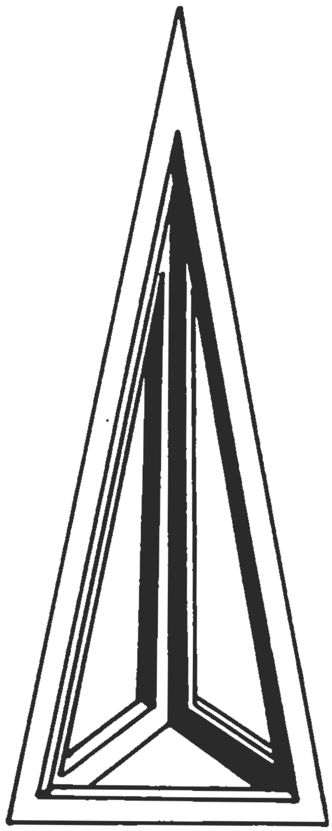
Tales: el Comienzo de la Geometría Racional



José Montesinos Sirera.
Profesor de Matemáticas.
I.B. Villalba Hervás.

La figura de Tales de Mileto es la primera que encontramos en la historia de la geometría griega. Lo que se sabe realmente sobre su vida y su obra es bien poco. Toda su figura aparece, ya desde los tiempos de Platón, envuelta en la leyenda. Parece que nació en el último tercio del siglo VII (a.c.) y que vivió en la primera mitad del sexto. Está considerado también como el primer filósofo en la historia de Grecia: fundador de la escuela de Mileto, a la cual pertenecieron después Anaximandro y Anaximenes.

Limitándonos a la actividad matemática de Tales, observamos que el principal testimonio de ella lo debemos a Proclo, el filósofo y matemático neo-platónico (410-485 d.c.), que en su "Elenco de geómetras" dice: "Tales fue el primero que, habiendo ido a Egipto, trajo a Grecia esta ciencia (la geometría), y él mismo encontró muchas cosas, y de muchas indicó los principios a los que vinieron después de él, algunas cosas tratadas en modo más general (katholikòteron), y otras en modo más sensible (aisthetikòteron)".

Pero antes de continuar con Tales, es necesario que expliquemos lo que entendemos por GEOMETRIA RACIONAL, o en palabras de F. Klein, GEOMETRIA DE PRECISION. Es bien sabido que la geometría griega no nace de la nada y que ya preexistía una geometría egipcia y caldea, pero en esta geometría los conceptos están ligados a la materia, y su objetivo es el de encontrar reglas de medida, muchas veces aproximaciones, para aplicarlas a casos concretos. Esta geometría pre-helénica pasa a Occidente a través de Grecia y es aquí donde adquiere el carácter racional, científico, mediante la IDEALIZACION de los entes geométricos.

Esta idealización tiene lugar bajo los dos aspectos siguientes:

1) La liberación de la materia: triángulos, polígonos y círculos son entes inmateriales en la geometría griega.

2) La consideración de entes geométricos racionalmente: PUNTO sin dimensiones, LINEA sin ancho, SUPERFICIE sin espesor.

Está universalmente admitido que esta doble idealización tuvo lugar por primera vez en Grecia, aunque con las fuentes documentales que se disponen hasta el momento, sería realmente una atrevida conjetura atribuir a Tales estos logros, especialmente el segundo de ellos. Posteriormente haremos un "ejercicio" de historia de la matemática, tratando de averiguar cuándo tiene lugar la fundamental concepción de "punto sin dimensión", que como veremos está íntimamente ligado al descubrimiento del número irracional.

Tales es, sin embargo, el afortunado primer hombre al que se le atribuyen descubrimientos matemáticos completos. Los siguientes:

I) TODO CIRCULO QUEDA DIVIDIDO EN PARTES IGUALES POR EL DIAMETRO.

II) LOS ANGULOS EN LA BASE DE UN TRIANGULO ISOSCELES SON IGUALES.

III) LOS ANGULOS OPUESTOS POR EL VERTICE QUE SE FORMAN AL CORTARSE DOS RECTAS, SON IGUALES.

IV) UN ANGULO INSCRITO EN UNA SEMICIRCUNFERENCIA ES RECTO.

