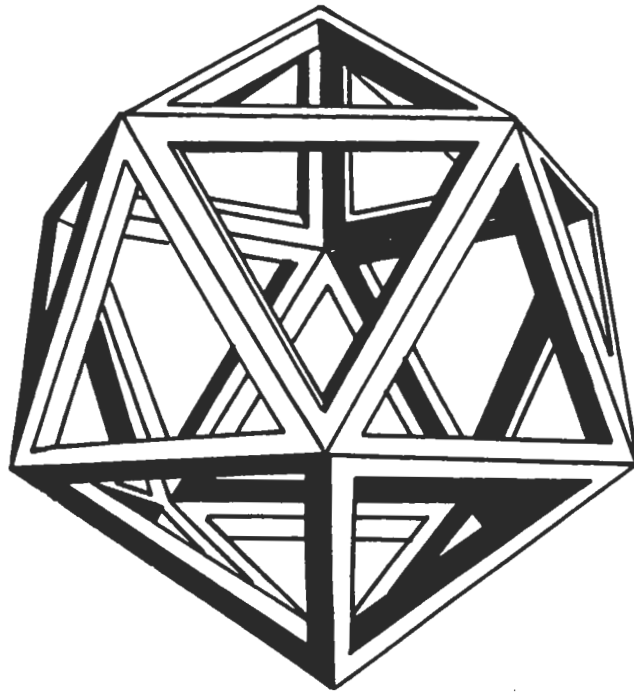


# LA GEOMETRÍA PITAGÓRICA



Sergio Toledo Prats.  
Profesor de Filosofía.  
I.B. Villalba Hervás.

**C**omprender qué es la geometría pitagórica exige conocer la cultura helena de los siglos VI y V a.n.e., pues como ha escrito Spengler, la matemática griega es incomprensible si no la ponemos en relación con la cosmovisión que la sustenta; no hay que dejarse engañar por la ingenuidad etnocéntrica que apoyándose en la validez formal de teorías aritméticas y geométricas , así como en la continuidad lingüística -traducción mediante- de ciertas nociones básicas -espacio, tiempo, número- nos haría percibir los saberes griegos simplemente como el origen y fundamento de la ciencia actual ; tal énfasis en semejanzas formales erraría con facilidad el sentido interno de la geometría pitagórica y su lugar dentro del saber de su época .



## Pitágoras y su Secta

**P**itágoras es más un nombre de leyenda que un hombre real: su biografía crece a medida que nos alejamos en el tiempo, de tal manera que encontramos menos datos en las llamadas fuentes intermedias -como Aristóxeno, Dicearco, Polibio Diodoro, Estrabón- que en sus biógrafos tardíos: Diógenes Laercio, Porfirio, Jámblico; naturalmente ello ocurre al precio de ganar en elementos inverosímiles y mágicos -reencarnaciones, bilocuidad- lo que se pierde en historia fiable. El panorama se reduce drásticamente cuando sólo contemplamos los testimonios del siglo V a.n.e.: dos fragmentos de Heráclito, uno de Ión de Quíos más cuatro versos, otros cuatro versos de Jenófanes y seis de Empédocles -que no citan su nombre aunque la referencia es segura - y tres pasajes de Heródoto, uno en que lo nombra y dos acerca de ritos y doctrinas pitagóricas. Platón lo cita una vez, otra a los pitagóricos y en varias ocasiones cita sus doctrinas sin referencias. Aristóteles lo nombra dos veces -aunque quizá sean interpolaciones posteriores- y varias a los pitagóricos, pero sabemos que escribió un libro titulado "Sobre los pitagóricos" del que no nos ha llegado ningún fragmento .

Suele datarse su nacimiento hacia el 570 a.C. en la isla jónica de Samos, de donde emigró hacia el 530 huyendo de la tiranía de Polícrates; es probable que viajara durante algunos años por Jonia, Egipto y Babilonia. Alrededor del 520 se estableció en Crotona , colonia al sur de Italia , donde funda una secta que se extendió a otras polis de la región antes de su muerte, debida al mal del piojo, hacia el año 500. Fuentes antiguas -Heráclito, Ión, Heródoto- dan por cierto que escribió varios libros , mientras que Aristóxeno y Dicearco lo niegan. Considerado ya en vida héroe



semidivino, encarnación del Rey Mago de las primitivas comunidades indoeuropeas, desde el siglo IV a.n.e. Pitágoras ya no es un hombre sino un nombre de leyenda.

