiento en que se basa esta prueba? Se responde mejor a esta pregunta con la ayuda de nuestra descripción de las estructuras de conocimiento en términos de modelos mentales. El concepto de magnitud de Arquímedes, en conexión con los conceptos de peso y centro de gravedad, funciona efectivamente como los modelos mentales introducidos anteriormente –me referiré al modelo correspondiente como el “modelo de centro de gravedad”–. Puede ser aplicado a cualquier cuerpo pesado, permitiendo sustituirlo mentalmente por su peso total y el centro de gravedad. Sus slots son por tanto el cuerpo pesado, su peso total y el centro de gravedad. La estructura del modelo esta determinada señalando que cualquier eje a través del centro de gravedad convierte al cuerpo en una balanza en equilibrio; en palabras de Pappus:

> Diremos que el centro de gravedad de un cuerpo es un punto dentro de él que es tal que, si concebimos el cuerpo suspendido desde este punto, el peso suspendido permanece en reposo y conserva su posición original.

En otras palabras, el modelo de centro de gravedad permite concebir un cuerpo como una balanza generalizada con un fulcro y una distribución de pesos alrededor de él. A diferencia del fulcro, sin embargo, el centro de gravedad no tiene que ser ya un punto distinguido físicamente que puede ser identificado por pistas visuales, sino que su identificación es en realidad el resultado de la aplicación del modelo a un cuerpo pesado. De hecho, el modelo de centro de gravedad puede ser aplicado a cualquier cuerpo, se parezca físicamente o no a una balanza.

¿A qué tipo de conocimiento pertenece el modelo de centro de gravedad? Tiene claramente sus raíces en el conocimiento práctico relacionado con las balanzas al estar incluido en el “modelo de equilibrio” y también en observaciones sobre la estabilidad de los cuerpos. Pero no es concebible la aparición, ni tampoco la transmisión de este modelo mental sin su representación en lenguaje escrito y por este motivo pertenece al conocimiento teórico.

Es por tanto plausible suponer que el modelo de “centro de gravedad” se obtuvo como resultado de una reflexión sobre la aplicabilidad del “modelo de equilibrio” a todos los cuerpos. En realidad, la aplicación de un modelo mental a diferentes objetos y procesos y el resultado de tales aplicaciones pueden convertirse ellos mismos en objeto de razonamiento que produzca nuevo conocimiento, siempre que tal conocimiento sea representado apropiadamente –en nuestro caso a través del lenguaje escrito–. Así, la aplicación de un modelo mental puede conducir a cambios –en nuestro caso a una generalización– de ese modelo por una reorganización deliberada de su estructura como resultado del metaconocimiento acumulado obtenido por reflexión.

Como ejemplo de tal reorganización podemos tomar la transformación del concepto de fulcro en el de centro de gravedad. Mientras en el modelo de equilibrio el fulcro se caracteriza primariamente por sus propiedades físicas en cuanto punto de inflexión de una balanza, y sólo entonces por las funciones que realiza como consecuencia de la aplicación del modelo, en el modelo más desarrollado esas propiedades secundarias se convierten ahora en las propiedades primarias del centro de gravedad. Debido a las nuevas cualidades abstractas que asume el concepto de fulcro cuando se generaliza en el concepto de centro de gravedad, puede ahora ser aplicado repetidamente, haciendo posible que se conciba a su vez el punto de suspensión de un peso como nuevo fulcro de otra balanza. Esta aplicación repetida del concepto de centro de gravedad es de hecho el aspecto crucial de la prueba de Arquímedes. Como muestra la figura 2, incluso esta repetición puede visualizarse como una compleja combinación de balanzas –con la importante diferencia, sin embargo, de que las operaciones sustitutivas necesarias para que la prueba de Arquímedes funcione se justifican solamente mediante el concepto abstracto de centro de gravedad y no mediante balanzas concretas.

Nuestra respuesta a la cuestión de las raíces epistémicas de la prueba arquimediana de la ley de la balanza puede ser resumida como sigue: la prueba usa esencialmente el modelo de “centro de gravedad” resultante de una abstracción reflexiva sobre el “modelo de equilibrio” enraizado en el conocimiento práctico, hecho posible gracias a la representación de ese conocimiento en términos de lenguaje escrito.

La primera instancia de tal representación que nosotros conozcamos es la de los *Problemas de Mecánica* de Aristóteles, que contiene también la primera formulación conservada del teorema a demostrar, la ley de la palanca. A modo de conclusión volveré una vez mas a ese texto que se puede caracterizar apropiadamente como el verdadero inicio de la ciencia de la mecánica. Como ya hemos visto, el texto de Aristóteles formula explícitamente el modelo balanza-palanca, transfiriendo las experiencias de los profesionales con balanzas de brazos desiguales al lenguaje escrito. Pero contiene también una primera generalización del modelo de equilibrio para el caso de una balanza con una barra material, es decir, una barra que tiene peso. Por lo que se ve, es necesario distinguir entre el caso en el que la balanza está suspendida desde arriba y el caso en el que está sostenida desde abajo.

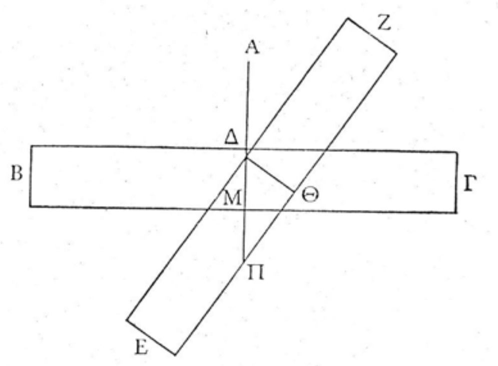


Figura 4: ¿Por qué ocurre que, cuando uno quita el peso que ha inclinado hacia abajo la balanza [cuando está suspendida desde arriba] se eleva otra vez, pero cuando está sostenida desde abajo, la balanza no se eleva sino que se queda donde está?

