LA TEORÍA DE INDIVISIBLES DE GALILEO Y SU GEOMETRIZACIÓN DEL MOVIMIENTO

Manuel Sellés García

Cuando las interpretaciones del historiador son anacrónicas, algo que a veces resulta difícil de evitar, esto se traduce en una serie de inconsistencias. Algo así podría suceder en el caso de la obra mecánica de Galileo. En los *Discorsi* destaca, por ejemplo, el aparente galimatías de su discusión del infinito y los indivisibles en la Jornada Primera, su extraño empleo de una especie de "velocidad media" en su estudio del movimiento acelerado (algo ya corregido hace algunos años), la utilización de una especie de teoría "proto-infinitesimal", y su al parecer injustificado rechazo a la teoría de indivisibles de su discípulo Bonaventura Cavalieri que, en definitiva, se supone que Galileo habría empleado en una forma más tosca. En las páginas que siguen trataré de mostrar que las inconsistencias relativas a su uso de indivisibles desaparecen, o cuando menos se reducen, si se adopta otro punto de vista. Éste es que Galileo desarrolló el indivisibilismo matemático medieval y, tras hacerlo inmune a las objeciones clásicas a este tipo de teoría, lo aplicó al análisis del movimiento. Se verá que la formulación de una teoría de este tipo suponía serias limitaciones que, en definitiva, lo obligaron a fundamentar su cinemática del movimiento en un principio dinámico, presentado en la segunda edición de los *Discorsi* de la mano de su discípulo Viviani.

El indivisibilismo de Galileo

En los *Discorsi*, la razón que da Galileo para sostener que el continuo está formado de indivisibles parte de la misma idea aristotélica de una indivisibilidad indefinida: argumenta que una división que se pueda proseguir indefinidamente supone que las partes son infinitas, pues de otro modo la subdivisión se terminaría. Y si son infinitas son inextensas, porque de otro modo constituirían una extensión infinita. Y, si son inextensas, son indivisibles.[1]

Frente a la concepción del infinito de Aristóteles como algo que carece de límites, Galileo introduce aquí un infinito actual, "terminado". Para Aristóteles, un proceso de división del continuo que, por su propia naturaleza, nunca termina, no puede tener un final. El infinito actual de Galileo, sin embargo, constituye ese final. Y así el infinito de Aristóteles se convierte en lo que Galileo denomina un "término medio" entre lo finito y su concepto de infinito. Según dice, estas partes no son finitas, porque si no responderían a un número dado, cuando existe otro mayor; ni infinitas, porque ningún número es infinito. Es decir, que si el proceso de división es numerable, nunca se termina, y con él no se alcanza el indivisible que, según señala, es el resultado de una división "última y suprema".[2]

El medio que emplea Galileo para alcanzar su infinito es el movimiento. Tras hacer admitir a Simplicio, en los *Discorsi*, que para dividir una línea bastaría con señalar un punto en ella, plegándola de forma que dicho punto constituyese el vértice de un polígono, Salviati toma la línea y la dobla como una circunferencia, considerándola un polígono de infinitos lados. Si las figuras geométricas están compuestas por sus indivisibles, entonces éstos –a diferencia de los límites en la concepción euclídeo-aristotélica– constituyen por derecho propio una parte de la figura en cuestión, compartiendo su naturaleza. Así, un punto resulta ser la menor de las líneas, y como tal constituye el lado de ese polígono de infinitos lados que es el círculo.[3]

Sentado su indivisibilismo, Galileo debe responder a las objeciones clásicas a este tipo de teorías que suponían los conocidos como "argumentos de proyección". Un caso clásico es la proyección entre los puntos de un lado del cuadrado y de su diagonal. Entre ellos se puede establecer una correspondencia biunívoca, de modo que contarían con el mismo número de puntos. Pero la diagonal, al ser de mayor longitud que el lado, debería tener, de acuerdo con las ideas indivisibilistas, un número de puntos mayor.

---

[1] Galileo Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche, in torno à due nuove scienze*, Leiden, 1638, en *Le Opere di Galileo Galilei. Edizione Nazionale*, ed. A. Favaro, Ed. G. Barberà, Florencia, 1890-1909, vol. VIII (reed. 1968), p. 80. En lo sucesivo se citará abreviadamente: EN, VIII, 80.

[2] Eberhard Knobloch, "Galileo and Leibniz: Different Approaches to Infinity", *Arch. Hist. Exact Sci.*, 54 (1999) 87-99, explora las diferentes concepciones de estos autores sobre el infinito. Para el caso de Newton, en cierto modo en la línea de Galileo, véase Manuel Sellés García, "Isaac Newton y el infinitesimal", *Theoria*, 14/3 (1999) 431-460.

