UN NUEVO ROL PARA LAS DEFINICIONES

Maruxa Armijo

Una dicha más grande
que imaginar es entender
Borges

Resumen. La *Giornata Quinta* es un texto tardío de Galileo que, de acuerdo con el proyecto de su autor, debía formar parte de su "libro de las nuevas ciencias". En este escrito Galileo rechaza la definición más prestigiada de la matemática griega (la definición quinta del libro V de los *Elementos de Geometría* de Euclides) y busca substituirla.

A Galileo -quien en el proceso de creación de la nueva ciencia se servirá del contenido del Libro V para formular el nuevo lenguaje de la naturaleza- la celebérrima definición 5 del Libro V de Euclides le pareció una definición defectuosa: *Parmi questo di Euclide più tosto un Teorema da dimostrarsi, che una definitione da premettersi.*

En un intento por dar un paso en la comprensión de cómo una cultura deja de pensar como lo ha hecho hasta entonces y se pone a pensar en otra cosa -o en la misma cosa pero de manera diferente-, esta comunicación estará centrada en dar una respuesta a la pregunta: ¿qué son las definiciones "para admitirse" de Galileo? En el camino nos enteraremos de qué le falta o qué le sobra a "aquello que Euclides mete como definición" para obtener -en opinión del primer físico moderno- pase de admisión a la nueva ciencia.

En el transcurso de los últimos tres meses del año de 1641, completamente ciego y en medio de severos dolores renales que presagiaban su inminente fin, Galileo dicta a su discípulo Evangelista Torricelli la *Quinta Jornada, para añadirse al libro de las Nuevas Ciencias.*[1]

"El libro de las nuevas ciencias" es el libro más técnico de Galileo, el más "riguroso", el que establece la moderna ciencia de la cinemática y el que

[1] *Giornata Quinta, da aggiungersi nel libro delle Nuove Scienze.*

fungirá de cimiento para que los científicos del XVII construyan una nueva física. Es también, en opinión del propio autor, su obra maestra:

> [...] porque la obra que está ya por salir de la imprenta contiene dos ciencias completas del todo novísimas y demostradas desde sus primeros principios y elementos [...], y porque abre las puertas para ingresar a campos vastísimos llenos de infinitas y admirables conclusiones, poca es la estima que tengo por todo aquello que hasta aquí ha visto el mundo de mí en comparación con esto que resta por verse.[2]

Opinión que ha sido confirmada por la posteridad: hoy por hoy, la obra científica más importante de Galileo es su libro de las nuevas ciencias. La matemática de la que disponía –y de la que de hecho se vale– para demostrar algunas de las "infinitas y admirables conclusiones" era la teoría de las proporciones de Eudoxo, contenida fundamentalmente en los libros V y VI de los *Elementos de Geometría* de Euclides. Pero lo importante, lo valioso, lo novedoso en el libro de Galileo no son las matemáticas que utiliza sino el programa en el que va a aplicarlas:

> *De subiecto vetustissimo, novissimam promovemus scientam:*
> Sobre un tema muy antiguo, damos inicio a una ciencia muy nueva.

Con esta escultórica frase da comienza el *De motu locali*, su tratado del movimiento, expuesto en las jornadas tercera y cuarta de su libro de las nuevas ciencias publicado en 1638 con un título impuesto por el editor que a Nuestro Autor parecióle "vulgar, por no decir plebeyo": *Discursos y demostraciones matemáticas en torno a dos nuevas ciencias concernientes a la mecánica y a los movimientos locales*:[3]

> Estoy sorprendido y muy molesto por la libertad que se ha tomado el señor Elzevirio de transformar el título de mi libro reduciéndolo de noble, como merecía ser, a demasiado vulgar, por no decir plebeyo. [...] Muy probablemente alguien en Amsterdam que me tiene poco afecto le echó la mano en la intitulación y V.S. Ilustrísima, como verdadero y sincero amigo mío, bien haría en procurar la reintegración del título original.[4]

En el proyecto de Galileo, la *Giornata Quinta* debía anexarse a las cuatro jornadas de su libro de las nuevas ciencias pero, no obstante la voluntad expresa de su autor, la mayoría de las ediciones críticas de los *Discorsi* prefieren suprimir la *giornata quinta*. El texto no ha sido aún traducido al español, y la primera –y única– traducción al inglés es la de Stillman Drake.[5]

---

[2] Carta de Galileo a Elia Diodati del 4 de julio 1637 [*Carteggio*, XVII, 126].

[3] *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla Mecanica & i Movimenti locali.*

[4] Carta de Galileo a Elia Diodati fechada en agosto de 1637 [*Carteggio*, XVII, 370].

[5] *Galileo at Work*, p. 422-437.