La respuesta se basa en considerar la línea perpendicular que atraviesa el punto de suspensión, que representa un plano que divide la balanza en dos partes. La relación entre los pesos de estas dos partes de la balanza decide ahora si ésta se elevará de nuevo o no. De este modo, el modelo de equilibrio se generaliza para aplicarlo a la propia barra suspendida, sin los pesos que suelen acompañar una balanza. El criterio para que se mueva o se quede en reposo no consistirá ya en la relación entre esos pesos, sino en la relación entre las dos partes divididas por el plano perpendicular que atraviesa el punto de suspensión. Aunque aplicado al caso especial de la barra material de una balanza, bien suspendida desde arriba o sostenida desde abajo, este modelo funciona para todos los cuerpos y selecciona de modo natural el caso en el que las dos partes son de igual peso. Con la barra material esto ocurre si ésta queda suspendida por la mitad; en otras palabras, si está suspendida desde su centro de gravedad. Por consiguiente, lo anteriormente expuesto nos proporciona, cuando lo leemos a la inversa, una primera caracterización del centro de gravedad: como el punto desde el que, suspendido un cuerpo, se queda en reposo y conserva su posición. Sin embargo, esta caracterización es exactamente la definición de centro de gravedad dada por Pappus y adscrita por Dijksterhuis a una temprana tradición de teoría baricéntrica. Así pues, nuestro análisis ha hecho posible remontar esta tradición hasta los Problemas de Mecánica de Aristóteles y por tanto hasta lo que representa el primer encuentro entre la tradición teórica y el conocimiento mecánico práctico.

Max Planck Institute for the History of Science, Berlin

El significado filosófico de las matemáticas en la cultura griega

Sergio Toledo Prats

Voy a resumir algunos aspectos de la actividad matemática griega, durante los tres siglos y medio que separan a Tales de Mileto de Arquímedes de Siracusa. Me sitúo en la perspectiva defendida por Oswald Spengler en *La decadencia de Occidente,* brillantemente desarrollada por Jacob Klein en *El pensamiento matemático griego y los orígenes del Álgebra,* a saber: que cada cultura tiene su propia matemática. Lo que implica que los significados, funciones, finalidades y métodos del quehacer matemático deben ser interpretados desde dentro de la cultura en que tienen lugar, y por tanto, en conexión con otros elementos de ella, al menos si pretendemos tener una perspectiva histórica. Así pues, no es posible trasponer sin más los conceptos y procedimientos de los matemáticos griegos a nuestra cultura, a la matemática occidental iniciada en el siglo XVII, como si hubiera una continuidad sin fisuras de su sentido, de su forma, de su valor. De modo que voy a comentar algunos avateres de la matemática griega en relación a otro saber con el que estuvo muy vinculada: la filosofía.

Tales y la escuela de Pitágoras

Se suele considerar que la gran aportación de los matemáticos griegos fue transformar la matemática empírica de civilizaciones anteriores, como la mesopotámica o la egipcia, en una matemática teórica, es decir, en un saber que prueba o demuestra sus construcciones por deducción a partir de un conjunto de axiomas, postulados, definiciones. Ello fue resultado de un largo proceso que lleva desde Tales hasta Euclides de Alejandría. La insistencia de las fuentes antiguas en los viajes de Tales y Pitágoras por Egipto y Mesopotamia no es sino un reconocimiento de la deuda de las matemáticas griegas con los egipcios, los fenicios y los babilonios. Este reconocimiento alcanzaba, probablemente, no sólo a las matemáticas prácticas difundidas en Grecia por mercaderes o artesanos extranjeros, sino a un corpus de conocimiento más organizado que requería el aprendizaje in situ.

Parece ser que la primera historia de las matemáticas fue escrita por Eudemo de Rodas, hacia el 330 a.n.e., a petición de su maestro Aristóteles, como parte de un vasto plan para recopilar algunos saberse consolidados, a ejecutar por los miembros del Liceo. Debemos recordar que una primera dificultad que enfrentan los historiadores actuales de la matemática preeuclidiana es la carencia de los textos originales, ya que no se han conservado obras anteriores a la época helenística, y las de esa fecha se conservan como manuscritos copiados en plena Edad Media por bizantinos y árabes. Una segunda dificultad es la falta de información acerca de la transmisión oral del conocimiento matemático, tanto respecto a los procedimientos de trabajo como respecto a la difusión de resultados obtenidos, factor nada desdeñable si tenemos en cuenta que la escritura no se populariza en las capas cultas de las polis helenas hasta los tiempos de Platón.

Aunque la obra de Eudemo se perdió, algunos fragmentos sobrevivieron, copiados por autores posteriores, como Gémino o Proclo. Por eso sabemos que en ella se otorgaba a Tales el honor de ser el primer matemático griego. Los cinco teoremas cuya demostración se le atribuye inclinan a pensar que dichas demostraciones debían ser aún parcialmente empíricas, muy apoyadas en lo visual, en la igualdad por simetría o superposición de figuras; desde el punto de vista lógico quizá se apoyaban en una especie de "principio de razón suficiente", de modo que una tesis argumentada debía aceptarse si no había un contraejemplo o un contraargumento mejor. Sin embargo, encontramos ya en Tales el primer paso hacia la matemática teórica: el paso de lo particular a lo universal. En un teorema tan sencillo para nosotros como el de que el diámetro divide al círculo en dos partes iguales encontramos la conversión de cualquier posible figura empírica circular en la figura teórica "círculo", haciendo abstracción de sus distintos tamaños y de su disposición en el espacio; lo mismo ocurre con la conversión de todos los diámetros posibles en la figura "diámetro"; e igualmente queda definida la figura "centro". O sea, todos los círculos son el círculo, todos los diámetros son el diámetro y todos los centros son el centro. La pluralidad es sintetizada en unidad mediante la definición de las propiedades inherentes a esas figuras.

Quien probablemente inició el camino idiosincrático de las matemáticas griegas fue Pitágoras, a partir de la fundación de su secta en Crotona hacia el 525 a.n.e. Sus principales doctrinas religiosas fueron la reencarnación y la inmortalidad de las almas de todos los seres vivos. Los pitagóricos le imprimieron una dimensión mística a las matemáticas, porque constituyen la esencia de la Naturaleza y son, por tanto, un saber sagrado. Los números y las figuras son –y nos permiten comprender– la razón fundante de los seres físicos. A sus ojos la prueba es clara: las matemáticas proporcionan verdades eternas, por tanto, verdades divinas, cuyo origen no es humano, pues todo lo humano está sujeto al cambio y la corrupción. Excepto el alma, precisamente. Si tenemos en cuenta que para los griegos hay una equivalencia entre ser y pensar, entre la physis y el logos, comprendemos mejor la correlación entre la inmortalidad del alma y las verdades eternas. Aunque para los primeros pitagóricos ni los números ni las figuras existen separados de los objetos que cuentan y modelan, la idea de "propiedad matemática eterna" hará emerger el concepto de "verdad" como categoría fundamental del logos, con una fuerza cuasidivina, como podemos comprobar viendo la persistencia de la idea de "verdad eterna" en el pensamiento teológico, filosófico y científico de Occidente hasta ayer mismo.