V) SI DOS TRIANGULOS SON TALES QUE DOS ANGULOS Y UN LADO DE UNO DE ELLOS SON RESPECTIVAMENTE IGUALES A DOS ANGULOS Y UN LADO DE OTRO, ENTONCES LOS DOS TRIANGULOS SON CONGRUENTES.

Las fuentes históricas sobre las que reposan tales atribuciones son de tercera mano. Por una parte, Proclo, a través de una copia de una historia de la geometría (perdida) de Eudemo, discípulo de Aristóteles. Por otra parte, Diógenes Laercio (200 - ? d.c.), quien a su vez se refiere a Apolodoro (150 a.c), Calímaco (320-240 a.c.) y Gerónimo (s. III a.c.).

Proclo dice que Tales **demostró** la primera, **estableció y enseñó** la segunda y **descubrió pero no demostró** la tercera.

Surgen aquí las primeras cuestiones: ¿Qué significado tenía para Tales la "demostración"?. Ciertamente no podía ser una demostración enmarcada en un sistema hipotético-deductivo, pues la aparición de tales Sistemas o "Elementos" es posterior, siendo el primero del que se tiene noticia, aunque no se conserva, atribuído a Hipócrates de Khios (470-400). ¿Una comprobación experimental? o ¿Qué otro tipo de "prueba convincente"?.

Silvio Maracchia en su artículo "Talete nello sviluppo della geometria razionale", después de observar que la SIMETRIA es la característica común a las tres primeras proposiciones, opina que Tales podría haber usado una especie de *"Principio de razón* *suficiente"*. Del observar la figura de un triángulo isósceles podría surgir la convicción de que "no hay ningún motivo para que los ángulos en la base no sean iguales". Lo mismo se podría decir de la propiedad del diámetro de dividir en dos partes iguales a un círculo o del hecho de que dos ángulos opuestos por el vértice son iguales. Algo similar habría hecho Anaximandro (discípulo de Tales) cuando establece que la "inmovilidad" de la Tierra es debida a su distribución uniforme, como cuenta Aristóteles en "De caelo".

Otros historiadores de la matemáticas y entre ellos, von Fritz y Szabó, sostienen que en una primera etapa de la matemática griega, las técnicas demostrativas se reducen a una simple ilustración visual, tanto para la aritmética como para la geometría.

Es a partir de mediados del siglo V (a.c.), cuando se detecta una tendencia anti-ilustrativa y anti-empírica en las demostraciones y aparece la demostración indirecta o demostración por reducción al absurdo, por influencia de la escuela filosófica eleática.

En "Los Elementos" de Euclides, la primera de nuestra proposiciones es la definición 27 del Libro I, mientras que la segunda y la tercera son respectivamente las proposiciones 5 y 15 del mismo libro.

La autoría por parte de Tales de las proposiciones 4 y 5 a él atribuídas es aún más problemática (Heath, A history of Greek Geometry, Tomo I, pag. 136). Que "un ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto", segun Apolodoro es un descubrimiento de Pitágoras y según Pánfilo (s. I a.c.) es de Tales, y ésto nos lo cuenta Diógenes Laercio.

Las dificultades de aceptar la autoría de Tales estriban en que de ser cierto, éste hubiese estado en condiciones de saber la proposición fundamental y eje de toda la geometría pre-euclídea: LA SUMA DE LOS ANGULOS DE UN TRIANGULO ES DOS RECTOS (Euc. I.32). Pero está bastante establecido que el descubrimiento y demostración de este teorema es obra de los pitagóricos.

Finalmente, sobre nuestra proposición quinta (el tercer criterio de igualdad de triángulos), dedujo Eudemo que debía ser conocida por Tales, por el hecho, según él necesario, de que éste sabía un método para determinar la distancia de un barco a la costa. (La conjetura más aceptada es que para ello, Tales hizo uso simplemente de la semejanza de triángulos).

Podemos resumir así, la figura de Tales con las palabras de Proclo: *"...y algunas cosas las trató en modo más general y otras en modo más sencillo"*. Tales es el nexo de unión entre la geometría material y empírica de los egipcios y la geometría inmaterial y racional de los griegos, que más tarde se vería elevada al rango de ciencia teórica con la formación de "Los Elementos".

Pasemos ahora al anunciado "ejercicio de historia de la matemática": ¿cuándo surgen los conceptos de **punto sin dimensión-número irracional**?