[3] EN, VIII, 92.

La respuesta de Galileo a estas objeciones es aclarar, mediante algunas paradojas, que aun existiendo esta correspondencia, no cabe establecer una aritmética de infinitos, como tampoco de indivisibles. Los infinitos son, simplemente, incomparables, y así no se puede decir, de dos segmentos, por ejemplo uno de doble longitud que el otro, que el primero contenga el doble de infinitos indivisibles. Para mostrarlo presenta el ejemplo de la correspondencia biunívoca entre el conjunto de números naturales y el de sus cuadrados: a todo cuadrado le corresponde su raíz, que es única, y viceversa. Pero las raíces son todos los números naturales de modo que, pese a que la mayoría de los números no son cuadrados y así aparentemente éstos son menos que los naturales, hay tantos cuadrados como números. De ello deduce Galileo que los atributos de mayor, menor o igual no tienen lugar entre los infinitos.[4] Siendo así, un infinito no guarda razón, ni con un finito, ni con otro infinito.

Galileo y Cavalieri

Esta concepción del infinito es la que separa a Galileo del método de Cavalieri. En tal método, dicho sea en términos generales, bajo determinadas restricciones se comparaban dos figuras a través de la comparación entre sus indivisibles. En la base de este método estaba el principio de congruencia según el cual, si se lleva a la coincidencia dos figuras, cada una de las líneas de la colección de líneas de la primera coincidirá exactamente con cada una de las líneas de la colección de líneas de la segunda. Con lo cual constarían del mismo número de indivisibles.[5] Y así se concibe que esto no lo aceptase Galileo, quien pensaba que el número de puntos de, por ejemplo, dos segmentos de recta de la misma longitud no tiene por qué ser el mismo: es simplemente incomparable.[6] Lo que, por decirlo así, restringe drástica-

[4] EN, VIII, 79.

[5] Sobre Cavalieri, véase Kirsti Andersen, "Cavalieri's Method of Indivisibles", *Archive for the History of Exact Sciences*, 31 (1985) 291-367, y Enrico Giusti, *Bonaventura Cavalieri and the Theory of Indivisibles*, Cremonese, Bolonia, 1980.

[6] Esta opinión concuerda con la expuesta por Giusti, *op. cit.*, pp. 40-44. Giusti afirma que los indivisibles de dos figuras, de acuerdo con lo que expone Galileo en los *Discorsi*, no pueden compararse entre sí. Discrepo, sin embargo, en que esto sea consecuencia de que el punto de vista de Galileo es filosófico –físico, digamos–, mientras que el de Cavalieri es matemático. Por lo expuesto anteriormente, se ve que la propiedad de que los elementos de dos conjuntos infinitos se puedan poner en correspondencia biunívoca es la clave *matemática* para eludir los argumentos clásicos contra el indivisibilismo. Otra razón, sin excluir la vertiente filosófica que señala Giusti, es que para Galileo los indivisibles no sólo son los componentes de los cuerpos: también componen las figuras geométricas. Y en geometría sólo hay un indivisible, digamos, "verdadero": el punto. La línea o el plano son sólo indivisibles relativos a dimensiones superiores, pero en su propia dimensión pueden ser divididos. Esto es lo que distingue un "método" de indivisibles como el de Cavalieri de una "teoría" de indivisibles como la de Galileo.

mente la aplicación del método de Cavalieri, pues no permite comparar las colecciones de líneas trazadas desde los puntos de bases *iguales*; sólo sí desde *la misma* base. O, dicho con más precisión, desde la misma colección de indivisibles, pues no cabe establecer la igualdad entre el número de elementos de dos conjuntos infinitos.

Y en esto consisten los fundamentos indivisibilistas con los que Galileo afronta el estudio del movimiento. El cálculo infinitesimal tiene raíces distintas, y parece haber arrancado de su discípulo Torricelli, quien en esto se desvió del maestro. En el caso de la confrontación entre, por ejemplo, el lado de un cuadrado y su diagonal, Torricelli aceptó que la correspondencia entre ellos implicaba que tenían el mismo número de puntos, sólo que los puntos de la diagonal eran correspondientemente más "extensos" que los del lado. Cavalieri quizás hubiese podido asentir a esto. Como se ha visto, Galileo, muy posiblemente, no.