La teoría física pitagórica es consecuente: se basa en la tesis de que "las cosas son números". Consideran que las cosas están formadas por una cantidad determinada de partículas, todas iguales entre sí, como si fueran una especie de puntos materiales, con dimensión. Las propiedades de las cosas dependerían del número de partículas y de su configuración geométrica. Así pues, los pitagóricos son los primeros atomistas griegos. La profunda vinculación que establecieron entre aritmética y geometría ha motivado que algunos historiadores de la ciencia denominen este período inicial de la matemática pitagórica como aritmogeometría.

Probablemente entre el año 500 a.n.e. y el 470 a.n.e. los pitagóricos descubrieron la existencia de magnitudes inconmensurables, al estudiar la relación entre el lado y la diagonal del pentágono regular, o bien, del cuadrado. Una vieja leyenda da pie a pensar que el descubridor pudo haber sido Hípaso de Metaponto. Esto arruinaba la creencia pitagórica en que todo lo existente podía ser medido por el número, que todas las magnitudes podían ser expresadas como razón entre números. Dos consecuencias de interés fueron la creciente importancia de la geometría, en detrimento de la aritmética, y la sustitución, hacia mitad de siglo, del atomismo matemático pitagórico por el atomismo físico de Leucipo y Demócrito.

Fue una suerte para el devenir de las matemáticas que hacia el 450 a.n.e. los pitagóricos fueran expulsados de Crotona por motivos políticos. De ese modo se diseminaron por las polis helenas, convirtiéndose en profesores de matemáticas. Los lazos entre sus miembros se irían debilitando, aunque conocemos comunidades activas todavía a principios del siglo IV a.n.e. Los residuos de la secta desaparecen hacia el 300 a.n.e., justo por la época en que Euclides de Alejandría va a recoger en sus *Elementos* buena parte de la herencia pitagórica en geometría y aritmética. La pretensión pitagórica de que las matemáticas son conocimiento verdadero plantea dos cuestiones que serán trabajadas y debatidas durante los siglos V y IV a.n.e.: el método matemático y la ontología de los conceptos matemáticos.

Método y Ontología en Matemáticas

Respecto al método señalemos que los historiadores no concuerdan en si la demostración deductiva fue inventada por los pitagóricos y desarrollada por los filósofos eléatas o viceversa. Aunque se suele considerar que su origen remoto se halla en la retórica judicial, el documento más antiguo conservado con razonamientos deductivos es el *Poema* de Parménides de Elea, escrito hacia el año 480 a.n.e. En él se expone una cosmología basada en un principio: lo Uno, lo único que es. Mediante deducción se van probando las propiedades fundamentales de lo Uno: que no tiene principio ni fin en el tiempo, que es inmutable, inmóvil, homogéneo, continuo y limitado; se afirma además que es esférico. Esta cosmología ataca dos aspectos del pitagorismo: no acepta que haya dos principios fundamentales –lo lleno y lo vacío– reduciéndolos al primero, y rechaza su pluralismo atomista. Las demostraciones son indirectas, por reducción al absurdo. En vez de razonar a partir de la tesis que se quiere demostrar se parte de la antítesis hasta llegar a una contradicción, lo que nos permite rechazar la antítesis, por el principio de no contradicción, y afirmar la tesis, mediante el principio de tertio excluso. Pues bien, Euclides ha conservado en los libros de aritmética de los *Elementos* un conjunto de teoremas demostrados por reducción al absurdo y que son de procedencia pitagórica. Entre ellos están los teoremas acerca de los números pares e impares, que se consideran anteriores al 450 a.n.e.

Se atribuye a Hipócrates de Quíos –que usó la reducción al absurdo en su cuadratura de las lúnulas– la redacción de los primeros *Elementos,* hacia el 435 a.n.e., es decir, el primer ensayo de presentar el saber matemático partiendo de unos principios definidos. El término “elemento” significaba por entonces “aquello a partir de lo que se construye algo”, o bien “aquello simple en que se resuelve lo complejo”. Ni esos *Elementos,* ni los posteriores de León o de Teudio, se han conservado, eclipsados por los de Euclides, que hacia el año 300 a.n.e. convirtieron en canónica la forma de presentación de los conocimientos matemáticos a partir de axiomas o postulados, nociones comunes y definiciones. A partir de los *Elementos* de Hipócrates se debió ir abriendo paso la distinción temática entre construcción de figuras –característica de la matemática pitagórica– y la demostración de teoremas. Lo mismo debió ocurrir con la distinción entre análisis y síntesis. Esta se consagró como método de exposición del conocimiento matemático, de modo que partiendo de los principios establecidos se llegaba, mediante una serie de pasos, hasta la tesis a demostrar, quedando su verdad demostrada como consecuencia necesaria de los principios. El análisis, cuya invención atribuye Proclo a Hipócrates, y que sería explicado más tarde por Platón en su *República* (VI, 511 a), consiste en el camino inverso. Suponiendo resuelto el problema hay que derivar deductivamente consecuencias que nos lleven hasta los principios, que permiten luego justificar esa solución porque son condición suficiente y necesaria para ello.

La cuestión ontológica presenta más dificultades. Los primeros pitagóricos habían considerado la línea como una yuxtaposición de puntos, la superficie como una yuxtaposición de líneas y el cuerpo sólido como una yuxtaposición de superficies, siendo todos ellos –puntos, líneas, superficies y sólidos– entes materiales. Tras el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables debieron intentar soslayar el problema mediante la teoría de la fluxión: una línea es un punto que fluye hasta otro punto, etc. Pero en contra de ello, las aporías de Zenón de Elea, hacia el 450 a.n.e., trataron de demostrar que el espacio no existe, que ni los cuerpos sólidos ni las líneas son conjuntos de puntos, y que los conceptos de espacio y movimiento no sirven para la investigación de la Naturaleza, porque producen contradicciones al pensar, tanto si se los considera como continuos o como discontinuos.

Poco después, hacia el 435 a.n.e., en la Atenas de Pericles, Anaxágoras intentará refutar esas aporías estableciendo un cierto principio de continuidad, al afirmar que no existe lo más pequeño entre los más pequeño, ni lo más grande entre lo más grande, o sea, que toda magnitud puede seguir siendo dividida hacia lo mínimo de modo ilimitado o creciendo hacia lo máximo en un proceso sin fin. Anaxágoras fue uno de los filósofos –junto a Empédocles, Leucipo y Demócrito– que, para hacer compatibles la lógica parmenídea del ser y el no ser con la evidencia de los cambios en la Naturaleza, ofrecieron soluciones pluralistas para la composición de las cosas, uniendo el concepto físico de mezcla con el concepto matemático de proporción.