Aunque parece ser que que los pitagóricos no tenían una ideología política definida se les ha achacado un cierto conservadurismo aristocrático; el prestigio del Maestro debió influir en la política de algunas colonias de la Magna Grecia, ya que la secta se vio envuelta en conflictos a raíz de levantamientos democráticos desde finales del s.VI a.n.e. hasta mediados del s.V a.n.e., fecha en la que se ve forzada al exilio; su dispersión geográfica motivó a un tiempo la extensión de sus creencias y su decadencia como grupo hasta su desaparición un siglo después. La regla de conservar en secreto sus actividades ha impedido que nos llegara información suficiente sobre la cronología y obra de las diversas generaciones de discípulos para poder historiar con certeza la evolución de la escuela, aunque tenemos datos sobre algunos miembros destacados: Hípaso, Filolao, Eurito, Arquitas; por otra parte, es detectable la influencia pitagórica en filósofos de primera línea ya desde el s.V a.n.e., como Parménides, Zenón y Empédocles, amén de la huella que dejará a lo largo de la obra platónica y en el propio devenir de la Academia, que centurias después los neoplatónicos Plotino, Porfirio, Jámblico y Proclo desarrollarán hasta la saciedad. Influencia que se ejerció igualmente en el ámbito de la medicina, tal como lo atestiguan los casos de Alcmeón, Damocedes, Hipón y el mismo Empédocles.

Desde el punto de vista religioso se ha conectado la secta pitagórica con la efervescencia religiosa que sacude la Grecia del siglo VI a.n.e. y cuya expresión es el orfismo, movimiento de religiosidad popular que sustituye el culto oficial a los dioses olímpicos por el culto a Dyonisos; quizá esté ahí el origen de su doctrina más importante: la reencarnación del alma inmortal. Entre el conjunto de reglas de conducta que comparten hay prescripciones religiosas, normas morales, reglas de cortesía, etc., lo que indica que elaboraron un modo de vida característico; destaquemos entre sus prácticas rituales el sacrificio exclusivo de



productos naturales -aceite, leche, miel- y el examen de conciencia, cuyo objetivo era además de moral ejercitar la memoria. Tras la muerte de Pitágoras la secta quedó escindida entre los matemáticos -aquellos que habían estudiado con El Maestro- y los acusmáticos-aquellos que tan sólo habían recibido sus prédicas .

Frente al entusiasmo y la revelación típicos de los cultos místicos hallamos en el pitagorismo su propio modo de contacto con la divinidad: la "sofía", sabiduría que está reservada a los miembros iniciados y celosamente guardada en secreto. Armonía, cosmos, virtud y teoría son nociones clave de su doctrina; armonía que rige el universo y se expresa en el cosmos, Todo ordenado que podemos conocer mediante la teoría de los cielos y los números, lo que nos convierte en seres virtuosos: concordia de la inteligencia humana con la razón cósmica. Según Dicearco las principales enseñanzas de Pitágoras fueron:

- El alma es inmortal y se reencarna
- Todo se repite y nada es nuevo
- Respeto a todo ser vivo

Aristóteles recoge otra enseñanza fundamental: que los principios de las Matemáticas son los principios de todos los seres y que los elementos de los números son los elementos de todos los seres . La educación matemática es el método catártico que conduce a la liberación del alma de la rueda del dharma ; no es extraño pues, que haya sido Pitágoras, como sostuvo Eudemo, quien convirtió tal saber en una ciencia de principios, superando el cálculo empírico de egipcios y babilonios. Desde Reidemeister se considera a los pitagóricos del s.V a.n.e. como los fundadores de la matemática deductiva y autores del primer tratado sistemático , parte del cual quedó recogido en el libro VII de los Elementos de Euclides .