La velocidad y sus problemas

Para Galileo, la velocidad no tenía el sentido actual de un espacio dividido por un tiempo. De acuerdo con una tradición que se remonta a Aristóteles y pasa por la interpretación geométrica de los mertonianos medievales, la velocidad era una magnitud característica del movimiento, entendido éste de una manera holista. Dos movimientos se comparaban sobre la base de iguales duraciones o de iguales espacios, y ello sin que entrase en consideración su uniformidad o disformidad. La representación geométrica de tal magnitud, que se remonta a la Edad Media, figuraba a la velocidad como una superficie. La base era una línea que representaba, alternativamente, el intervalo de espacio, o de tiempo, considerado, y perpendicularmente a ella se trazaba desde cada punto una línea representando la intensidad o grado de velocidad en el lugar, o instante, correspondiente. Dicho grado era constante en el caso del movimiento uniforme, o variable en el del acelerado. La figura resultante se entendía como un todo.[7] La interpretación de esta

---

Respecto de la afirmación de Giusti, en la p. 44, de que Galileo, pese a oponerse al uso de indivisibles en geometría (¿dónde dice que se opone?) emplea más tarde, son embargo, métodos "similares" y "posiblemente más rudimentarios [cruder]", me parece injustificada, como espero mostrar en estas páginas. Por otra parte, hay que hacer notar que Galileo no fue el único en tratar de fundar una filosofía natural atomista sobre el viejo indivisibilismo. Véase al respecto Manuel Sellés García, "El joven Newton y las matemáticas del atomismo: el 'Cuaderno del Trinity'", en Salvador Mas, Eloy Rada y Luis Vega, *Del pensar y su memoria. Ensayos en homenaje a Emilio Lledó*, UNED, Madrid, 2001, 625-640.

[7] Sobre el concepto de velocidad, P. Souffrin, "Sur l'histoire du concept de vitesse d'Aristote à Galilée", *Rev. Hist. Sci.*, XLV/2-3 (1992), 231-267, y P. Damerow, G. Freudenthal, P. McLaughlin y J. Renn, *Exploring the Limits of Preclassical Mechanics*, Springer-Verlag, Nueva York, 1992, pp. 13-19. Aplicado en el caso de Newton, tal concepto muestra que la presencia

superficie como una colección o agregado de intensidades o grados era una idea propia de concepciones indivisibilistas como la de Galileo. A partir de este momento se empleará el término "velocidad" en este sentido.[8]

Tratándose de movimientos uniformes, esta concepción de la velocidad no daba especiales problemas. Pero no era así cuando Galileo trató de extender el estudio a los movimientos uniformemente acelerados. Veamos un ejemplo. En una de sus demostraciones, que no aparecería en los *Discorsi*, Galileo estudiaba el movimiento de descenso por planos de distinta inclinación.[9] Buscaba demostrar que en cualquiera de ellos, a partir del reposo inicial, el grave pasa por todos los grados de velocidad, más rápidamente en el plano más inclinado, menos en el de menor inclinación, sin saltarse ninguno de estos grados, condición esta última que se conoce como principio de continuidad y constituye uno de los fundamentos de su geometrización del movimiento.

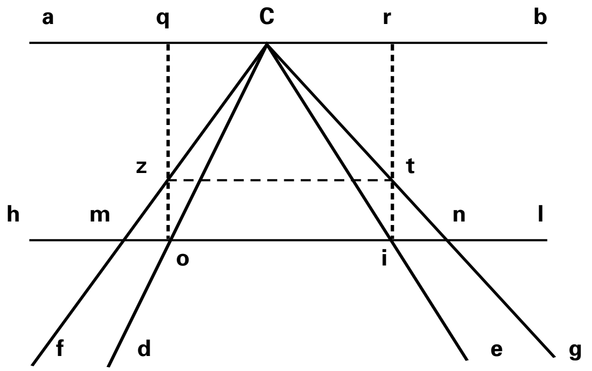


Fig. 1

En la fig. 1, sea *ab* el horizonte, y supongamos los ángulos *fCg* y *dCe*, de los cuales el mayor corresponde al plano más inclinado. Sea *hl* una línea que

de dos "definiciones" de fuerza en los *Principia*, un tópico de la historiografía tradicional, no es sino consecuencia de una interpretación anacrónica. Sobre ello, véase Manuel Sellés García, "Impacto instantáneo y acción continua en la mecánica de Newton", *Éndoxa. Series filosóficas*, nº 11 (1998), 9-80.

8 Es importante notar que el grado de velocidad no concuerda conceptualmente con nuestra actual velocidad instantánea. Mientras que esta última es una velocidad, puesto que se refiere a un determinado espacio recorrido en un determinado tiempo (aunque sean infinitesimales, estos intervalos de espacio y tiempo tienen extensión y son por consiguiente divisibles) el grado de velocidad es, geométricamente hablando, un indivisible de velocidad, una línea cuando la velocidad se representa mediante una superficie. En un instante, entendido como un indivisible de tiempo (un punto, cuando el tiempo se representa por una línea) no se recorre ningún espacio.