Las matemáticas ideales, la democracia ateniense y Platón

Después de Zenón, los matemáticos avanzan hacia la consideración de los conceptos matemáticos como referidos a entes ideales no materiales. No será sin discusión, pues hay resistencia contra esos entes matemáticos doblemente idealizados: sin materia y sin dimensión. Algunos sofistas, entre el 450 a.n.e. y el 400 a.n.e., no sólo pondrán en duda la validez de los principios matemáticos, sino también la pertinencia del propio método deductivo, y querrán hacer valer los derechos de lo empírico frente a lo teórico, del conocimiento sensible frente al conocimiento lógico. Ello se ve, por ejemplo, en la discusión de Protágoras acerca de que la tangente no toca sólo en un punto al círculo, o en los procedimientos de Antifonte y Brisón para cuadrar el círculo mediante la inscripción y circunscripción de polígonos de un número cada vez mayor de lados, o incluso, en las comparación de las superficies de corte de un cono por un plano, por el atomista Demócrito.

La implantación de la democracia en Atenas, hacia mediados del siglo V a.n.e., trajo consigo el debate público acerca de la educación. Algunos sofistas rechazaron que se eneñara matemáticas por su inutilidad práctica; otros filósofos, como Aristipo, las recusarán porque con ellas no se aprende ética, no ayudan a formar ciudadanos virtuosos. Esta época ve consagrarse como método de producción del saber el diálogo polémico que busca refutar a los demás interlocutores para triunfar imponiendo el discurso propio.

Platón (427-347 a.n.e.) inventa la escritura filosófica imaginando ese tipo de diálogo –aunque con una finalidad retórica de consenso– entre Sócrates y sus interlocutores. Entre ellos, algunos sofistas, a quienes Platón –el gran paladín de la matemática idealizada– execrará acusándolos de confundir los números abstractos o las figuras geométricas ideales con las apariencias físicas sensibles; pero como ya hemos expresado, no se trata de una confusión, sino de una opción diferente a la de Platón. A pesar del vuelo místico de las matemáticas platónicas, recordemos que D. H. Fowler, en su obra *Mathematics in Plato's Academy* ha demostrado de manera convincente la importancia fundamental de la antiféresis o sustracción mutua, método de origen empírico para determinar la relación entre dos magnitudes, tanto en la Academia como en matemáticos anteriores y posteriores. Platón funda la Academia en el año 387 a.n.e. y en ella trabajarán matemáticos de renombre como Teeteto, a quien se atribuye buena parte de los libros X y XIII de los *Elementos* de Euclides, y Eudoxo, quien con su teoría de las proporciones y su método de exhaución, recogidos en los libros V y XII de los *Elementos,* solucionará el tratamiento de las magnitudes inconmensurables. Además, Platón, en sus viajes a Sicilia, recibirá la influencia de importantes matemáticos pitagóricos, a través de los escritos cosmológicos de Filolao y los trabajos de Arquitas de Tarento.

La piedra angular de la filosofía platónica es su teoría de las Formas o Ideas. Con ella pretende explicar la existencia de los seres naturales como copias de arquetipos únicos externos a la Naturaleza. Cada conjunto de seres naturales semejantes, que podemos conocer mediante los sentidos y denominamos con un mismo concepto, deben su existencia y sus caraterísticas comunes a su Forma arquetipo, conocida exclusivamente mediante la razón. Las Formas mencionadas son: formas de especies naturales, formas de virtudes morales, formas de conceptos matemáticos. En *República,* donde plantea esa división entre seres sensibles e inteligibles, Platón expone que estos últimos son de dos tipos: las Formas y los entes matemáticos, como números y figuras. Esto da lugar a dos tipos de conocimiento epistémico: el saber noético o dialéctica, que consiste en la intelección de las Formas, y las ciencias matemáticas, que usan el razonamiento discursivo. La superioridad del primero sobre el segundo estriba en que demuestra todos sus principios, mientras que las matemáticas se fundan en postulados indemostrables. Para Platón, los entes matemáticos juegan el papel de intermediarios entre las Formas y los seres naturales.

Pero en escritos posteriores se irá diluyendo esa separación entre Formas y entidades matemáticas, pues usará cada vez más conceptos matemáticos para tratar de conseguir su objetivo fundamental: presentar una jerarquización de los principios de todo lo que existe. Para ello usa el método de generalización y división. Veamos algunos claros ejemplos. En *República* la Forma suprema es el Bien, pero en *Las Leyes,* su obra postrera, será la de Unidad. Cuando presenta su cosmología en el *Timeo,* adjudica a las partículas que componen los cuatro elementos físicos –tierra, agua, aire y fuego– formas de poliedros regulares –hexaedro, icosaedro, octaedro y tetraedro. Curiosamente su atomismo geométrico se basa en una combinatoria de las superficies de los poliedros, no de sus volúmenes. Ahí mismo distingue tres géneros de ser: las Formas eternas inmutables, el Espacio –ser inteligible, receptáculo de todo lo que nace y perece– y los seres naturales. Los principios primeros que explican la existencia de los seres naturales son la Unidad y la Díada –díada que es lo Grande y lo Pequeño. Asimismo en *El Sofista* presenta como géneros supremos cinco: el ser, el reposo y el movimiento, lo igual y lo desigual. En el *Teeteto* se afirma que tras percibir las sensaciones el alma compara y distingue lo semejante y lo diferente: esa reflexión constituye la ciencia. Convencido de que las matemáticas expresan la necesidad de la verdad, Platón llegará a decir en *Las Leyes* que *"los dioses no se resisten ni luchan contra las matemáticas"*. Hay indicios de que pudo elaborar una teoría de los números ideales, que no llegó a escribir, donde asociaba las Formas fundamentales a los números de la Década, siguiendo una tradición pitagórica.

De modo consecuente, Platón propone en *República* que los jóvenes destinados a futuros gobernantes de la polis ideal estudien, entre los 20 y los 30 años, las cinco ciencias matemáticas, en orden creciente de complejidad: aritmética, geometría, estereometría, astronomía y armonía. Luego habrán de estudiar dialéctica cinco años. Según Isócrates, los platónicos usaban las matemáticas para entrenarse en el conocimiento abstracto y en la técnica deductiva. Todas esas ciencias admiten un uso teórico –que Platón considera superior– y un uso práctico, por su utilidad para el comercio, el arte de la guerra, la navegación, la medicina, etc. Por ello criticará a Arquitas, por usar las matemáticas para la mecánica, y al propio Eudoxo, por no limitarse a la astronomía matemática.

Es muy probable que fuera a petición de Platón por lo que Eudoxo, hacia el 355 a.n.e., elaboró el primer modelo astronómico matemático del movimiento del Sol, la Luna, los planetas y la esfera de las estrellas fijas: la teoría de las esferas homocéntricas. Esto constituye toda una novedad, pues la palabra "planeta" significa "errante" y Eudoxo les va a poner a esos vagabundos del espacio una camisa de fuerza matemática. Esta conversión de los cielos en el reino de la regularidad permitirá luego a Aristóteles separar la zona supralunar –incorruptible e inmutable– de la zona sublunar –corruptible y cambiante.