El afán taxonómico típico del pensamiento primitivo se concreta en la famosa tabla de los opuestos, donde las tres



primeras parejas remiten a su cosmología, las tres siguientes a su aritmética, séptima y octava a su geometría, la novena a su orden cultural y la décima contagia toda la tabla concediendo superioridad moral a los elementos situados en primer lugar:

Límite - Ilimitado

Reposo - Movimiento

Luz - Oscuridad

Impar - Par

Uno - Múltiple

Cuadrado - Oblongo

Recto - Curvo

Derecho - Izquierdo

Masculino - Femenino

Bueno - Malo

## Alma y Reencarnación

**H**eródoto atribuyó erróneamente a los egipcios la doctrina de la metempsicosis, considerada hoy producto de la evolución interna de la religión griega ; parece ser que fue Ferécides el primero en hablar de inmortalidad del alma y de reencarnación , pero en cualquier caso hay que buscar sus raíces en las doctrinas órficas. El orfismo del s.VI a.n.e. representa una oleada de fervor religioso popular que se rebela contra la religión olímpica oficial y promueve antiguos ritos , viejas creencias; su dios será Dyonisos, ligado a arcaicos cultos



agrícolas que celebran la fecundidad vegetal, a la manía que posee mediante la uva embriagadora, al tiempo cíclico de las estaciones que siempre retornan y que comparte junto a Orfeo, el legendario músico, poeta y cantor tracio divinizado el mismo mitologema: ambos mueren despedazados y renacen. De aquí a la inmortalidad del alma hay un paso; que los órficos siguieron esa senda queda testimoniado por su doctrina de la retribución en el más allá y las tablillas de oro encontradas en tumbas de los siglos IV y III a.n.e. donde se da instrucciones al alma del difunto para ser reconocido por las divinidades de la muerte. La muerte de alguien produce en el grupo social al que pertenece un desorden, introduce un elemento de extrañeza, perverso: los ritos funerarios, presentes en la cultura humana desde hace al menos treinta mil años, tratan de conjurar tan funesto suceso. Pero el muerto no se va del todo: sus hechos, su imagen, su palabra, persisten en la memoria y en el sueño de los que sobreviven, y ambos mundos son tan reales para el primitivo como la caza o el sexo; es ahí donde hay que situar el origen del alma.

En Homero, máximo exponente de la religión olímpica, encontramos que la *psyche* es el aliento, signo de vida, pero no la vida animal misma, colectiva, llamada *tymós*, sino una especie de sombra, nuestro doble, que duerme mientras vigilamos y vigila mientras dormimos, alma individual a la que podemos reconocer durante un cierto tiempo tras la muerte de su poseedor, antes de que caiga en el olvido del que sólo se libran los héroes. En la Oda a Terón, Píndaro, que junto a los poetas líricos del s.VI a.n.e. va abriendo el espacio del yo, de la intimidad individual, nos habla de la vida más allá de la muerte. Heráclito llama alma a la parte del cuerpo que conoce y es así capaz de entrar en comunión con el sagrado *Logos* del universo; poco después Alcmeón centralizará la mente en el cerebro y diferenciará el percibir del pensar. Mojones en el camino de un pensar que siente ansias de eternidad, paisaje en el que surge la idea del alma inmortal que se reencarna, el alma que vence al tiempo. Cornford ha afirmado sin encontrar mucho eco que en su origen los pitagóricos concibieron el alma inmortal como una, la



armonía cósmica, y que bajo la influencia posterior del atomismo derivaron hacia el alma personal; en cualquier caso, el alma pitagórica es presencia de la ley universal en el hombre bajo forma de armonía y de justicia . Tras la muerte el alma que bebe de la fuente Mnemosyne deviene divina mientras que la que bebe las aguas del Leteo ha de continuar el ciclo de la reencarnación ; memoria y olvido salvan el alma o la condenan al tiempo .

## Muerte , Memoria , Tiempo

*E*s probable que el tiempo haya nacido como memoria de lo ausente , escindiendo el lenguaje de la presencia entre la forma verbal de presente y la forma de pretérito ; y es igualmente probable que la primera manera de medirlo haya sido a través de los movimientos del sol y la luna tiempo de hablar y tiempo de observar , palabra ritual y teoría del cosmos . Este doble origen estigmatizará la noción de tiempo, que tenderá a ser a la vez el tiempo perdido que recuperamos cuando la memoria habla y el tiempo que corre con el sol. Sol que se va, mas cuya ausencia es promesa de un renacimiento auroral que ha convencido al hombre que espera su regreso trayendo la luz y el calor de la mañana. Esta mañana , que entraña la creencia en la fidelidad del sol, apunta ya hacia un tiempo por venir; tardíamente debió aparecer la forma verbal de futuro, nueva escisión dentro de la memoria entre lo que fue mas ya no es y lo que fue pero volverá a ser, entre lo pasado que no vuelve y lo pasado que se hará presente. Tiempo de genealogías, anterior al tiempo de la cronología .