Seguiremos los pasos de Attilio Frajese en su libro "Atraverso la storia della matematica".

Comencemos, haciéndonos dos preguntas fundamentales: ¿Por qué y cuándo surge el concepto de **PUNTO SIN DIMENSION** o el equivalente de **SEGMENTO FINITO CON INFINITOS PUNTOS**?

¿Por qué en la matemática pre-helénica (Egipto-Mesopotamia) la aritmética está más desarrollada que la geometría y esta relación se invierte en la matemática griega?

Veremos que la clave y respuesta a estas dos cuestiones está en el descubrimiento del **NUMERO IRRACIONAL** o el equivalente de **MAGNITUDES INCONMENSURABLES.**

Pitágoras (570-500 a.c.) quedó impresionado por dos descubrimientos. El primero era que un fenómeno puramente cualitativo a primera vista, como el de la armonía musical, se basa en esencia en las proporciones puramente numéricas 1/2, 2/3, 3/4..[1] El segundo era que el ángulo recto está relacionado con las proporciones numéricas 3-4-5, ó 5-12-13 (los lados de triángulos rectángulos). Estos descubrimientos llevaron a Pitágoras a la generalización, un tanto fantástica, de que todas las cosas son, en esencia, números. Esta idea resultó fructífera en muchos casos y en particular condujo al estudio de figuras geométricas simples tales como cuadrados, triángulos rectángulos e isósceles y también ciertos sólidos simples como las pirámides, a través del gnomon o crecimiento gnomónico.[2]

Siguiendo esta corriente, los pitagóricos (seguidores de Pitágoras en la escuela místico-filosófica creada por éste en Crotona), dotaron de una estructura corpuscular al segmento de recta, de tal manera que un tal segmento contendría un número finito de puntos-corpúsculos, esto es, puntos sin dimensión. De esta forma a cada segmento se le podría asociar un número, con el consiguiente y tranquilizador resultado de que dos segmentos cualesquiera serían siempre conmensurables, es decir: existiría siempre un segmento contenido un número entero de veces en aquellas (el segmento que contuviese un número de puntos igual al máximo común divisor de los números correspondientes a los segmentos dados. En el peor de los casos, el propio punto unidad).

La geometría estaría así en íntima relación con la aritmética, dando lugar a una **ARITMO-GEOMETRIA.**

---

[1] Hay una estrecha relación entre los seguidores de pitágoras y estudios primitivos sobre la armonía musical. Así por ejemplo, en un escolio anónimo del "Fedón" de Platón, hay una referencia a un trabajo sobre la música realizado por Aristógeno, discípulo de Aristóteles, en donde se dice que HIPASSO DE METAPONTO realizó el siguiente experimento: en cuatro discos metálicos de igual diámetro y de espesor 1, 4/3, 3/2, 2, se observaba que golpeando dos cualesquiera de ellos se obtenía la misma armonía de sonidos que los producidos en dos cuerdas cuyas longitudes estuviesen en la misma proporción que el grosor de los mismos. Teón de Esmirna atribuye también a Hipasso un experimento similar con cuatro vasos de cristal, el primero de los cuales estaba vacío, mientras que los otros estaban llenos de agua en proporción 1/2, 1/3, 1/4.

[2] Ver el libro "Conjeturas y refutaciones" de K. Popper (Ed. Paidos), pag. 105.

Pero los matemáticos griegos hicieron un admirable y terrible descubrimiento: **la diagonal y el lado de cualquier cuadrado son inconmensurables,** esto es, no existe un segmento que sea contenido un número exacto de veces tanto en el lado como en la diagonal de un cuadrado.

Admirable descubrimiento, porque llegaron a él con la fuerza del razonamiento, puesto que se trata de un hecho que trasciende a cualquier posibilidad de medida o experimentación; y fue un descubrimiento terrible para la "ingenua" teoría corpuscular y los intentos de aritmetizar la geometría, abriendo además las matemáticas a los "peligros" lógicos del infinito actual.