Muerto el maestro, Torricelli envía el original autógrafo de la *Giornata Quinta* al príncipe Leopoldo pero antes, "el último discípulo de Galileo" –como Vincenzio Viviani se llamaba a sí mismo– hace una copia para él. El texto de Galileo permaneció manuscrito hasta el año de 1674, cuando Viviani decide publicarlo, junto con una muy personal reelaboración de la doctrina de su maestro, en el *Quinto Libro degli Elementi di Euclide, ovvero sciencia universale delle proporzioni*. El tratado de Viviani y el escrito de Galileo fueron de nuevo publicados conjuntamente en una afortunada edición de los *Elementos* de Euclides preparada por Viviani: *Elementi piani e solidi d'Euclidi*. Esta edición aparece por primera vez en 1690 en Florencia pero fue reimpresa en numerosas ocasiones (1718, 1734, 1748, 1749) a lo largo del siglo XVIII.

El escrito de Galileo está enteramente dedicado a revisar, criticar y corregir dos muy importantes definiciones de los *Elementos de Geometría* de Euclides. Una es la definición de proporción compuesta, una definición espuria al principio del libro VI de los *Elementos* que Galileo no tiene ningún problema en sustituir por otra más apropiada (y, de hecho, más apegada al carácter general del tratado). Mucho más significativo y más controvertido es el otro cuestionamiento: el que Galileo hace a la celebérrima definición eudoxiana de magnitudes proporcionales, definición quinta del libro V de los *Elementos* de Euclides. Aquí no se trata ya de una operación más de limpieza sobre un texto que anteriormente había tenido intervenciones similares y no siempre positivas: la de sustituir un pasaje interpolado y de cualquier modo incongruente por otro mejor. Por el contrario, la definición del libro de Euclides que Galileo critica y que seguidamente modifica ha sido muchas veces señalada como una de las más profundas de la teoría eudoxiana de la proporción, "casi una anticipación" de la moderna teoría de los números reales.[6]

De lo anterior se podría inferir que, al menos desde el punto de vista matemático, las críticas de Galileo a las definiciones del libro de Euclides resultan, la una trivial y la otra desacertada. He aquí el principal motivo de

---

[6] "*The theory of real numbers constructed by the two great German mathematicians Karl Theodor Weierstrass and Richard Dedekind is a modern version of Eudoxus's treatment of incommensurables in Euclid's Book V*" (René Frédéric Thom); "*La definizione di grandezze proporzionali degli* Elementi *è quasi un'anticipazione della teoria moderna dei numeri reali*" (Lombardo Radice); "*Eudoxus' definition of equal ratios -No. 5 in Book V of Euclid's Elements- is the principal source of the modern view of irrational numbers; he demonstrated that irrational numbers could be defined by means of approximations of rational numbers*" (Richard Paul Aulie); "*The greatness of Eudoxe's theory itself needs not further argument when it is remembered that the definition of equal ratios in Euclid V number 5 corresponds exactly to the modern theory of irrationals due to Dedekind and that it is word for word the same as Weierstrass's definition of equal ratios*" (Thomas Heath); "*L'ensemble* $\boldsymbol{R}^*$ *de nos nombres réels positifs, et l'ensemble* $\boldsymbol{Q}^*$ *de nos nombres rationnels positifs, sont une conséquence directe des Livres V et VII des Éléments, si du moins on laisse de côté le postulat de Cantor-Dedekind*" (Jean Itar).

desconcierto: pareciera que lo que el prisionero de Arcetri propone en lugar de la definición 5 del Libro V de Euclides, lejos de significar un progreso, apenas es una alternativa matemáticamente aceptable; y esto basta para explicar la reticencia de los especialistas en Galileo para poner su atención en este texto tardío, a tal punto que son contados los estudios a él dedicados,[7] a pesar de que la teoría de la proporción de los libros V y VI de Euclides no es un argumento secundario en los *Discorsi* (ni en el *De motu*); constituye, por así decirlo, el lenguaje matemático de las teorías físicas ahí presentadas: la igualdad de proporciones y la proporción compuesta fueron los dos conceptos claves que Galileo toma de la geometría griega para crear su física matemática.

El Libro V de Euclides es un libro difícil. Y lo es, sobre todo, porque su estructura axiomática descansa sobre dos definiciones (la 5 y la 7) que nada conceden a la intuición. Euclides toma las definiciones, y toda la teoría de la proporción del Libro V, de un tratado análogo del gran matemático griego Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.). La definición que Galileo rechaza fue redactada por Euclides del siguiente modo:

> Se dice que las magnitudes están en la misma relación, la primera a la segunda y la tercera a la cuarta, cuando los equimúltiplos de la primera y de la tercera, respecto a los equimúltiplos de la segunda y de la cuarta, según cualquier multiplicidad, o son igualmente mayores o son igualmente iguales o son igualmente menores.