Recordar es revivir: con el mismo término los griegos significan "recordar" y "mencionar". En las epopeyas arcaicas aparece "el servidor del héroe", figura cuya misión es velar para





que su amo, atareado en sus afanes agonísticos, no olvide los designios sagrados que le conciernen o cualquiera de sus deberes. El aedo que con sus versos mantiene viva la historia de la comunidad está inspirado por los dioses que le conceden el don de descifrar la trama invisible del pasado; la memoria en "pretérito perfecto", lo que se acaba de hacer, está al alcance de todos, la memoria en "pretérito indefinido", lo lejano, es privilegio de pocos. No por casualidad es Simónides juntamente el primer poeta que se hace pagar sus versos y el inventor del arte mnemotécnico, así como el introductor de ciertas mejoras en la escritura añadiendo letras al alfabeto. Tal secularización de la memoria añade valor funcional al Tiempo, pero no borra su aura sagrada; su contemporáneo Píndaro emite un lamento con el que aún se identifica nuestra melancolía: "Seres ligados al Tiempo. ¿Qué es y qué no es? El hombre es el sueño de una sombra". Citemos también en la "polis" clásica la figura del "mnemón", memorizador institucional de los sucesos pasados útiles para el funcionamiento jurídico, social o técnico. Todavía en el siglo IV a.n.e., en la obra de un historiador como Tucídides encontramos que el pasado se narra según el tiempo lógico y no mediante cronologías.

Sabemos que en el segundo milenio a.n.e. ciertas lenguas semíticas no habían desarrollado el tiempo verbal "futuro", señal de que la construcción de tal idea es relativamente reciente. Entre los griegos la noción de futuro aparece ligada a la mántica, la adivinación de lo que va a ocurrir. Un hombre, ciego para el mundo según la tradición, es capaz sin embargo, de oír las palabras que la diosa Aletheia le inspira, voz de la que no cabe sospechar lo "pseudós", el incumplimiento. Cuando la religión decaiga el adivino se convertirá en simple calculador, estrategia de los hechos posibles. La concepción exclusiva del delito como "delito flagrante" nos hace ver la dificultad de los legisladores antiguos para concebir la transgresión de la ley como algo cuyos efectos permanecen de manera indefinida en el tiempo, sin prescripción. Para acusar de hurto hay que sorprender al ladrón en el momento de la fechoría o encontrar en su casa el botín



como prueba . Igualmente en los contratos comerciales figurar como avalista no implica contraer responsabilidades pecuniarias futuras si el contrato no se cumple , sino poner en juego el propio prestigio como garante de la realización de lo pactado . El interés es el concepto por excelencia en que se imbrican dinero y futuro; aún en Aristóteles encontramos una condena moral del interés monetario como algo contra natura , pues la naturaleza del dinero no consiste en reproducirse sino en servir como vehículo de intercambio; su multiplicación por el mero hecho de estar en connivencia con el tiempo es contraria a su concepto .

El tiempo es algo que los hombres han controlado convirtiendo en medida movimientos regulares , repeticiones de acontecimientos , lo cual permite aplicar orden a cualesquiera procesos humanos ; expresa una forma de relación del hombre con las cosas . La repetición lleva en sí el germen de la diferencia: una vez y otra vez , hoy y ayer . Cuando el tiempo deja de medirse sólo con palabras -día , verano , lluvias- y se le aplica el número pasa a ser como éste : ilimitado." ¿Volverá o no el mismo tiempo? Lo propio de ser un tiempo numéricamente ordenado es ser el mismo" se preguntaba Eudemo . Mismo como el círculo , tiempo cíclico aprisionado en la rueda del retorno que gira en dirección única : primavera después del invierno . Y una vez preso del tiempo el hombre que habla y observa aspira a librarse de él inventando la eternidad , un tiempo fuera del tiempo , realmente la negación del tiempo: el Eón , el tiempo lógico , que no cronológico , en que viven los dioses , tiempo intocado por la muerte . La teoría del Gran Año , tiempo necesario para la conclusión simultánea de la rotación de todos los astros alrededor de la Tierra , repetición del mapa celeste , eterno retorno astral , se complementa con el retorno humano merced al alma inmortal órfico-pitagórica .