La existencia de segmentos inconmensurables llevó naturalmente, aunque probablemente no sin resistencias, a abandonar la teoría corpuscular, porque no servía hacer más y más pequeño el punto-corpúsculo: había que anularlo, reducirlo a cero, esto es: fue necesario introducir el concepto de **PUNTO SIN DIMENSION.**

Hemos establecido así el nexo lógico entre los conceptos punto sin dimensión/segmentos inconmensurables. A continuación trataremos de llegar también por vía de la Historia, a **cuándo y cómo** tuvo lugar este fundamental descubrimiento, teniendo en cuenta que nuestras posibilidades de investigación histórica se han duplicado: podremos investigar indiferentemente en torno a la introducción del punto sin dimensión o bien en torno al primer descubrimiento de segmentos inconmensurables.

Investigaremos a lo largo de los tres siglos de geometría pre-euclídea: 600-300 (a.c.). Con estas dos fechas asociaremos a TALES y a EUCLIDES respectivamente. En sus "Elementos", Euclides trabaja con los entes geométricos ya doblemente idealizados y trata ampliamente el tema de los inconmensurables.

ARISTOTELES (384-322 a.c.), habla en sus obras varias veces sobre la inconmensurabilidad del lado y la diagonal del cuadrado. Concretamente en sus "Primeros analíticos", se encuentra la famosa demostración en la que de suponer conmensurables el lado y la diagonal de un cuadrado se llega al absurdo de que un mismo número es par e impar a la vez..[3]

PLATON (427-347 a.c.), en su diálogo "Teeteto", dedicado al matemático ateniense del mismo nombre, reevoca las investigaciones de éste encaminadas a una definición general de número irracional; pero Teeteto muere hacia el 369, con lo cual y puesto que la citada investigación la realiza de joven, podemos ya situarnos en el 400.[4]

---

[3] En un fragmento de la "Metafísica", dice Aristóteles: "Todos comienzan, de hecho, maravillándose de que una cosa pueda ser en un cierto modo, como los trucos de un malabarista, o sobre los movimientos del sol, o sobre la inconmensurabilidad de la diagonal respecto al lado en un cuadrado. Maravilloso resulta, ciertamente, que no exista algo pequeñísimo como unidad de medida común. Pero cuando se ha entendido, lo que realmente maravillaría a un matemático es que la diagonal fuese conmensurable con el lado". En un paso de los "TÓPICOS", Aristóteles es decididamente platónico cuando afirma que la profundidad y la contemplación de esta inconmensurabilidad es causa de gozo, de una alegría que no tiene opuesto: i"Es necesario establecer si cada cosa tiene un contrario o si no lo tiene. Así por ejemplo, es contrario al placer de beber el dolor de la sed: Pero ningún contrario existe al hecho de contemplar con maravilla que la diagonal es inconmensurable al lado de un cuadrado."

[4] La fecha de la muerte de Teeteto en una batalla ha sido establecida con absoluta certeza por la historiadora Eva Sachs en su artículo "The Thaeteto mathematico" (Berlín, 1.914) El diálogo platónico "Teeteto" es una fuente preciosa para la reconstrucción de la formación de la teoría de los irracionales. Escrito poco despues de la muerte de aquél (368/67 a.c.), constituye un homenaje a la memoria de su amigo.. Se asiste a un coloquio que tendría lugar en Atenas entre Sócrates, el matemático Teodoro de Cirene y su joven alumno Teeteto. Este es presentado por Teodoro como extremadamente inteligente y precoz. Sócrates para ponerlo a prueba le pregunta qué es la ciencia, el conocimiento (episteme). Teeteto contesta enumerando algunas ciencias. Sócrates insiste: no quiere saber de unas ciencias particulares, sino qué es la ciencia. Teeteto confiesa que no sabe definirla, pero responde que una situación análoga se le había presentado cuando su maestro Teodoro le había mostrado algunas construcciones geométricas en las que se demostraba que el lado de un cuadrado de área 3 y el de un cuadrado de área 5 no son comensurables con el lado de un cuadrado de lado 1.En nuestro lenguaje: Teodoro le habría demostrado la irracionalidad de $\sqrt{3}$ y de $\sqrt{5}$. Pero Teodoro no se habría limitado a estas demostraciones, sino que habría continuado demostrando una por una la irracionalidad de $\sqrt{6}$, de $\sqrt{7}$, ... hasta llegar a la de $\sqrt{17}$, sin dar una demostración general que sirviese para establecer la irracionalidad o no de cualquier $\sqrt{}$ .Teodoro es presentado como un anciano en el diálogo platónico. Según Proclo, fue un contemporáneo de Hipócrates de Khios y perteneció a la generación entre Anaxágoras y Platón. Como aquel nación alrededor del 500 y Platón en el 428, esto implicaría que Teodoro nació entre el 470 y el 460, lo que estaría de acuerdo con el diálogo platónico de presentarlo como un anciano en el año 399, año en el que Platón sitúa la acción. No se desprende del texto platónico que lo que demostró Teodoro a