Como bien puede verse, la definición 5 del Libro V es una definición inne-

[7] Es de elemental justicia mencionar, y recomendar la lectura de, los trabajos de Enrico Giusti, Giovanni De'Nelly y Attilio Frajese [consúltese la bibliografía]. También provechosa resulta la lectura del análisis que hace Rafaello Caverni del tratado de Galileo en el volumen V de su *Storia* pero con una advertencia: tenga el lector siempre en cuenta que Caverni aprovecha cualquier oportunidad -la inmensa mayoría de las veces gratuita e, incluso, perversamente- para socavar la importancia de los trabajos de Galileo ya sea arguyendo que otros se le habían adelantado, que Galileo robó de Zutano o de Mengano esta y aquella idea, que estaba equivocado en este y aquel sentido, que no entendió lo que hacía, etc. Si recomiendo ampliamente la lectura de Caverni a pesar de su feroz y descarado antigalileísmo no lo hago únicamente porque entre una gran cantidad de falsedades e inconsistencias hay mucha información interesante rescatable sino sobre todo porque es un muy valioso testimonio de la "dificultad de inteligencia" que la definición 5 del Libro V de Euclides representaba, aún en el siglo XIX. Caverni no entiende la definición del libro de Euclides ni tampoco el tratado de Galileo; intenta hablar mal de Galileo pero en realidad lo enaltece. Dice Caverni que corresponde a Antoni Nardi el mérito de haber descubierto un *difetto importantissimo*, una falacia escondida en la definición 5 que Galileo no toma en consideración: la definición euclídea de magnitudes proporcionales incluye a las magnitudes no-proporcionales!! A *il famosissimo Galileo* le correspondería la vergüenza de haber pasado *inconsideratamente sopra quelle fallacie*. Galileo no quiso ver que "el gran Euclides" pudiera "haber caido en un paralogismo". En lugar de mostrar la aplicación de los equimúltiples a la proporcionalidad de los movimientos uniformes como "falsa o inconcluyente" -continúa diciendo Caverni- Galileo consiguió hacerla aparecer en su tratado simplemente como "oscura".

gablemente complicada y obscura. La complicación no es gratuita y Galileo lo sabe. Ésta responde al reto que el descubrimiento de la existencia de magnitudes inconmensurables impusiera a la geometría griega; y el mérito fundamental de la teoría de Eudoxo consistió precisamente en haber generado una extensión del concepto de proporción aritmética al idear una definición aplicable tanto al caso de las magnitudes conmensurables como al de las no-conmensurables. Desde el punto de vista de las matemáticas, la definición eudoxiana es perfecta. Además de ser lógicamente impecable, es elegante y fina; sin embargo es una definición difícil de entender, a más de artificiosa y retorcida y, sobre todo, está muy lejos de contar con el consentimiento de la mayoría:

> Raras, creo yo, serán las mentes a las cuales la definición satisfaga si yo, con Euclides, digo así: Las magnitudes son proporcionales cuando los igualmente múltiples de la primera y de la tercera, tomados según cualquier multiplicidad, concuerdan siempre en el superar, faltar o igualar a los igualmente múltiples de la segunda y de la cuarta pues, ¿quién es aquél de mente tan afortunada como para tener la certeza de que siempre que cuatro magnitudes sean proporcionales, sus igualmente múltiples concordarán siempre en el excederse o igualarse? o ¿quién puede saber si los igualmente múltiplos no concordarán siempre, incluso cuando las magnitudes no sean proporcionales? Escasos, creo, serán tales ingenios. [*Giornata Quinta*, 282]

A Galileo –quien en el proceso de creación de la nueva ciencia del movimiento se servirá del contenido del Libro V de Euclides para formular el nuevo lenguaje de la naturaleza– la definición 5 del Libro V le pareció una definición defectuosa:

> paréceme esto de Euclides más un teorema por demostrarse, que una definición para admitirse. [*Giornata Quinta*, 282]

De ahí que Salviati se comprometa a elucidar el concepto y a proporcionar una nueva definición:

> Me esforzaré por secundar, con la definición, el concepto universal de todos los hombres, aun de los ineruditos en matemáticas.

No era simple respeto al sentido común. Lo de Euclides no es una definición para admitirse. Dado que existen muchas razones y distintos niveles de explicación de por qué Galileo dedica una jornada entera a criticar dos definiciones de la teoría de la proporción de Euclides, y dado que no es posible desarrollarlas en unas cuantas cuartillas, limitémonos esta vez a caracterizar qué son las "definiciones para admitirse" de Galileo.

> *Mi sforzerò di secondare con la definitione il concetto universal degl'uomini, anco ineruditi nella matematiche.*

Secondare significa secundar, defender, proteger, elucidar, favorecer, patrocinar, amparar; en este caso, *elucidar*. Cuando intentamos *elucidar* una noción común poco precisa, pero con un contenido intuitivo fuerte, es decir, cuando intentamos desarrollar un significado técnico lo más preciso posible para el término correspondiente, aparecen rasgos intuitivos característicos de la noción pre-elucidatoria que no deseamos ni debemos perder en la catarsis elucidatoria. En caso contrario, no estaremos elaborando una elucidación sino una definición estipulativa. Las definiciones de los matemáticos puros son definiciones estipulativas; una vez estipuladas, se vuelven verdaderas y necesarias por convención:

> Notad de pasada lo que son las definiciones de los matemáticos: una imposición de nombres o, lo que es lo mismo, abreviaciones del hablar ideadas e introducidas para eliminar este molesto fastidio que vos y yo sentimos en este momento por no haber juntamente convenido en llamar por ejemplo, [...] [*Discorsi*, 74]

Se trata, obviamente, de una necesidad nominal, como toda necesidad lógica; no hay en la *necesidad* de las definiciones matemáticas, "esencias" de ningún tipo. Pero Galileo no es un matemático puro; por eso, no confiere a las definiciones de su libro de las nuevas ciencias un carácter puramente lingüístico o estipulativo. Es un filósofo-matemático interesado en que sus lectores capten la verdad *física* contenida en sus proposiciones. La definición 5 del libro V para nada colaboraba con sus intenciones.