Aunque Platón no fuera un matemático de relieve, en sus obras toma una posición clara respecto a la cuestión ontológica. Los números y las figuras son entidades ideales, inteligibles, eternas, inmutables, independientes y separadas de los seres naturales. Niega entidad a los puntos, a los que considera simplemente extremos de líneas, y afirma que las entidades ideales son la línea, la superficie y el sólido. Respecto a los números, según fue envejeciendo, se fue haciendo más pitagórico. En el *Filebo* dirá que el Número es el principio intermedio entre lo Uno y lo Ilimitado. Aristóteles señala que Platón distinguía tres tipos de números: los sensibles, que cuentan las cosas, los matemáticos, conjuntos de mónadas o unidades, y los ideales, como la díada o la tríada, siendo cada uno de estos últimos una especie diferente.

En definitiva, con Platón las matemáticas se reafirman en la dimensión cosmológica y sagrada adquirida con los pitagóricos, yendo incluso "hyperouranos". Los números y figuras son los principios eternos que gobiernan la Naturaleza cambiante y mortal. Las matemáticas expresan el orden de la necesidad, la verdad sobre el mundo, comprensible sólo por el alma racional, no por el cuerpo sensible. Al final de su vida llega a proponer como religión popular de la polis racional ideal una teología astral que se funda en la astronomía matemática.

Las matemáticas y Aristóteles

No es extraña, entonces, la queja de Aristóteles:

> Las matemáticas se han convertido hoy en filosofía, y en toda la filosofía, por más que se diga que su estudio no debe hacerse sino en vista de otras cosas.

El estagirita va a realizar una nueva clasificación de las ciencias. Las ciencias teóricas son las de valor superior, y en orden decreciente de importancia son: filosofía primera, matemáticas y física. Luego vienen las ciencias prácticas, como ética, política, economía, retórica. Finalmente las ciencias productivas, como medicina, navegación, arquitectura, etc. Enumeraré algunos de los presupuestos que sostienen esa jerarquía. Las ciencias de los entes inteligibles son superiores a las de los entes materiales. Las ciencias que parten de principios son más rigurosas que las que no lo hacen. La aritmética es más exacta que la geometría porque se basa en menos principios.

En los *Analíticos Primeros*, donde explica su lógica silogística, y en *los Analíticos Segundos*, donde expone su teoría de la demostración y la definición, Aristóteles va a establecer el canon para el conocimiento científico. La silogística tuvo poco éxito como método de exposición o de justificación del conocimiento, a pesar de su rigor lógico; en cambio, su epistemología tuvo mayor influencia, aunque ni siquiera el propio autor se atuvo demasiado a ella en sus obras, usando con frecuencia procedimientos descriptivos y argumentos retóricos que no se atienen estrictamente al método proclamado. Demostrar es razonar a partir de lo necesario, no simplemente a partir de lo verdadero. Toda ciencia demostrativa ha de constar de principios indemostrables –propios o comunes–, aserciones de existencia –hipótesis– y definiciones. Para defender las ciencias Aristóteles refuta tanto a quienes niegan certeza al conocimiento por la supuesta necesidad lógica de un retroceso ad infinitum en la justificación de los principios como a quienes intentan demostrarlos de modo circular. Por ello rechaza la posición platónica de que la dialéctica demuestra todos sus principios, aduciendo –en contra de un proceder típico de su maestro– que una definición no sirve como demostración, pues hay que probar que corresponde a una realidad.

Cada ciencia tiene su propio objeto de estudio y su propio método. Por eso no se puede demostrar nada saltando de una ciencia a otra

> excepto [aplicando] los principios geométricos a las cuestiones mecánicas u ópticas, y los principios aritméticos a las armónicas (An. Pos., 1076 a).

Y continúa diciendo

> No debe exigirse rigor matemático sino para objetos inmateriales. Y así el método matemático no es el de la física, porque la materia es el fundamento de la Naturaleza.

Las demostraciones producen verdades eternas; así lo expresa con un ejemplo:

> La conmensurabilidad entre lado y diagonal no es en el tiempo, ni tampoco la inconmensurabilidad; una por no ser nunca, la otra por ser siempre.

Aristóteles es un pensador finalista: todo se produce en vistas a una finalidad que es el Bien. El conocimiento es una de las formas del bien. Aplicado esto a las matemáticas significa que en ellas todo conocimiento tiene causa formal y causa final. La primera consiste en que todo conocimiento nuevo se produce a partir de conocimientos preexistentes; la segunda estriba en el teorema, prueba o construcción, buscado por el razonamiento matemático.

Respecto al tema ontológico, para Aristóteles los principios matemáticos ni son principios internos de los cuerpos físicos –como sostenían los pitagóricos– ni son principios externos –como sostenía Platón. Tampoco los considera sustancias, o sea, algo capaz de subsistir por sí mismo. Son para él formas abstraídas de los cuerpos físicos. Por ello prefiere definir los puntos, líneas y superficies de modo relativo: como límites o divisiones. Hoy nos resulta chocante a simple vista su definición del lugar como superficie envolvente de un cuerpo. Para comprenderla hay que darse cuenta de que Aristóteles está intentando soslayar las discusiones ontológicas sobre el espacio, provenientes de las teorías de Parménides y Zenón. No quiere mezclar con su física la idea matemática de un espacio homogéneo, sin cualidades. Su espacio es pleno, heterogéneo y cualitativo. Siguiendo la estela eleática en la física aristotélica no existe el vacío, cada cuerpo tiene su lugar natural y el conjunto de los lugares ocupa plenamente el espacio.

En diversos puntos de su obra Aristóteles intenta refutar las paradojas de Zenón para afianzar los conceptos matemáticos fundamentales. Para ello introducirá la distinción entre infinito actual e infinito potencial. No hay infinito físico ni matemático actual, es decir, como realización efectiva, como algo presente. En cambio, tanto la magnitud como los números son infinitos potenciales, aunque con simetría inversa. Los números son potencialmente infinitos hacia lo grande, pero hacia lo pequeño tienen su límite en la Unidad. Las magnitudes son potencialmente infinitas hacia lo pequeño, pues al ser continuas pueen ser divididas sin fin, pero tienen un límite hacia lo grande: la esfera de las estrellas fijas, donde acaba el universo. De ese modo representa Aristóteles lo matemático en el marco de lo físico; si bien las matemáticas tienen la prioridad lógica, a la física corresponde la prioridad ontológica.