Pero varias decenas de años antes, **HIPOCRATES DE KHIOS** estudió la cuadratura de las lúnulas, hecho que requiere trabajar ya en el campo de la geometría de precisión: concepción racional de los entes geométricos.[5]

Podemos ir todavía más atrás en el tiempo, llegando al menos al 450. Es alrededor de esta fecha que **ZENON DE ELEA** desarrolla sus celebres argumentos contra el movimiento. En el primero de ellos, el de la "dicotomía", toda la argumentación reposa sobre el hecho de que entre dos puntos de un segmento siempre hay un punto intermedio. Pero esta posibilidad comporta necesariamente el concepto de punto sin dimensión.

Hemos llegado pues, a la fecha de 450 a.c. como "términus ante quem".

Finalmente, y siempre siguiendo a Attilio Frajese en su libro "Atraverso la storia della matematica", un "términus post quem" sería la fecha del 500 a.c.. Es alrededor de esta fecha cuando los llamados pitagóricos habrían confeccionado la lista de los opuestos (Aristóteles, Metafísica, Libro I).

finito	**infinito**
impar	**par**
uno	**muchos**
cuadrado	**rectángulo**
derecha	**izquierda**
masculino	**femenino**
reposo	**movimiento**
recto	**curvo**
luz	**oscuridad**
bueno	**malo**

Este cuadro de los opuestos está formado por diez categorías de contrarios, según los cuales estaría regido el Universo. Una explicación del porqué de las cuatro primeras categorías sería la siguiente: los

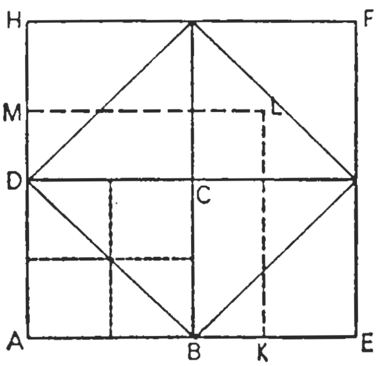
Teeteto fuese un descubrimiento reciente, aunque el hecho de dar demostraciones separadas para cada caso probaría que la teoría no estaría muy desarrollada. Pero incluso de suponer que el descubrimiento fuese muy reciente a esta fecha (399 a.c.), el texto platónico indicaría que la irracionalidad de $\sqrt{2}$ habría sido demostrada anteriormente y no sería debida al propio Teodoro.

[5] Simplicio, en su comentario a la "Física" de Aristóteles, nos da un fragmento de la "historia de la geometría" de Eudemo, en el que se cuenta cómo Hipócrates cuadró algunas lúnulas, argumento de gran interés y belleza, y que le hizo concebir esperanzas de cuadrar el círculo, uno de los tres problemas clásicos, junto con el de la duplicación del cubo y el de la trisección del ángulo (a resolver con regla y compás). Hipócrates, en su demostración, usó la propiedad de que "dos círculos son entre ellos como los cuadrados de los diámetros respectivos", propiedad para cuya "demostración" le fue necesario afrontar el infinito.

"números cuadrados" se obtienen sumando los sucesivos números impares: 1+3=4; 4+5=9; 9+7=16; 16+9=25 ... Mientras que sumando los sucesivos números pares se obtienen siempre "números rectangulares": 2+4=6=2.3; 6+6=12=3.4; 12+8=20=4.5; 20+10=30=5.6; ..., luego al **impar** corresponde el **cuadrado**, el **uno** (una sola forma), lo **finito,** mientras que al **par** corresponde el **rectángulo, muchos, lo infinito** (infinidad de formas: rectángulos no semejantes entre sí). Esto demostraría que en esta época la Aritmética de los números enteros estaría todavía en estrecha relación con la geometría, lo cual significaría que no se tendría noticia del "inconmensurable", destructor de la aritmo-geometría.