Recién salido su libro de la imprenta, se empezó a poner en duda si la nueva mecánica galileana era una ciencia real o un imaginativo *romanzo*. Caverni nos lo cuenta en su monumental historia del método experimental en Italia como sigue:

> Apenas publicados los Diálogos, la crítica inexorable, sobre todo en Francia, no quiso reconocer autoridad y mientras por una parte se acometió con la visera en alto al nuevo edificio aduciendo que estaba todo construido sobre un supuesto; de la otra se escuchaban amenazadores rumores de quienes agregaban que no era sólo que aquel mecánico fundamento fuera hipotético sino que el edificio carecía de fundamento pues las razones sugeridas por Euclides [los equimúltiplos tomados según cualquier multiplicidad] no demostraban la proporcionalidad entre los espacios y los tiempos [...] [*Storia*...V, 74]

En efecto, la definición de Eudoxo permea todos los seis teoremas del libro primero (*De motu aequabile*) del *De motu locali*, el tratado del movimiento de Galileo. El libro comienza con cuatro axiomas y la definición de Galileo de movimiento uniforme. Los teoremas uno y dos dependen directamente para su demostración de la definición 5 del Libro V de Euclides –y de la definición de Galileo de movimiento uniforme. Estos dos primeros teoremas entran a su vez en las demostraciones de los cuatro restantes. Por lo tanto, la definición de Eudoxo de igualdad de proporciones (5 del Libro V) es un elemento o principio, presente en todos los teoremas.

El hecho de que, de entrada, desde la primera demostración que aparece en el tratado de Galileo, se haga uso de los "igualmente múltiples" de la definición de magnitudes proporcionales del Libro V de Euclides, dificulta a Sagredo la comprensión del tratado sobre el movimiento que Salviati expone a lo largo de las jornadas tercera y cuarta. La reanudación, en la Jornada quinta, de las discusiones filosófico-matemáticas interrumpidas por un lapso grande de tiempo hace proferir a Salviati palabras emocionadas y Sagredo aprovecha este nuevo encuentro para manifestar su descontento con la definición euclidiana:

> No niego a V.S. que en el tiempo de nuestra separación me han pasado por la mente varios pensamientos sobre las novedades demostradas por aquel buen Viejo en su ciencia del movimiento, sujeta y reducida por él a las demostraciones de la Geometría. [...] Para comenzar le propondré a V.S. un escrúpulo mío, muy antiguo pero renovado al escuchar la demostración que el Autor nos da de la primera Proposición del *Moto Equabile*, la cual procede por vía de los igualmente múltiplos; éste es cierta ambigüedad que siempre he tenido en torno a la quinta o, como otros quieren, sexta definición del quinto libro de Euclides. [*Giornata Quinta*, 280]

Es quinta o sexta definición según se trate de la edición de Commandino o la de Clavius. El hecho de que Galileo mencione primero la numeración de Commandino pudiera significar cierta preferencia por el *Euclides* del matemático italiano sobre el *Euclides* del jesuita alemán.[8]

La definición "quinta o, como otros quieren, sexta" del libro V de Euclides se refiere a una noción cuyo sentido trasciende a la matemática pura y a la pura matemática ya que la proposición que nuestro autor enuncia al principio del *De motu aequabile* pretende describir una propiedad *real* del movimiento: "si un móvil que se mueve uniformemente recorre dos espacios a la misma velocidad, los tiempos invertidos serán entre sí como lo son los espacios recorridos". No es esto una proposición de la matemática pura. Es el primer teorema de "una ciencia muy nueva sobre un tema muy antiguo", la física matematizada:

> Theorema I, Propositio I: *Si Mobile æquabiliter latum, eademque cum velocitate duo pertranseat spatia, tempora lationum erunt inter se ut spatia peracta*. [*Discorsi*, 192]

En un principio –escribe Viviani en el *Quinto Libro degli Elementi di Euclide, ovvero sciencia universale delle proporzioni*– Galileo había pensado

[8] De esta mención de una doble numeración inferimos que Galileo conoció las dos versiones. Teniendo en cuenta que Federico Commandino, además de su *Euclide Elementa* griego-latín de 1572, publicó, tres años después, *De gli Elementi di Euclide* en lengua vulgar, es muy probable que Galileo tuviera presente también el texto en italiano de Commandino.

insertar la demostración de la presunta definición 5 del Libro V, inmediatamente después de la demostración de este primer teorema (Theorema I, Propositio I):