Respecto a los números aceptará la idea pitagórica de que la Unidad es el principio de los números, justificándolo porque contar implica siempre disponer de una unidad de cuenta. Por tanto, para él la Unidad no es un principio común de los cuerpos físicos –como era para los pitagóricos– sino su medida. Euclides recogerá más tarde esta idea del número como medida en sus definiciones del libro VII de los *Elementos.*

Digamos en conclusión que en el camino del consenso matemático en torno a principios y métodos Aristóteles representa un paso adelante: la retórica persuasiva de los diálogos de Platón se ve sustituida por una lógica expositiva basada en principios, definiciones y demostraciones, que quiere convencer sin dejar lugar a dudas. Con la mirada de un profesional del saber quiere poner orden en el abanico de las ciencias. La lógica será el instrumento necesario para todas las ciencias. Estas serán clasificadas y jerarquizadas. Cada una tendrá que especificar sus principios propios y los que comparte con otras ciencias. Se trata de evitar confusiones de método en el tratamiento de los objetos de investigación y de evitar incoherencias en el método de exposición. A pesar de que hoy los practicantes de las ciencias podamos reconocernos en esta mirada técnica más que en la de sus predecesores, Aristóteles conserva respecto a las matemáticas algunos ideales típicos de la cultura griega, como la perspectiva ética y estética, que no aparecen con mucha frecuencia en la filosofía actual de las matemáticas. Por ejemplo, en su *Metafísica* dirá que

> incurren en error los que pretenden que las ciencias matemáticas no hablan ni de lo bello ni del bien. De lo bello es de lo que principalmente hablan y lo bello es lo que demuestran.

Esta belleza reside para él en el orden, la simetría, la limitación y la proporción.

La ciencia helenística y los "Elementos" de Euclides

Discuten los historiadores de la ciencia cuál haya podido ser la influencia de la Academia y el Liceo sobre el desarrollo de la ciencia helenística. Señalemos ante todo que la oposición entre Platón y Aristóteles no fue tan marcada en el mundo antiguo como lo será en Europa a partir de la filosofía escolástica de los franciscanos y los dominicos, que enfrentarán versiones cristianizadas de ambos. Pero basta estudiar las culturas bizantina y árabe, correspondientes a nuestra Edad Media, para ver qué estrechamente cohabitan maestro y discípulo. Los Antiguos verán, en general, la obra de Aristóteles como una continuidad con variaciones de la obra de Platón.

En lo que respecta a las matemáticas es obligado hablar de Euclides, que entre el 300 a.n.e. y el 280 a.n.e., compiló sus *Elementos* en Alejandría. Esta obra no pretende ser ni un tratado exhaustivo sobre las matemáticas anteriores, ni siquiera un resumen de los hallazgos más valiosos. Los *Elementos* es una obra redactada con intención pedagógica, como texto para el estudio de las matemáticas. Por ello Euclides tiene que combinar dos perspectivas:

– Conservar partes de las tradiciones y escuelas anteriores, como la pitagórica, la de Quíos, la platónica; a veces manteniendo las demostraciones y construcciones originales, a veces añadiendo pruebas más acordes con su sistema de exposición; también, desarrollando áreas iniciadas por otros, como la teoría de las magnitudes irracionales de Eudoxo o la estereometría de Teeteto.
– Seguir las exigencias metodológicas de Aristóteles para la elaboración del conocimiento científico. Por ello se apoya en un breve conjunto de axiomas y nociones comunes, así como en un gran número de definiciones, referidas a entidades cuya existencia irá siendo probada.

Hay que recordar que la influencia de Aristóteles será notable entre los estudiosos alejandrinos, y más desde que Estratón de Lampsaco, tercer director del Liceo, traslada al Museo la biblioteca del estagirita, así como sus colecciones zoológicas y botánicas. Pero también hay platonismo en Euclides. El argumento clásico es que los *Elementos* acaban presentando la construcción de los poliedros regulares como homenaje a la cosmología de Platón en el *Timeo.* Es cierto que el argumento no es contundente, porque ese final puede deberse simplemente al orden de exposición, que avanza desde lo simple a lo complejo. Pero difícilmente en esa época alguien interesado por las matemáticas podía sustraerse al influjo de Platón, y la mera empresa de elaborar un manual sistemático para la enseñanza de las matemáticas se inserta en la política cultural platónica. Los *Elementos* es una obra que conecta perfectamente con la política cultural de los Ptolomeos, ejercida desde el Museo y la Biblioteca, fundados hacia el 285 a.n.e., consistente en recopilar, seleccionar y sintetizar todo el saber adquirido por la civilización helena, para su enseñanza y difusión. Es posible que los *Elementos* hayan determinado el canon de la ciencia alejandrina, que pasando por la *Syntaxis Mécánica* de Filón de Bizancio (circa 225 a.n.e.) y los tratados de Herón (s. I d.n.e.) alcanza hasta la *Syntaxis astronómica* (s. II d.n.e.) de Claudio Ptolomeo, el famoso *Almagesto.*

Arquímedes, cumbre de las matemáticas griegas

Más difícil resulta a los historiadores pronunciarse sobre el platonismo o aristotelismo de Arquímedes de Siracusa (285-213 a.n.e.). Este dilema se halla conectado a dos cuestiones relacionadas entre sí y que se convertirán en un tópico obligado a partir de los autores del siglo I d.n.e., como Herón de Alejandría, Carpos de Antioquía y Gémino, a saber, cuás es la conexión entre geometría y mecánica, y cuál es el papel de Arquímedes en la historia de la mecánica. El historiador latino Plutarco de Queronea lo presenta en su *Vida de Marcelo* (circa 100 d.n.e.) como un platónico riguroso, pero es una visión idealizada. Otros autores lo han visto como el matemático ingeniero, más en consonancia con el aristotelismo.

En la mayoría de sus obras Arquímedes no parece seguir el canon científico de Aristóteles o Euclides, aunque podemos presumir con bastante seguridad que conoció las obras de ambos relativas al tema. Sus obras parecen tener un formato distinto, son una especie de informes monográficos sobre sus investigaciones. En *El Método*, dirigido a su amigo Eratóstenes, obra perdida durante siglos y recuperada por Heiberg en 1903, sigue la costumbre, iniciada por los estudiosos alejandrinos, de presentar los tratados científicos con una carta-prólogo donde el autor toma posición respecto a los asuntos allí expuestos mediante referencias a autores más antiguos, predecesores en esos temas. Sabemos que le gustaba enviar a los matemáticos de Alejandría problemas a resolver, enunciados sin pruebas e incluso enunciados falsos, quizá como acicate de amigos y medio de discriminar entre buenos y malos matemáticos. Como él mismo dice:

> Es conveniente que los matemáticos descubran las cosas por sí mismos.