Hemos restringido pues, la fecha del descubrimiento de los irracionales al periodo 500-450 a.c.

¿Pero sería posible que los griegos dispusiesen en esta temprana fecha, de los conocimientos necesarios para tan profundo descubrimiento?



1

La respuesta es positiva, y la clave está en el "MENON", diálogo platónico: Este diálogo, de clara inspiración pitagórica, contiene en esencia una demostración muy sencilla de la inconmensurabilidad del lado y diagonal de un cuadrado. En el "Menón" se trata del problema del conocimiento: ¿Cómo es posible aprender lo que no se sabe? Sócrates responde con una especie de mito: aprendemos, porque en el proceso del aprendizaje, "recordamos" algo que ya sabíamos en una vida anterior, y como prueba de ello hace llamar a un muchacho esclavo de Menón, completamente ignorante, a quien propone un problema geométrico. Sócrates dibuja un cuadrado y propone al muchacho construir otro cuadrado de área exactamente doble. Supone que el cuadrado a doblar tiene dos pies de lado, y por tanto su área será de cuatro pies. Se propone primeramente como lado del cuadrado solución, AE, de longitud doble del cuadrado inicial, pero se observa que el cuadrado obtenido tendría entonces de área 16 pies cuadrados y no 8 como sería exacto. A continuación, y visto que la longitud 4 es excesiva se propone AK, de longitud 3. Sócrates constata que el área del nuevo cuadrado es 9.

Llegado a este punto, el muchacho se desanima y confiesa no saber qué hacer.

Hasta este momento, se ha demostrado la imposibilidad de la solución en el campo de los números enteros. La imposibilidad de solución aritmética termina aquí, (ciertamente, el Menón no es un tratado de matemáticas) pero la demostración puede completarse fácilmente, usando los mismos medios, haciendo ver que tampoco con fracciones puede resolverse el problema.[6]

Así pues, no existe ningún número entero o fraccionario, que exprese la relación entre lado y diagonal del cuadrado.

Sin embargo, hay una solución geométrica muy fácil: basta construir el cuadrado que tiene como lado la diagonal del cuadrado dado, y éste es claramente, como se ve en el dibujo, el cuadrado solución.

Queda así establecido un hecho de importancia capital: un problema que no es posible resolver por medio de la aritmética, viene resuelto con extrema facilidad mediante la geometría. La

[6] Observemos que en un número cuadrado, cuando viene descompuesto en factores primos, éstos están todos con exponente par. En particular, en un número cuadrado n^2, el factor 2 aparecerá con exponente par o no aparecerá. Así pues, en $2n^2$, el factor 2 aparecerá un número impar de veces y por tanto $2n^2$ no puede ser un número cuadrado. Veamos entonces que no existe un número fraccionario que multiplicado por sí mismo dé 8. Sea por ejemplo, un número fraccionario cuyo denominador sea 2. Tomemos como nueva unidad de medida la mitad de la anterior. El lado del cuadrado de partida no será ahora de 2 pies de largo, sino de 4 semi-pies. Su área no será ahora 4, sino 16 y el cuadrado doble buscado no tendrá área 8, sino 32. Pero $32=2.16=2.(\ )^2$, y ya sabemos que no existe ningún número entero que multiplicado por sí mismo dé $2n^2$. El hecho de que esta demostración se pueda generalizar a un denominador cualquiera, no quita la dificultad del proceso infinito.

aritmética de los números enteros y fraccionarios no es suficiente para describir la realidad geométrica.

Hasta aquí, la opinión o conjetura de Attilio Frajese, la cual hemos considerado oportuno exponer en esta ponencia, además de por su indudable brillantez, porque permite hacer un recorrido por todo el periodo pre-euclídeo, con nombres propios y situaciones fundamentales en la historia de la geometría griega. Pero dicho esto, debemos aclarar que estamos tratando uno de los problemas más arduos y controvertidos de la historia de las matemáticas.