> En una ocasión similar, de duda y vacilación en torno a las definiciones quinta y séptima del quinto de Euclides, Galileo me confió las demostraciones de aquellas definiciones del quinto Libro [...] y después, encerrados en Arcetri, él me las dictó en forma de diálogo; esto fue mucho tiempo antes de la llegada de Torricelli a Arcetri, cuando todavía Galileo no había decidido meterlas en la quinta Jornada sino que más bien pensaba intercalar las demostraciones dentro de la cuarta, inmediatamente después de la primera proposición de los *moti equabili*, en la página 153 de la impresión de Leyden, en el caso de ser reimpresa su obra [...] [100] [9]

Los teoremas rigurosamente deducidos de principios verdaderos son necesariamente verdaderos, pero para que las proposiciones *matemáticas* así demostradas en el tratado de Galileo adquieran el carácter de conclusiones físico-matemáticas y sean de utilidad para explicar el fenómeno *físico* del movimiento, es indispensable que las definiciones que sirven de principios sean reales. En el método galileano, regido por la creencia de que los fenómenos naturales se corresponden con leyes matemáticas y que el papel de las matemáticas es hacer ver cuantitativamente la dependencia entre las magnitudes físicas, las definiciones son proposiciones sustantivas, es decir, *esenciales*, que desempeñan la función básica de garantizar la relevancia empírica de las proposiciones derivadas (los teoremas). A propósito de la primera definición de Nuestro Autor en el libro segundo (*De motu naturaliter accelerato*) de su tratado del movimiento, Sagredo comenta:

> Así como no sería razonable que yo me opusiese a esta o a cualquier otra definición asignada por el Autor que sea, siendo todas arbitrarias; así también puedo, sin ofender a su Autor, dudar que tal definición, concebida y admitida en abstracto, se adapte, convenga y verifique en el movimiento acelerado de los cuerpos graves que descienden naturalmente y, porque parece que el Autor nos promete que tal cual él lo ha definido así es el movimiento natural de los cuerpos graves, gustoso me sentiría de remover ciertos escrúpulos que me perturban para después poder con mayor atención aplicarme a las proporciones y demostraciones que nos aguardan. [*Discorsi*, 198]

Sagredo se está refiriendo a la definición de Galileo de "movimiento igualmente o uniformemente acelerado", aquel que partiendo del reposo, adquiere, en tiempos iguales, iguales incrementos de velocidad:

> *Motum aequabiliter, seu uniformiter acceleratum dico illum, qui à quiete*

[9] Viviani quiso decir aquí "de la tercera" jornada pues, en la edición de Leiden, la jornada cuarta empieza en la página 236 y la tercera en la página 150, y la primera demostración que hace uso de los equimúltiplos es la primera de todas, la del *Theorema I, Propositio I* en las páginas 151 y 152 de la edición de Leiden.

> *recedens, temporibus aequalibus aequalia celeratis momenta sibi superaddit.* [*Discorsi*, 205]

No se trata en el *De motu naturaliter accelerato* de abordar el estudio del movimiento uniformemente acelerado como un simple ejercicio matemático, sino de resolver los problemas relativos a este movimiento porque éste es, según nos promete el autor del tratado, el que describe en la realidad el fenómeno físico de la caída libre. Es verdad que el movimiento natural de la caída libre se ofrece ante nuestros ojos con una diversidad tan rica que nos resulta difícil imaginar que sea posible elaborar una ciencia de este fenómeno: ¿cómo podría una misma ley regir las piruetas de una pluma al viento y el vertical descenso de una bola de plomo? Galileo no ignora que los resultados deducidos pueden no aparecer con exactitud en la naturaleza debido a obstáculos exteriores o a la imperfección de la materia; sin embargo, su gran aporte al estudio del movimiento fue la obtención de una tal ley general según la cual, en un medio sin resistencia todos los cuerpos caerían con la misma velocidad:

> [...] cuando el filósofo geómetra quiera reconocer en concreto los efectos que en abstracto ha demostrado, necesitará restar los impedimentos de la materia; que si esto sabe hacer, yo os aseguro que las cosas concordarán no menos ajustadamente que los cómputos aritméticos. [*Dialogo*, 251]

Con la ley general de caída de los cuerpos, Galileo "sujeta y reduce" la ciencia del movimiento a las demostraciones de la Geometría. El movimiento de aceleración uniforme es el movimiento, que por naturaleza, tienen los cuerpos que caen libremente pero hay que entender la ley para llegar a convencernos de que ésta se cumplirá siempre que se eliminen todos los obstáculos accidentales y externos:

> Habiendo visto, repito, todo esto, yo llegaría a la conclusión de que si se eliminara absolutamente la resistencia del medio, todos los cuerpos descenderían a la misma velocidad. [*Discorsi*, 116]

Las definiciones reales no son convenciones para la introducción de nuevos símbolos o nuevas notaciones como lo son las definiciones estipulativas sino que son proposiciones de equivalencia en las que el *definiens*, en este caso la propiedad elegida, encarna la "naturaleza esencial" del *definiendum*, es decir, de lo que se define. La definición real implica una afirmación de la existencia de lo definido y Galileo sabe que sólo la definición real asegura que los axiomas expresen la verdadera naturaleza de un fenómeno físico y, por lo tanto, que serán capaces de transmitir la verdad "física" al resto de las proposiciones. La definición de movimiento naturalmente acelerado debe corresponderse perfectamente con la esencia del fenómeno del movimiento natural de caída de los cuerpos; la definición de magnitudes proporcionales, con la esencia de las magnitudes proporcionales.Tales "esencias" son justamente aquellos rasgos característicos que no debemos perder al realizar la elucidación:

> Digo, entonces, que para dar una definición que produzca en la mente del lector un concepto ajustado a la naturaleza de las magnitudes proporcionales, deberemos tomar una de sus propiedades...

pero no basta con que la definición sea *verdadera*. Galileo no niega *la verdad* de "aquello que Euclides mete como definición"; nunca declara, ni siquiera insinúa, en la *Giornata Quinta* que la definición de Eudoxo sea incoherente o arbitraria; en ningún momento sugiere o afirma que lo que dice la definición 5 del Libro V sea *falso*. Muy otro es el problema:

> ...deberemos tomar una de sus propiedades, pero no cualquiera, sino la más fácil y la más inteligible, incluso por el vulgo no iniciado en el estudio de las Matemáticas. [*Giornata Quinta,* 198]

La filosofía natural busca comprender; nunca su objetivo es la verdad a secas. Su meta es la verdad que se entiende, y lo que le falta a la susodicha definición es precisamente inteligibilidad. Inteligibilidad y verdad son cosas distintas. Si una idea es comprensible, eso no la hace verdadera; si incomprensible, no necesariamente es falsa.

Ya lo dijimos: mirada desde las matemáticas la definición 5 del Libro V de Euclides es perfecta. Desde la perspectiva de la filosofía natural resulta defectuosa porque no *muestra* –para utilizar un término wittgensteiniano– que la propiedad que ella ofrece como *definiens* realmente se aplica al objeto definido. Es verdad, pero no se ve. La concordancia en el igualar, superar o faltar de los equimúltiplos de la primera y la tercera tomados según cualquier multiplicidad con respecto a los equimúltiplos de la segunda y de la cuarta, no es la propiedad más fácil ni la más inteligible de cuatro magnitudes que son proporcionales –la primera con la segunda y la tercera con la cuarta. En realidad –dice Galileo– aquello de Euclides tiene más la apariencia de un teorema que de una definición. Contra la falta de inteligibilidad, lo natural en el ser humano es dudar, analizar, defenderse. No es suficiente con saber que algo es cierto, es importante *entender* por qué lo es. Una verdad que no es fácilmente inteligible tiene que *de-mostrarse*; las definiciones no se demuestran (se *muestran*); *ergo*, una verdad que no es fácilmente inteligible no sirve como definición.

El objetivo de la *Giornata Quinta* fue iluminar un lugar obscuro. Para el filósofo matemático es mejor definición una más simple o más fácil o más cercana al concepto intuitivo de todos los seres humanos (incluidos los no eruditos en matemáticas) que una otra más difícil de inteligir, aun cuando esa otra deje más satisfechos a los matemáticos puros. Es evidente que no se trata en la *Giornata Quinta* de deducir una consecuencia falsa (la definición de Euclides) de un principio cierto (la definición de Galileo). Lo que Galileo hace en la *Giornata Quinta* al sustituir con una nueva definición aquella verdad abstrusa que Euclides mete como definición y demostrarlo después como teorema es elucidar un concepto. Hace inteligible la proposición euclidiana demostrándola a partir de una definición "ajustada al concepto universal de todos los hombres".

Todas las propiedades de una cosa –que son infinitas en número– están contenidas en la definición real de la cosa, pero no todas son igualmente elegibles. Elegimos la más simple, la más fácil de aprehender, la más ajustada al concepto universal, porque de ella podemos pasar paso a paso, por medio de demostraciones y razonamientos, a otras propiedades:

> [...] por ejemplo, para alcanzar el conocimiento de algunas de las propiedades del círculo, que las tiene en número infinito, nosotros comenzamos por una de las más simples, y eligiéndola a ella como su definición, pasamos con razonamientos de esta primera a una otra y de esta otra a la tercera y después a la cuarta, etc. [...]; y mientras nuestro intelecto procede así discursivamente de conclusión a conclusión [...], el intelecto divino, sin ningún discurrir temporal, con la simple aprehensión de la esencia comprende todas las infinitas propiedades, las cuales están en efecto virtualmente comprendidas en la definición y, tal vez por ser infinitas, todas las propiedades son finalmente, en su esencia y en la mente de Dios, una sola. [*Dialogo*, 129]

El modo con el que Dios conoce las infinitas propiedades de las cosas es eminentemente más excelente que el nuestro. En la mente de Dios todas las infinitas propiedades son una sola. Nosotros conocemos y conoceremos solamente algunas cuantas. Somos criaturas de razonar discursivo, obligadas a ir deduciendo una por una las infinitas propiedades. Ello exige que seamos humildes y pongamos atención en la propiedad elegida como definición porque no cualquiera sirve. El mismo Euclides –dice Galileo en la *Giornata Quinta*– procedió con este cuidado en otros lugares. Cuando bien hubiera podido decir que el círculo es una figura plana dentro de la cual dos rectas que se intersecan sin pasar por el centro no se bisecan... o que es una figura plana dentro de la cual todos los cuadriláteros tienen sus ángulos opuestos iguales a dos rectos... –ya que ambas proposiciones son verdaderas– sin embargo él no lo hizo. Prefirió tomar otra propiedad "más inteligible y más fácil de conceptualizar" (*più intelligibile e più facile da formarsene concetto*) para formular su definición y de ella dedujo las otras propiedades.