Desde la recuperación de *El Método* los historiadores de la ciencia han reactivado la vieja cuestión de cuál era la visión de Arquímedes sobre la relación entre geometría y mecánica. ¿Es la mecánica un simple método heurístico para resolver problemas matemáticos que luego debemos probar mediante la geometría? ¿Consideraba igual de valiosas las demostraciones mecánicas, donde hace uso de equilibrios y centros de peso, que las demostraciones geométricas al modo euclídeo? En su célebre libro sobre Arquímedes defiende Dijkterhuis que las objeciones que el siracusano podía plantear respecto a sus propios trabajos mecánicos no se debían a las consideraciones mecánicas, a la mezcla de mecánica y geometría, sino al uso de indivisibles. ¿Ahora bien, necesitaba Arquímedes probar mediante la geometría lo que ya había probado mediante la mecánica para asegurarse de la certeza de sus resultados o sólo para que fueran aceptados?

Ya hemos visto anteriormente cómo en los *Analíticos Segundos* Aristóteles considera apropiado el uso de los principios geométricos en la mecánica, considerando esta ciencia subordinada a la primera. Todo descubrimiento por la vía mecánica, aunque fuera considerado útil, probable o razonable, debía ser validado por la vía geométrica como garantía de verdad: sólo eso podía ser llamado demostración. Aunque lo importante no es sólo la obtención de nuevos resultados, sino que además el método mecánico proporciona pistas adecuadas para conseguir la demostración geométrica, indicando por dónde hay que avanzar. Cuando Arquímedes escribe *El Método* está convencido de que el método mecánico conducirá a nuevos descubrimientos en el futuro, por él mismo y por otros matemáticos que lo adopten.

Por el contrario, el uso de indivisibles era un tema problemático desde que Zenón había expuesto sus aporías, que ni el propio Aristóteles, pese a sus esfuerzos, había logrado conjurar. Aunque Arquímedes no tuviera reparo en usar los indivisibles como método heurístico debía ser consciente de la dificultad de que los resultados obtenidos con ese procedimiento fuesen aceptados por la comunidad matemática, en particular por la alejandrina, y de hecho no parece haber tenido ningún interés en justificar epistemológicamente el uso de indivisibles, emulando y distanciándose de Aristóteles.

En definitiva, en Arquímedes podemos encontrar rasgos euclídeos, como el hecho de empezar su obra *Sobre el equilibrio de planos* introduciendo una serie de postulados; rasgos aristotélicos, en lo que atañe, por ejemplo, a las relaciones entre geometría y mecánica; rasgos platónicos y pitagóricos, como la creencia en que las matemáticas constituyen los principios de la Naturaleza; e incluso podemos afirmar que comparte con Tales la convicción de que las figuras geométricas tienen propiedades naturales inherentes. Con esto quiero decir que aunque Arquímedes sea heredero de toda la matemática griega, no creo que pueda ser adscrito a ninguna tendencia o escuela determinada.

Me imagino a Arquímedes como alguien que fue educado en las matemáticas desde la infancia, por su padre el astrónomo Fidias, y que ya para siempre proyectó esa mirada matemática con curiosidad sobre todas las facetas del mundo que le rodeaba. Así parece indicarlo la enorme variedad de sus campos de trabajo y su posición marginal respecto a los sistemas epistemológicos dominantes. Era un matemático vocacional mucho más interesado en resolver problemas que en justificar sus resultados. Sabemos que consideró que el sistema heliocéntrico defendido por su contemporáneo Aristarco de Samos podía ser verdadero; ello nos da una prueba más del estilo abierto de Arquímedes, capaz de enfrentar tradiciones arraigadas y arriesgarse en la búsqueda de nuevas vías para el conocimiento.

Arquímedes en Iberia

Para terminar quiero desmentir una falsa noticia sobre la posible presencia de Arquímedes en la Península Ibérica, noticia que se remonta a Leonardo da Vinci. A principios del siglo XX el estudioso italiano Antonio Favaro exponía:

> Al tempo in cui Torelli scriveva non era ancor noto un passo di Leonardo da Vinci, il quale nota d'aver "ritrovato nelle storie delli spagnioli" che Archimede Siracusano si trovava presso Eclideride, re dei Cilodastri, nel tempo in cui erano in guerra con gl'inglesi, e, combattendose sul mare, suggerí certa disposizione da darse all'armatura delle navi per la quale poteva lanciarsi facilmente pece infuocata che obbligava il nemico ad abbandonare il combattimento e metteva in grava pericolo i vascelli.
>
> Antonio Favaro, *Archimede*, 2ª ed., 1923]

La obra mencionada de Torelli es *Archimedis quae supersunt omnia cum Eutocii Ascalonitae commentariis*, Oxford, 1792**.** Parece, por tanto, que en algún momento posterior a la obra de Torelli y anterior a la de Favaro alguien reparó en una cita sobre Arquímedes en un manuscrito de Leonardo. En su famosa obra de 1956 sobre el matemático de Siracusa todavía el historiador de las matemáticas Dijkterhuis repetía:

> According to a statement in the biography with which J. Torelli introduces his great Archimedes edition Archimedes is said after his return from Egypt to have visited other countries as well. There is a particular story about a voyage to Spain in a note by Leonardo da Vinci, in which the latter mentions that he has read in a history of the Spaniards that the Syracusan Archimedes aided Ecliderides, King of the Cilodastri, in a maritime war against the English through the invention of a device for spouting burning pitch on the ships of his opponents. It is, however, altogether unknown in what work Leonardo can have read this, and authorities on spanish History ignore both King Ecliderides and the people of Cilodastri.
> [Dijksterhuis, *Archimedes*, 1956]

Y en la edición catalana de *El Método* su traductor y prologuista P. G. Urbaneja señala:

> Hi ha un testimoni, no comprovat, de Leonardo da Vinci, que assegura que Arquimedes va estar a la península Ibérica, cridat per Eclidèrides, rei dels cilodastres, a qui va ajudar en els seus combats navals.
> [*Mètode*, 1997, prólogo de González Urbaneja]