El concepto de eternidad se completa con el de instante: los filósofos matemáticos del siglo V a.n.e. al convertir la aritmética en geometría convierten el ahora -el presente de la acción , de duración indeterminada- en el instante, un punto en la línea del tiempo . Este punto es un punto de no retorno , el



punto que fractura el tiempo , que deja de ser circular , cerrado , y se abre a la recta ilimitada : repetición contra diferencia . Y así, al chocar esta recta con el espejo del retorno , el futuro que se iba construyendo como reflexión especular del pasado se ve de repente lanzado hacia sí mismo como negación del pasado , a la búsqueda de su identidad como lo otro que lo sido ; sobre el redondo espejo quebrado luce la diferencia , recta sin quiebra . Tiempo nuevo de cambio , de desorden , contra el que avisadamente reaccionará el Platón político , en vano , traicionado por el Platón geómetra .

## Cuerpo , Espacio

**P**ara nuestros parientes animales el concepto de espacio, bajo forma de territorio , es prioritario sobre el concepto de tiempo , en forma de duración de una determinada acción ; así también para nuestros antepasados durante esos dos millones de años copulativos que los han traído hasta nosotros . La cosmogonía arcaica de los helenos presentaba el Universo surgiendo del Caos y la Noche , separación entre tinieblas de los cielos y la Tierra. Según Tannery , Pitágoras fue el primero en utilizar un concepto científico de espacio : el Universo es Uno y desde lo ilimitado se introduce el vacío , el aire y el tiempo ; por un lado el espacio continuo de los cuerpos , por otro el espacio vacío ilimitado ; vacío fundido con el aire , pues la distinción conceptual entre ambos tendrá que esperar hasta Anaxágoras y Empédocles. Será precisamente Arquitas de Tarento , el pitagórico amigo de Platón , quien sugiera el experimento mental de acercarse al límite del espacio y sacar la mano fuera . Una teoría cosmológica atribuida a Filolao nos presenta la metáfora orgánica del Universo vivo que respira el vacío ilimitado; aunque



es una construcción de alrededor del año 400 a.n.e.. mantiene su fidelidad al espíritu dualista del pitagorismo antiguo.

La geometría pitagórica es una geometría material ; hasta Platón no se formulará la diferencia entre cuerpo físico y cuerpo geométrico . La unidad pitagórica , que encarna la identidad en la cosa , es el origen y fundamento de los entes físicos ; el vacío actúa como elemento separador . El punto es definido como "unidad dotada de posición" ; lo podemos intuir como una forma primitiva del "átomo" de Leucipo y Demócrito . A partir de él se generan las demás dimensiones físicas : línea/arista , superficie/color , sólido/cuerpo , ejemplarizado mediante el despliegue punto/recta/triángulo equilátero/tetraedro o también punto/línea/cuadrado/cubo. Tras las aporías de Zenón y el descubrimiento de las cantidades "alogós" -nuestros números irracionales- los pitagóricos se ven forzados a introducir ciertas correcciones en sus teorías : abrazan el atomismo y sustituyen la aritmética por la geometría . El concepto de unidad se transforma en el de punto como átomo de dimensión infinitesimal ; la línea no será definida como conjunto de puntos sino como una dimensión continua limitada por dos puntos y posteriormente dejará de ser considerada como una cantidad extendida en una dimensión -longitud sin anchura- para convertirse simplemente en la primera dimensión . Habrá que esperar a Platón para que un griego se atreva a pensar en seres sin dimensión , sin espacio ; de ahí sus problemas para expresar la Teoría de las Ideas .

Según Arpad Szabó la aritmética pitagórica es un desarrollo de la filosofía eleática a partir del método de demostración indirecta o reducción al absurdo , inaugurado por Parménides para negar la existencia del No Ser y continuado por Zenón en sus argumentos contra la pluralidad del Ser . En cambio, los pitagóricos no pudieron aplicar los principios eleáticos en su geometría porque Zenón no aceptaba conceptos como "espacio", "tiempo" y "movimiento", basados en los conceptos de "punto" e "instante", debido a su negación de la divisibilidad ilimitada. Las definiciones de "unidad" -aquello



según lo cual se dice de algo ser uno- y "número" -conjunto de unidades- permitieron a los pitagóricos edificar una aritmética deductiva de la que la teoría de los pares e impares, elaborada a mediados del siglo V a.n.e., constituye el ejemplo conocido más antiguo; por contra , la insuficiencia de las definiciones de "punto" y "línea" condujo a que la geometría tuviera que apoyarse en axiomas y postulados para poder constituirse como ciencia deductiva.