> ¿Quién no estará de acuerdo conmigo –pregunta Galileo– en que Euclides actuó bastante mejor al meter aquélla más clara y más evidente como definición y obtener después a partir de ella otras propiedades más recónditas y demostrarlas como conclusiones? [*Giornata Quinta*, 282][10]

---

[10] El círculo –decimos hoy– es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro. La definición que da Euclides (la número 15 del Libro I de los *Elementos*) no difiere de la nuestra más que en el lenguaje. Las propiedades "más recónditas" que enuncia Galileo en el pasaje parafraseado son dos de los teoremas del Libro III (las proposiciones 4 y 22).

Aún más decidida que la posición de Galileo va ser la de su discípulo Evangelista Torricelli, especialmente cuando el concepto que se va a definir está de algún modo ya en la opinión común, y no tanto sobre la base de motivaciones de carácter científico. Recordemos que Torricelli fue invitado a Florencia para servir de secretario y asistente al viejo filósofo y matemático en los últimos meses de su vida y que es a él a quien Galileo dicta la *Giornata Quinta*. En evidente alusión a lo que su maestro hace con las definiciones de Euclides en el texto que hoy nos ocupa, Torricelli escribe:

> Hay quienes, culpando a los que no titubearon en meterle mano a las definiciones de Euclides [*qui in Definitiones Euclides manus inijcere non dubitaverun*] [...], dicen que nadie tiene por qué dar razones de las definiciones geométricas y que, por lo tanto, Euclides (por brevedad lo nombraremos únicamente a él) podía definir la proporcionalidad de cualquier modo como él quisiera. [...] Pero, si no me equivoco yo, se equivocan, y no levemente, los que dicen esto. En realidad el geómetra, al definir alguna cosa cuyo concepto preexiste de algún modo en la mayoría, totalmente libre y en su derecho no lo está; sino que debe acomodar a tal concepto su definición [*liber, et sui iuris omnino non est: sed debet accomodare definitionem suam tali conceptui*].[11]

En resumen, la definición físico-matemática (1) debe estar de acuerdo con la naturaleza del objeto que se pretende definir porque la definición deberá producir en la mente del lector un concepto ajustado a la naturaleza de lo que se define, y además (2) debe respetar el contenido intuitivo de la noción común porque no nos está permitido tomar cualquiera de sus propiedades sino precisamente la más fácil y la más inteligible, incluso por el vulgo no iniciado en el estudio de las Matemáticas; *i.e.*, la defínción físico-matemática debe ser al mismo tiempo cierta e inteligible.

"Eso de Euclides" no está en el lugar adecuado. Para colocarlo en el lugar que le corresponde, esto es, entre los teoremas, Galileo tiene que ofrecer una definición alternativa de magnitudes proporcionales, a la vez que verdadera, inteligible; y demostrar, a partir de ella, aquello que Euclides llama "definición".

Pareciera excesivo volver a recordar algo tan evidente como que Galileo redactó la *Giornata Quinta da aggiungersi nel libro delle Nuove Scienze* (Quinta Jornada para añadir al libro de las Nuevas Ciencias) para ser anexada a su libro de las nuevas ciencias, pero historiadores y editores o lo han olvidado o fingen no recordarlo pues siguen presentando el libro de Galileo en ediciones amputadas que lo agreden y lo deforman. Creo que podemos empezar a concluir que la preocupación de Galileo por elucidar el concepto de proporcionalidad común a todos los hombres responde a un interés particular concerniente a su libro de las nuevas ciencias: garantizar la relevancia empírica de los teoremas de su tratado del movimiento; y a dos obse-

[11] *Cfr.* su tratado latino, el "De proportionibus" (1644) en *Opere de Evangelista Torricelli*, G. Loria y G. Vassura (eds.), Stabilimento Tipografico G. Montanari. Faenza, 1919-1944.

siones de toda su vida: la aspiración a la fusión de verdad e inteligibilidad, y el anhelo incesante de renovación e innovación de los caminos hacia el conocimiento.

Al caer de la tarde, Sagredo, y también Simplicio, acaban por entender. Dos sencillas pero poderosas palabras ponen el punto final al discurso sobre las magnitudes proporcionales y los equimúltiplos tomados según cualquier multiplicidad: *Laus Deo*. Señal de que la tarea se ha cumplido. Alabado sea Dios. Salviati ha vuelto tratable "aquello" de Euclides; nuestro autor ha alcanzado por fin su objetivo, "que él y también otros salgan de la obscuridad a la luz".