Es lógico que nadie pudiera informar a los antedichos autores sobre el rey Ecliderides, ni sobre el pueblo de los cilodastros, porque nunca existieron ni uno ni otro. El tal Ecliderides no es otro que El Cide Ruy Díez, a quien separan de Arquímedes trece siglos. Según mi hipótesis, esa confusión se remonta a la época en que Leonardo fue ingeniero general de fortificaciones del ejército de César Borgia, entre el verano de 1502 y la primavera de 1503. Los Borgia eran una familia originaria del reino de Valencia, territorio que había sido conquistado a finales del siglo XI por El Cid Ruy Díez de Vivar. Allí disponían de amplias posesiones y ostentaban un título nobiliario: el ducado de Gandía. Leonardo debió leer en algún libro de la biblioteca de los Borgia la atribución al Cid de un ataque con catapultas contra naves enemigas. Cuando tiempo más tarde recordó ese suceso, probablemente a propósito del tema de los ingenios mecánicos, Leonardo ya no recordaba el nombre con precisión y no debía tener acceso a su fuente escrita original. De ahí que al citar de memoria convirtiese a El Cid Ruy Díez en Ecliderides. La cita de Leonardo debe hallarse en alguno de los diarios donde anotaba asuntos de su interés, de mecánica entre otros. ¿En qué obra pudo haber leído Leonardo esa referencia al Cid? Entre las obras manuscritas posibles, anteriores a la imprenta, habría que citar las siguientes:

- *Historia de Valencia,* del autor árabe Ben Alcama, escrita hacia el año 1100 y hoy perdida.
- *Historia Roderici,* escrita hacia el 1200.
- *Chronicon Mundi,* del obispo Lucas de Tuy, que data de 1236 y tuvo una gran influencia en los historiadores del círculo de Alfonso X el Sabio.
- *De rebus Hispaniae,* de Rodrigo Jiménez de Toledo, redactada en 1243.
- *Crónica de Castilla,* hacia 1300.
- *Crónica particular del Cid,* hacia 1400.

Entre los libros impresos, el más probable sería la *Crónica del Cid Ruy Díaz,* editado en Sevilla en 1498. Entre los manuscritos citados considero que el más probable es el de Jiménez de Toledo, por ser su autor una eminencia de la Iglesia, y porque su obra tuvo una gran difusión hasta el siglo XVI.

Si el hecho histórico atribuido al Cid es cierto debería referirse al ataque por mar que tropas de Alfonso VI de Castilla, aliado con Génova y Pisa, dirige contra el puerto de Valencia en el año 1092. Recordemos que Alfonso VI es el rey de Castilla a quien se enfrentó el Cid, según queda recogido en el *Cantar del Mío Cid,* texto fundacional de la literatura española. El uso de catapultas contra los navíos en esa época y más tarde está bien documentado. En 1238 las tropas de Jaime I las usaron para conquistar Valencia, enfrentándose a las naves enviadas por Abu Zakkariya, rey de Túnez, en auxilio de Zayyan, rey de Valencia. Por las misma época en que Leonardo se relacionaba con los Borgia el famoso pirata berberisco Barbarroja saqueó Cullera (1503), suceso que debió ser conocido y comentado por los Borgia.

Respecto a los Cilodastros sólo puedo hacer conjeturas. Ni siquiera podemos saber por ahora si el texto en que se basa la confusión de Leonardo estaba escrito en latín o en castellano. Sospecho que equivocó el sentido de una frase que juntaba dos términos. Uno podía ser cide o cidello, o bien cielo o caelo; el otro, astro rey o astris rex. De modo que, por ejemplo, una frase como “del cielo astro rey” pudo ser interpretada –y transformada en la memoria– como “rey de los cilodastros”. Téngase en cuenta las dificultades de lectura de los manuscritos, las erratas frecuentes de los amanuenses, y para el caso de que fuera un texto impreso, el hecho de que aún no había una tipografía estándar, además de las erratas.

En cualquier caso, volver a localizar el diario de Leonardo donde consta la cita sobre Arquímedes será mucho más fácil que averiguar el texto de donde la sacó. Así pues, respecto al tema de la posible presencia del genio siracusano en Iberia, debemos contentarnos con recordar que en la época de da Vinci hacía tiempo que había llegado a la Península Ibérica, de manos de los matemáticos árabes, el espíritu de Arquímedes.

Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia

Bibliografia:

– Las citas de obras de Platón y Aristóteles corresponden a las traducciones al español publicadas en Editorial Gredos, Madrid.
– Las citas de Arquímedes corresponden a la edición en castellano de *El Método,* Alianza Ed., con prólogo de Luis Vega, y a la edición catalana *Mètode,* de la Fundación Bernat Metge, con prólogo de Pedro G. Urbaneja.
– Brunschvicg, L: *Les étapes de la philosophie mathémathique,* A. Blanchard.
– Burkert, W.: *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism,* Harvard Univ. Press, 1972.
– Burnyeat, M.F.: *Plato on Why Mathematics is Good for the Soul,* en el libro *Mathematics and Necessity,* Oxford University Press, 2000.
– Caveing, M.: *Zénon d'Élée,* Vrin, 1982.
– Caveing, M.: *Introduction générale aux Eléments d'Euclide,* en la obra *Euclide d'Alexandrie: Les Eléments,* vol. 1, P.U.F. 1990.
– Caveing, M.: *La figure et le nombre: Recherches sur les premières mathématiques des Grecs,* Presses Universitaires de Septentrion, 1997.
– Dijksterhuis, E.J.: *Archimedes,* Princeton University Press, 1987.
– Fowler, D.H. – *The Mathematics of Plato's Academy*, Clarendon Press 1987.
– Frajese, A.: *Attraverso la storia della matematica*, Le Monnier, 1977.
– Gardies, J.-L.: *Le raisonnement par l'absurde,* P.U.F. 1991.
– Gardies, J.-L. - *L'organisation de mathématiques grecques de Théétète à Archimède,* Vrin 1997.
– Heath, Th.: *Mathematics in Aristotle,* Thoemmes Press., 1996.
– Kirk, G. S. y Raven, J.E.: *The Presocratic Philosophers,* Cambridge Univ. Press, 1966.
– Klein, J.: *Greek Mathematical Thought and the Origins of Algebra*, M.I.T. Press, 1968.
– Knorr, W.: *The Evolution of the Euclidean Elements*, Reidel, 1975.
– Knorr, W.: *Infinity and Continuity: The Interaction of Mathematics and Philosophy in the Antiquity,* en Kretzman, W.: *Infinity and Continuity in Ancient and Medieval Thought,* Cornell University Press, 1982.
– Mueller, I.: *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements,* M.I.T. Press, 1981.
– Serres, M.: *Les origines de la Géometrie,* Flammarion, 1993.
– Spengler, O.: *La decadencia de Occidente,* Espasa Calpe, 1923
– Szabó, À.: *The Beginnings of Greek Mathematics,* Reidel, 1976.
– Tannery, P.: *Pour l'histoire de la science hellène,* Jacques Gabay 1990.
– Van der Waerden, B.L.: *Awakening Science,* Noordhoff, 1956.