9 La demostración, en EN, II, 264-65. Sobre la datación, véase Winifred L. Wisan, "The New Science of Motion: A Study of Galileo's De motu locali", *Arch. Hist. Exact Sci.*, 13 (1974) 103-306, pp. 276-78.

se desplaza uniformemente y paralelamente a *ab* hacia abajo, cuyo movimiento representa el transcurso del tiempo a partir de un momento inicial de coincidencia con *ab*. En la posición de la figura, intercepta sobre el ángulo *dCe*, correspondiente al plano de menor inclinación, la línea *oi*, que representa el grado de velocidad del móvil en ese momento. Si se elevan las perpendiculares *oq* e *ir*, se ve que el grave que desciende por el plano más inclinado habrá pasado por el mismo grado de velocidad *zt*, en un instante anterior.[10] Esto se cumple para todos los grados de velocidad menores que cualquiera dado, es decir, que a toda paralela a *oi* en el triángulo *oCi* corresponde una a *zt* en el triángulo *zCt*.

Como se ha visto, aquí las áreas representarían las velocidades de ambos movimientos. La cuestión es que la colección de grados de velocidad adquiridos por el grave en los dos planos inclinados *es la misma* y, sin embargo, está representada por dos triángulos que no son iguales. Esto que, como han afirmado algunos especialistas, constituiría un problema de fundamentos o una paradoja, resulta, a la luz de lo ya explicado, una característica inevitable de la teoría de indivisibles de Galileo. Característica que no deja de ser bastante embarazosa.[11]

En consecuencia, Galileo no podía comparar dos movimientos acelerados empleando la comparación entre las superficies que representarían las velocidades. Y aquí, de nuevo, cabe hacer una puntualización a la interpretación aceptada. A la vista de esto, la velocidad tendría que definirse como la colección de grados de velocidad adoptados sucesivamente por el móvil en un tiempo o espacio dados, *y no* como su agregado formando una superficie. De modo que, aunque Galileo no lo explicita, habría que entender que *la velocidad de un movimiento es la colección de sus grados de velocidad* y sólo bajo la restricción que mencionaré un poco más adelante –al comentar el Teorema I para movimientos uniformemente acelerados– podrá representarse por el área engendrada por dicha colección. Sin embargo, las velocidades, entendidas como colecciones infinitas de grados de velocidad, pueden caracterizarse especificando asimismo los grados inicial o final. Dos tramos de dos movimientos uniformemente acelerados que parten del mismo

[10] Las líneas de trazos *oq*, *ri* y *zt* no constan en la figura original. Se han introducido, a imitación de Paolo Galluzzi, *Momento. Studi galileiani*, Ed. dell'Ateneo & Bizarri, Roma, 1979, p. 338, para mayor claridad.

[11] Desde el punto de vista de Cavalieri, se podría decir que la densidad de puntos en el segmento *rt* es superior a la del segmento *ri*. De hecho, si se dilatase el primero hasta la longitud del segundo, con lo que tendrían la misma densidad, los dos triángulos serían iguales. En el método de Cavalieri, la situación anterior no se podría dar porque el principio de congruencia asegura que se está trabajando siempre con líneas de la misma densidad. Desde el punto de vista de Galileo, la comparación entre el número de puntos de *rt* y de *ri* a través de la colección de grados de velocidad constituye asimismo una operación prohibida, al ser una comparación entre el número de elementos de conjuntos infinitos. No se puede decir que *rt* tenga menos, igual o más puntos que *ri*: sólo sí que se puede establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos de ambos segmentos.

grado de velocidad, y llegan al mismo grado de velocidad, se efectúan con la misma velocidad. Pues, por el principio de continuidad, la colección comprenderá, en ambos casos, todos los grados de velocidad comprendidos entre el inicial y el final, sin saltarse ninguno. Si, en concreto, se considera un movimiento que parte del reposo, entonces su velocidad en un momento dado vendrá caracterizada por el grado de velocidad alcanzado en ese momento.

Las dos soluciones de Galileo

Ante esta situación, Galileo exploró dos vías. Una fue reducir los movimientos acelerados a movimientos uniformes equivalentes, de modo que las relaciones establecidas entre unos se cumpliesen entre los otros. La otra fue introducir o postular una proporción que vinculase las velocidades de dos movimientos acelerados.