De ahí la tranquila complacencia de Simplicio, el dialogante que no sabe matemáticas:

> No sabría qué más añadir, tan completamente satisfecho he quedado con el discurso y persuadido con las demostraciones que he escuchado.

y la mezcla de contento y dolor que embarga al espíritu libre, agudo e instruido de Sagredo:

> Quedo satisfechísimo con esta elucidación [*questa dilucidattione*] que Vuestra Señoría ha hecho y de la cual ya tenía yo, por largo tiempo, una gran necesidad; sin embargo, no sabría expresar qué es ahora mayor en mí: o el gusto enorme por haber adquirido ese deseado conocimiento, o la gran aflicción y pesadumbre que experimento por no haber solicitado la explicación desde el principio de nuestras conversaciones, tanto más habiendo escuchado que V. S. la confería a los amigos que, por vivir en cercanía, os visitaban con cierta frecuencia.

No hay duda, Borges tiene razón: una dicha más grande que imaginar es entender.

Ediciones utilizadas para citar los textos de Galileo
(La traducción de todas las citas es mía.)

[*Giornata Quinta*]
Giornata Quinta, da aggiungersi nel libro delle Nuove Scienze [el manuscrito de Evangelista Torricelli] en *Euclides Reformatus* de Enrico Giusti. pp. 276-298.

[*Discorsi*]
Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla Mecanica & i Movimenti Locali. In Leida, appresso gli Elsevirii, MDCXXXVIII. Reproducción parcial del manuscrito 169 conservado en la *Biblioteca Nazionale Centrale* de Florencia. Edición de la *Universitat Politècnica de Catalunya*, Barcelona, 1988. [Edición facsimilar de la *giornata terza* y la *giornata quarta* de los *Discorsi*; contiene también la primera página de la dedicatoria, la primera de la *giornata prima*, el índice y la portada.] A la paginación original de la edición de Leiden, la reproducción facsimilar ha sobreañadido la que fijó Favaro con su *Edizione Nazionale* de las obras de Galileo. La numeración que sigo en las citas de los *Discorsi* es la de Favaro.

[*Dialogo*]
Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo. Ferdinando Flora (ed). Rizzili editore. Milano, 1959.

[*Carteggio*, XVII]
en *Le Opere di Galileo Galilei*, vol. XVII. Antonio Favaro (ed).

Bibliografía

Aulie, Richard Paul, "Eudoxus" en *Encyclopaedia Britannica*, IV. Chicago, 1986.
Beltrán Marí, Antonio, *Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo ptolemaico y copernicano* (de Galileo Galilei), Alianza Editorial. Madrid, 1994.
Blay, Michel, *Les raisons de l'infini. Du monde clos à l'univers mathématique,* Éditions Gallimard, 1993.
Caverni, Raffaello, "Del quinto dialogo aggiunto alle due Scieze nuove, ossia Della Scienza delle proporzioni" en *Storia del Metodo Sperimentale in Italia*, tomo V. Civelli, Firenze, 1898.
De'Nelly, Giovanni Batista Clemente, "Compendio della quinta giornata dei Dialoghi delle nuove Scienze" en *Vita e commercio letterario de Galileo Galilei*, tomo II. Stamperia Mouecke. Firenze, 1793.
Drake, Stillman, *Galileo at Work. His Scientific Biography*, Dover Publications Inc., New York, 1978.
Duarte, Francisco José, *Bibliografía: Euclides, Arquímedes, Newton*, Biblioteca de

la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales de Venezuela. Caracas, 1967.

Euclides, *Elementorum Euclidis Libri Tredecim. Secundum vetera exemplaria restituti Ex versione latina Federici Commandini aliquam multis in locis castigata. Londini, Excudebat Gulielmus Iones. MDCXX*. [Edición bilingüe griego-latín de Federico Commandino, 1620].

Favaro Antonio (ed.), *Le Opere di Galileo Galilei*, 20 vols. Edizione Nazionale. Berbera, Firenze, 1890-1909.

Finocchiaro, Maurice A., *Galileo on the World Systems,* University of California Press, Ltd. 1997.

Frajese, Attilio, *Galileo matematico*, Editrice Studium. Roma, 1964.

Giusti, Enrico, *Euclides Reformatus: la teoria delle proporzioni nella scuola gallileiana*, Bollati Boringhieri editore, Torino, 1993.

Heath, Thomas, *A History of Greek Mathematics* (2 vols.), Garland Publ. New York & London, 1981.

Itard, Jean, *Les livres arithmétiques d'Euclide*, Hermann. Paris, 1961.

Lombardo Radice, L. y B. Segre, "Galileo e la matematica" en *Saggi su Galileo Galilei* (en la celebración del IV centenario del nacimiento de Galileo), Barbèra. Firenze, 1967.

Solís, Carlos y Sádaba, Javier (eds.), *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias* (de Galileo Galilei), Editora Nacional. Madrid, 1981.

Thom, René Frédéric *et al.*, "Euclidean Geometry" en *Enciclopaedia Britannica*, XIX, 1986.