Primeramente, no todos los historiadores de las matemáticas están de acuerdo en **COMO** se hizo el descubrimiento. Un numeroso grupo cree que éste se hizo a través de la comparación del **lado y la diagonal de un pentágono regular,** figura emblemática para los pitagóricos. Tampoco hay unanimidad en el **CUANDO**; mientras unos creen que el descubrimiento se hizo a comienzos del siglo V a.c., otros piensan que lo fue a finales del mismo siglo, siendo decisivo en esta cuestión la aceptación o no del conocimiento del inconmensurable por parte de Zenón de Elea y de Demócrito de Abdera.[7]

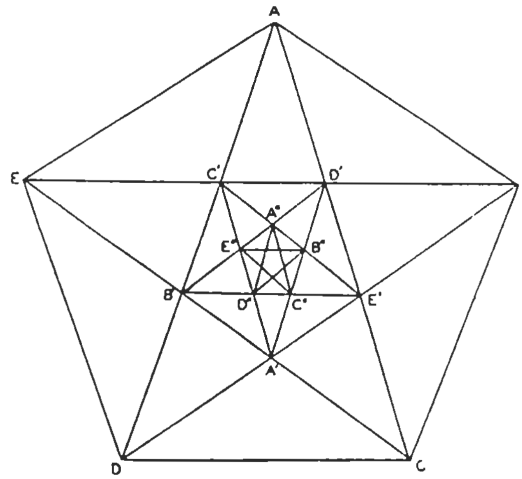
Veamos esquemáticamente las principales teorías o conjeturas al respecto; pero es necesario ver previamente dos cuestiones fundamentales:

I. La **ANTIPHAIRESIS**, o algoritmo de la división euclídea. Dadas dos magnitudes homogéneas A y B, a la mayor (supongamos A), se le sustrae la menor B, y sea C el resto. Si C es más pequeño que B lo restamos de éste, produciendo un nuevo resto. Si C es más grande que B, entonces es a C a quien restamos B. En cualquier caso obtendremos un nuevo resto D, y continuaremos con el proceso. En el caso de números este proceso

[7] Es importante subrayar que tanto Platón como Aristóteles, siempre que hacen referencia a la inconmensurabilidad y a su descubrimiento hablan del lado y la diagonal de un cuadrado.

es el conocido algoritmo de obtención del máximo común divisor. Similarmente, aplicado a magnitudes conmensurables, este algoritmo termina después de un número finito de casos (Euclides X,3). Pero en el caso de magnitudes inconmensurables este proceso continúa "ad infinitum" (Euclides X,1 y X,2).

II. Diremos que dos segmentos A y B están en **MEDIA Y EXTREMA RAZON** si el mayor (supongamos A) es la media proporcional entre el menor y la suma de ellos; esto es, si A.A=B.(A+B). Una propiedad de esta razón es que si A es mayor que B y ambas están en media y extrema razón, también lo están A+B y A, y análogamente B y A-B.



Así pues, la antiphairesis aplicada a dos segmentos en media y extrema razón, da sucesivamente segmentos en la misma razón y el proceso continuaría indefinidamente.

K. VON FRITZ, en un famoso artículo publicado en 1.945, defiende la tesis, llamémosla, del pentágono regular, según la cual el descubrimiento se hace por aplicación de la antiphairesis a la diagonal y al lado del pentágono, que están en media y extrema razón (la conocida razón aúrea).[8]

[8] Von Fritz, en su brillante artículo: "The discovery of incommensurability by Hipassus of Metapontum", defiende la tesis del descubrimiento "temprano" del inconmensurable (primera mitad del siglo V) y a través de la aplicación de la "antiphairesis" a la diagonal y al lado de un pentágono regular. El autor del descubrimiento sería el filósofo y matemático pitagórico Hipaso de Metaponto, quien según Jámblico, realizó también estudios sobre el Dodecaedro regular, cuyas caras son pentágonos regulares. Los pitagóricos usaban el pentágono regular con sus lados prolongados hasta las intersecciones como figura emblemática y el pentágono regular, afirma von Fritz, es exactamente la figura geométrica en la que la inconmensurabilidad puede ser "probada" o "vista" más fácilmente. Los conocimientos teóricos requeridos serían:
-El teorema de los triángulos isósceles.
-La suma de los ángulos de un triángulo es dos rectos.
-El método de encontrar el máximo común divisor por sustracciones mutuas.
La "demostración" no tendría la perfección requerida por un Euclides o un Hilbert, pero sería absolutamente convincente para los niveles de la época.