La equivalencia entre un movimiento acelerado y otro uniforme, análoga, pero no igual, a la "regla de Merton" medieval, se presenta ya en el *Dialogo*. Allí se afirma que el tiempo en el cual es recorrido un espacio dado por un móvil que parte del reposo con movimiento uniformemente acelerado es igual al tiempo con que aquél mismo espacio habría sido recorrido por el mismo móvil con un movimiento uniforme tal que su grado de velocidad fuese la mitad del grado de velocidad máximo alcanzado en el movimiento acelerado.

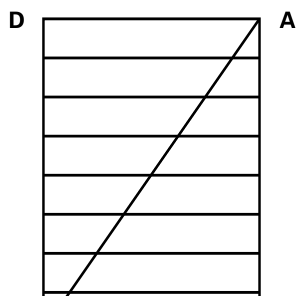


Fig. 2

La demostración, bien conocida, es como sigue. En la fig. 2, AC es el tiempo durante el cual el móvil, partiendo del reposo en A, recorre un determinado espacio con movimiento uniformemente acelerado. BC representa el grado máximo de velocidad alcanzado con este movimiento. Todas las paralelas a BC trazadas desde A y limitadas por AB representan los infinitos y crecientes grados de velocidad adquiridos sucesivamente por el móvil. Ahora las paralelas del triángulo ACB se extienden hasta BD, y se tiene que el agregado de todas las paralelas contenidas en el cuadrilátero es igual al de las contenidas en el triángulo. De modo que lo que falta de movimiento acelerado en la primera mitad, se compensa con el exceso en la segunda mitad. Así, el infinito número de paralelas de ABC es el mismo –el *mismo*, no simplemente igual–, por construcción, que el de ACBD, y así el movimiento representado por las paralelas de ACBD es el doble del representado por las paralelas de ABC; como también es doble su superficie.[12]

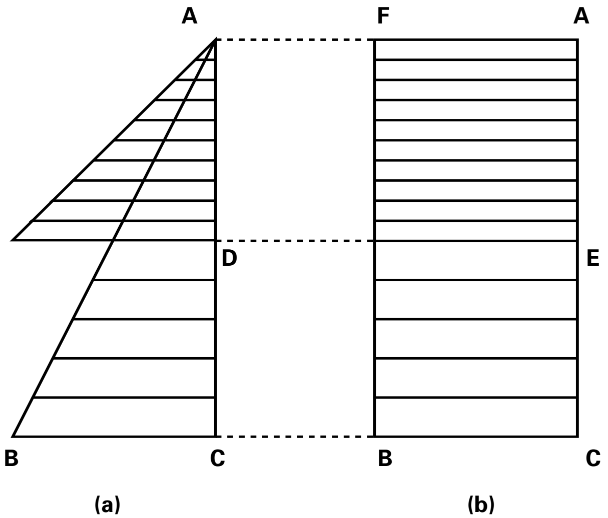


Fig. 3

[12] Galileo Galilei, *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, tolemaico, e copernicano*, Florencia, 1632. La demostración, en EN, VII, 255-56. Sin embargo, la demostración de los *Discorsi* (EN, VIII, 208-09) presenta un punto problemático. De acuerdo con lo visto, Galileo no puede comparar dos colecciones de grados de velocidad, una correspondiente al movimiento uniformemente acelerado y la otra al uniforme. Debe partir de *la misma* colección de grados –la del movimiento uniformemente acelerado– y construir sobre ella la colección de grados de velocidad del paralelogramo que representa el movimiento uniforme. Sin embargo, para mostrar que lo que falta de grados de la velocidad en la primera mitad del movimiento acelerado se compensa con el exceso de la segunda mitad, da por supuesto que ambas colecciones tienen el mismo número de grados, estableciendo así una relación de igualdad entre dos conjuntos infinitos. Esta inconsistencia, así como otra del mismo tipo que aparece en el Escolio al Problema IX (EN, VIII, 243-44) fue puesta de manifiesto por P. Galluzzi, *Momento*..., op. cit., pp. 352-54, quien piensa que el error fue motivado porque era "instintivamente plausible" suponer que dos superficies iguales estuviesen compuestas por agregados iguales. Pienso que también podría decirse que lo que condujo a Galileo a este error era la suposición de que la línea que representa al tiempo tuviese una distribución homogénea de puntos (lo que supone afirmar la regularidad del flujo del tiempo), y de ahí concluyese que su número de puntos es

Con este teorema, todo movimiento uniformemente acelerado se puede sustituir por un movimiento uniforme equivalente. Y dos movimientos acelerados, que a causa de la concatenación de indivisibilismo, correspondencia uno a uno entre los puntos de distintas líneas, y postulado de continuidad, no se podían comparar directamente, resultan así comparables. Consideremos el caso de dos movimientos acelerados, ambos partiendo del reposo, a lo largo de dos planos inclinados de la misma altura, o por un plano inclinado y su vertical. Si se representan los grados de velocidad en función del tiempo, se obtiene la figura 3(a). Como se ve en ella, las velocidades se representan por triángulos de la misma base (el móvil alcanza el mismo grado final de velocidad) pero de desigual altura, pues los tiempos de los movimientos son distintos.[13] Sustituyámoslos ahora por los movimientos uniformes equivalentes, tal como se muestra en la figura 3(b). Se ve que el mismo agregado de grados de velocidad que, en la figura (a), originaba dos triángulos de área distinta, ahora origina dos cuadriláteros de área distinta, aunque ambos estén engendrados por la misma colección de líneas. Pero si nos olvidamos de las colecciones de grados de velocidad y pasamos a considerar las áreas, entonces todo está como debe ser, pues dos movimientos uniformes realizados en tiempos distintos con la misma intensidad de velocidad no pueden tener la misma velocidad.

Así pues, sólo bajo las condiciones de esta demostración del Teorema I –el mismo intervalo de tiempo, y un solo movimiento acelerado comparado con otro uniforme construido a partir del mismo– pudo eludir Galileo las fuertes restricciones impuestas por su teoría de indivisibles. Sólo en este caso la razón entre dos colecciones de grados de velocidad es la misma que la razón entre las superficies que engendran estas colecciones. Esto es, sin embargo, suficiente para sacar una conclusión independiente del concepto de velocidad como colección de grados o intensidades: ahora los movimientos acelerados que parten del reposo –nótese esta restricción– se pueden caracterizar, no ya por una superficie, sino por su grado máximo de velocidad. Y así, cuando se trata de comparar dos movimientos acelerados mediante sus movimientos uniformes equivalentes, la comparación entre ellos no se efectúa a través de sus velocidades, sino a través de su grado de velocidad que, conforme al enunciado de este Teorema, corresponde a la mitad del grado máximo alcanzado en el correspondiente movimiento uniformemente acelerado.[14] El significado se vuelca aquí sobre el de grado

---

doble del de aquéllos que constituirían su mitad. Sea como fuere, y como se ha visto por la demostración del *Dialogo*, el problema podría haberse eludido fácilmente.

[13] Como se hace notar en P. Damerow et al, *Exploring*..., op.cit., pp. 237-38. Mis conclusiones, sin embargo, difieren de las suyas.

[14] Esto es precisamente lo que se señala en P. Damerow *et al*, *Exploring*..., op. cit., p. 233, refiriéndose a la deducción de la ley de caída. Su renuncia a abordar los fundamentos indivisibilistas de Galileo les limita, sin embargo, a constatar esta circunstancia, así como la existencia de problemas a la hora de representar la velocidad como un área, sin llegar a esclarecer su origen. De este modo, califican de "paradojas" lo que aquí se muestran como limitaciones de

máximo, no el del grado medio de la "ley de Merton", lo que, dicho sea de paso, distingue con claridad ambas formulaciones y favorece la hipótesis de un hallazgo independiente por parte de Galileo.

Vayamos a la segunda opción anteriormente mencionada. Para lograr la comparación directa entre dos movimientos acelerados, Galileo tenía que introducir una relación que vinculase las velocidades, las colecciones de grados, con alguna otra magnitud a nivel finito. Y ésta la introdujo como Postulado: "Acepto, que los grados de velocidad adquiridos por el mismo móvil sobre planos diversamente inclinados son iguales cuando las elevaciones de los mismos planos son iguales".[15] O, dicho de otro modo: a descensos verticales iguales, desde la misma altura, corresponden velocidades iguales. Partiendo el móvil en todos los casos del reposo, la igualdad de estos grados de velocidad implica la de las velocidades mismas.

Al publicarse la primera edición de los *Discorsi*, Galileo, al parecer, no tenía una demostración de esta proposición –de ahí su introducción como Postulado–, de modo que intentó una justificación de corte experimental, en cuya consideración no entraré. En la segunda edición, un anexo de la mano de Viviani presentaba una demostración basada en un principio dinámico que aparecía ya en *Le mecaniche* (1593). Según dicho principio, el "ímpetu" o "momento parcial" de un grave en su movimiento por un plano inclinado es al "ímpetu máximo y total" como la longitud del descenso vertical es a la longitud del plano inclinado. La nueva magnitud que introduce, el momento de la gravedad, es una medida de la modificación del peso que depende sólo de la inclinación del plano y no de su longitud, y que resulta proporcional a la velocidad de descenso del grave por dicho plano. Así, tal como se afirma en el anexo, los momentos son como las velocidades, esto es, como los espacios que atravesaría el móvil por la inclinada y por la vertical en el mismo tiempo. Ésta es la comparación entre las velocidades de dos movimientos acelerados que buscaba Galileo.