S. HELLER, en un artículo acepta las tesis de von Fritz, pero en otro propone un argumento paralelo, esta vez de aplicación de la antiphairesis a la diagonal y lado del cuadrado.

SIR THOMAS HEATH, en su libro "A history of greek mathematics", defiende la tesis del cuadrado y del descubrimiento en unas fechas tempranas. En su edición comentada de "Los Elementos de Euclides" (en los comentarios a la proposición X,2), critica la tesis del descubrimiento mediante la antiphairesis aplicada al pentágono, sostenida ya antes de 1.920 por **ALLMAN.**[9]

K. POPPER, en su libro "Conjeturas y refutaciones", defiende la tesis del cuadrado, por la vía del "Menón", pero no antes del 420, pues según él ni Zenón ni Demócrito conocían la existencia del irracional.

W. R. KNORR, en su libro "The evolution of the euclidean elements", defiende la tesis del cuadrado por la vía del "Menón", no antes del 430, pues si bien Demócrito sí conoce el irracional, es muy improbable que lo conociera Zenón.

Finalmente la tesis de **ATTILIO FRAJESE,** expuesta a lo largo de esta ponencia, es la de la escuela italiana: **ENRIQUEZ/FRAJESE/MARACCHIA,** inspirada en la obra del prestigioso historiador de la ciencia francés, **A. TANNERY**.[10]

Mariano Martínez, en su artículo "Los orígenes del método axiomático-deductivo en la matemática griega" defiende la tesis del "descubrimiento" del irracional por la vía "von Fritz": "¿Con qué sorpresa inesperada se encontró Hipaso?, pues con la de "descubrir", de "ver" con toda claridad que el proceso de antiphairesis no se iba a terminar nunca... ¿Cómo podría cerrarse un proceso esencialmente ilimitado?". Con el método de demostración indirecta o de reducción al absurdo de los eleáticos y concluye que la verdadera demostración sería la de Aristóteles de la diagonal y el lado de un cuadrado.

[9] Es importante hacer notar que la tesis de von Fritz, no tan brillantemente defendida, era ya la de Allman antes de 1.920. Heath, en sus comentarios a la proposición X,2 de Euclides, dedica unas líneas para negar plausibilidad a la teoría del descubrimiento a través de la aplicación de la antiphairesis a dos segmentos en media y extrema razón.

[10] Creemos interesante, para finalizar esta ponencia, citar el último párrafo del artículo de von Fritz: "Pero la solución de estos problemas cronológicos es importante,

BIBLIOGRAFIA

Boyer, C. (1986): Historia de las matemáticas. Alianza Univ.

Enriques/De Santillana. (1.936): Compendio di storia del pensiero scientifico. Zanichelli.

Frajese, A. (1.977): Atraverso la storia della matematica. Le Monnier.

Heath, T. (1.981): A History of greek mathematics. Dover.

Heath, T. (1.956): The thirteen books of the Elements. Dover.

Knorr, R. (1.975): The evolution of euclidean elements. Reidel.

Maracchia, S. (1.971): "Talete nello sviluppo della geometria razionale". Cultura e Scuola.

Maracchia, S. (1.969): "Sulla genesi della geometria razionale". Revista Archimede.

Martínez, M. (1.991): "Los orígenes del método axiomático-deductivo en la matemática griega". Seminario de Historia de la Matemática I. Madrid.

principalmente para mejor entender la vía en que los griegos fundaron las matemáticas y en las especiales características de esta fundación, que les permitieron en un sorprendente corto espacio de tiempo, hacer un descubrimiento, que sus predecesores babilónicos y egipcios, con sus métodos matemáticos altamente desarrollados no consiguieron en muchos cientos de años".

Popper, K. (1.972): Conjeturas y refutaciones. Paidos.

Rey Pastor/Babini (1.986): Historia de la matemática. Gedisa.

Tannery, A. (1987): Pour l'Histoire de la science Hellène. Jacques Gabay.

Vega, L. (1.986): La trama de la demostración. Alianza Univ.

Von Fritz (1.945): "The discovery of incommensurability by Hipassus of Metapontum". Annals of mathematics.