El Postulado le permitió abordar la demostración de una serie de teoremas sobre el movimiento acelerado que se abre con el Teorema III, conocido como el teorema del plano inclinado. En él se afirma que si el mismo móvil, partiendo del reposo, se mueve por un plano inclinado y por la vertical, cayendo desde la misma altura, los tiempos de estos movimientos estarán entre sí como las longitudes recorridas por el plano y por la vertical.[16] La demostración se basa en una aparentemente injustificada aplicación del Teorema I para movimientos uniformes: si dos espacios son atravesados por

---

la teoría. La observación relativa al grado máximo de velocidad la hacen en el contexto de la discusión del Teorema II (donde se deduce la ley de caída libre), y afirman que con esto Galileo se libra de las paradojas que aparecen al representar la velocidad por un área. No obstante, según he intentado mostrar, tal representación es lícita en este contexto, al tratarse de un solo movimiento uniformemente acelerado y su movimiento uniforme equivalente.

[15] EN, VIII, 205.

[16] EN, VIII, 216-17.

un móvil con los mismos grados de velocidad, entonces los tiempos guardan las misma razón de los espacios.[17]

Hasta la fecha, las opiniones están divididas respecto a la demostración de esta proposición. Hay quienes creen que, simplemente, Galileo cometió un error, aplicando equivocadamente un teorema que sólo había demostrado para movimientos uniformes.[18] Otros creen que en realidad está empleando el Teorema I para movimientos uniformemente acelerados, que permite su reducción a movimientos uniformes equivalentes.[19] Finalmente, otros han buscado entre sus manuscritos algún testimonio de una demostración que, por una u otra razón, no fue recogida en los *Discorsi*. Así, P. Galluzzi encuentra tal testimonio en un borrador del Teorema.[20] En él Galileo divide la perpendicular y la inclinada en innumerables espacios iguales y correspondientes ("quasi innumera quaedam spaciola"). En cada par de espacios, éstos están entre sí como la inclinada a la perpendicular; y se recorren con el mismo grado de velocidad ("suntque in singulis binis sibi respondentibus iidem velocitatis gradus"). Esta división de la perpendicular y la inclinada en el mismo e indefinido número de pequeños espacios, que anuncia los procedimientos infinitesimales, abre una vía para resolver la incomparabilidad impuesta por la teoría de indivisibles. Todavía, como advierte el mismo Galluzzi, tiene en su contra el principio de continuidad. Esto estaría en consonancia con la interpretación de Galluzzi del "momento de la velocidad" en términos infinitesimales, de modo que cada uno de estos momentos, operando en un instante, correspondería a una distancia recorrida.[21] Así, la equivalencia de un movimiento acelerado a otro uniforme establecida en el Teorema I se fundamentaría en la suspensión de la aceleración a nivel infinitesimal, gracias a la cual los grados en el movimiento acelerado se reducirían a grados de velocidad en el movimiento uniforme.[22] La consecuencia, si interpreto correctamente las ideas de Galluzzi, es que la teoría de indivisibles presentada en la Primera Jornada se convertiría, en la Tercera, en una ambigua teoría infinitesimal que Galileo, consciente de su incompatibilidad con el principio de continuidad, habría procurado ocultar.

Por otra parte, según la interpretación de P. Souffrin,[23] en la demostración del Teorema III Galileo no se habría referido al Teorema I para movimientos uniformes, sino a una versión generalizada del mismo hallada entre

---

[17] EN, VIII, 192.

[18] W. L. Wisan, "Galileo's...", op. cit., p. 220.

[19] P. Damerow et al, *Exploring...*, op. cit., p. 239. Si bien a esta interpretación se opone el hecho de que Galileo presentase claramente esta vía como un camino alternativo.

[20] P. Galluzzi, *Momento...*, op. cit., pp. 359-60. El borrador, en EN, VIII, 388.

[21] Ibid., p. 369.

[22] Ibid., pp. 355-56.

[23] Pierre Souffrin, "Du mouvement uniforme au mouvement uniformément accéléré. Une nouvelle lecture de la démonstration du théorème du plan incliné dans les *Discorsi* de Galilée", *Bolletino di Storia delle Scienze Matematiche*, VI (1986), Fasc. 1, 135-44.

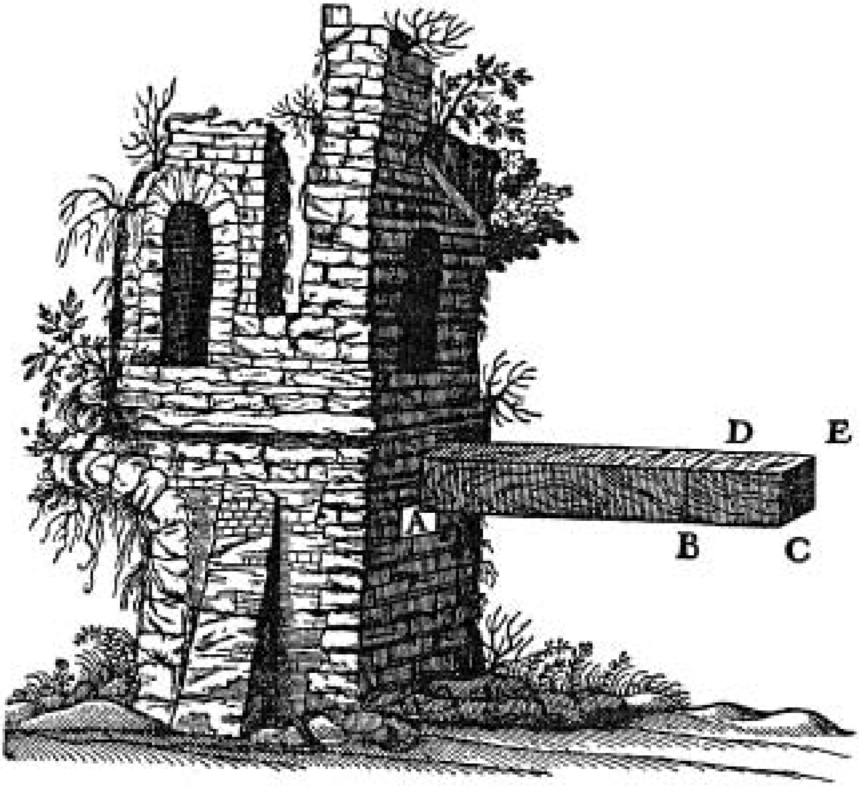
sus manuscritos.[24] En esta versión se consideran dos longitudes divididas en una multiplicidad de partes que se corresponden una a una entre sí. Si estas partes se recorren con movimientos uniformes, de modo que en cada par de partes las velocidades son iguales, entonces la razón de la suma de los espacios recorridos por cada una de las longitudes es como la razón de los tiempos invertidos en recorrerlas. Galileo, así, habría realizado un paso al límite que convertiría esas porciones "casi innumerables" en una infinitud de movimientos uniformes infinitesimales.

El atractivo de estas interpretaciones es indudable, pero atribuyen a Galileo unas concepciones proto-infinitesimales que, cuanto menos en su obra publicada, Galileo nunca explicitó; todo lo contrario, sostuvo, como se ha visto, una teoría indivisibilista. Lo cual no quiere decir que no tantease la posibilidad de una demostración aproximada basada en una reducción de una serie de tramos acelerados a uniformes. Pero, de hecho, hay una demostración que no incluye en absoluto estas consideraciones, y es la que se presenta en el anexo de Viviani arriba comentado, en donde se hace uso del segundo corolario al Teorema II para movimientos uniformemente acelerados.[25]

Conclusión

En los primeros tiempos del análisis infinitesimal, a éste se le calificó con frecuencia de "teoría de indivisibles". En realidad, la verdadera teoría de indivisibles fue la que sostuvo Galileo quien, como he tratado de mostrar, aplicó las técnicas entonces disponibles, llevándolas a un gran refinamiento. Pero al poner a salvo la teoría de las objeciones tradicionales que se le habían planteado, estableciendo la ausencia de razones entre infinitos, ésta se convertía en una herramienta muy limitada, pues no podía convertirse en un cálculo. Como se ha apuntado, el cálculo arrancaría de la mano de Cavalieri y Torricelli, con otro concepto de infinito y con la extraña y paradójica propiedad de unos puntos que dejaban de ser indivisibles para cobrar una cierta extensión, convirtiéndose así en infinitesimales. Entre tanto, Galileo sacó todo el partido posible a lo que tenía entre manos.

[24] EN, VIII, 372.
[25] EN, VIII, 218-19.


D
E
A
B
C