## Números

*E*l desarrollo de los números debe mucho a la posibilidad de expresarse mediante la escritura y recíprocamente la invención de esta se debe a la necesidad social de registrar la cantidad de bienes poseídos . Por lo que sabemos la escritura cuneiforme aparece entre los sumerios hacia mediados del cuarto milenio directamente ligada a la administración pública; sobre tabletas de arcilla quedará documentada la propiedad del Estado. La evidente utilidad del invento hará que se transmita a otros pueblos del área mesopotámica, tales como los acadios, hititas, hurritas y elamitas , perviviendo durante milenios. Hacia el 3000 a.C. aparece la escritura jeroglífica en la civilización egipcia , pero el uso de un material perecedero como el papiro ha impedido que conozcamos mejor sus orígenes . El desarrollo de la aritmética queda así desde su origen vinculado a los sistemas de notación ; en Sumeria se crea una mezcla de sistema decimal y sexagesimal, en Egipto es decimal y en Babilonia sexagesimal<sup>1</sup>. En Grecia se utilizaron dos sistemas diferentes de

---

[1] Respecto a la relación entre la escritura y los sistemas de numeración véase el



numeración, ambos decimales: el más antiguo es probablemente el ático o herodiano , de factura iterativa similar a la numeración jeroglífica egipcia , que coexistirá a partir del siglo V a.n.e. con el sistema jónico o alfabético , hasta que éste se imponga definitivamente a principios del siglo III a.n.e.

En sus inicios los números forman parte de sistemas de unidades independientes , de manera que el "cuatro" de contar animales domésticos y el "cuatro" de medir cantidades de cereal se designan con palabras diferentes . Tampoco había correlación entre las unidades de medir longitudes y las de medir áreas , así que no se sabía calcular superficies dadas su longitud y anchura. A finales del tercer milenio encontramos ya la noción abstracta de número , producto de la larga experiencia de los escribas . Hacia el año dos mil los escribas egipcios y sumerios sabían calcular áreas y volúmenes a partir de longitudes , así como calcular lo que tardaría una obra en construirse dado el número de obreros y las horas de trabajo diario . Sobre el 1500 circulan en ambos imperios textos escolares que plantean y resuelven problemas matemáticos ; por ejemplo , en Egipto , calcular la altura de una pirámide dado su lado y la pendiente ; en Babilonia encontramos un algoritmo para hallar raíces cuadradas. La formulación de los problemas en términos no meramente prácticos sino académicos denota una larga tradición de enseñanza aritmética .

A la cultura helénica le repugna el concepto de infinito ; el número griego es medida de lo cercano , de lo manejable , en cuanto opuesto a lo inmenso , incontrolable . Los pitagóricos elaboran con los números una mezcla de mística y matemática ; las cosas , dirán , son números , significando con ello que lo numérico hace a la cosa ser lo que es ; el número queda entronizado como origen y fundamento de lo real . Esta visión

---

entretenido libro de G. Ifrah "Las cifras", Alianza Ed.



procede probablemente del aprendizaje matemático recibido por Pitágoras en Egipto y Babilonia y debió verse reforzada por la teoría de la armonía musical , trasplantada como sabemos a la armonía de las esferas celestes . La Unidad , que forma las cosas, es la fuente sagrada de los números ; en cambio , a pesar de disponer de la noción de vacío no inventaron el "cero"; probablemente porque el cero no mide cosas no les fue necesario. La Unidad no es un número determinado ni tiene una dimensión determinada , es tan sólo el nombre que recibe su concepto de que hay algo que puede medir cualesquiera cantidades y magnitudes, convicción que caerá arrasada ante el descubrimiento de los irracionales , hacia mediados del siglo V a.n.e. Para los pitagóricos sólo existen los números naturales ; a las fracciones , por ejemplo, las consideran como relaciones entre números y no como números; en cambio , muchos siglos antes los egipcios y babilonios sí les habían conferido tal dignidad y dominaban el cálculo con fracciones unitarias y racionales , respectivamente . Todavía hacia el 370 a.n.e. Arquitas consideraba las potencias cuadradas como números superficiales y las cúbicas como números sólidos ; ahí paraba de contar , pues potencias mayores no tenían sentido , no eran reales. La formación del conjunto de los números como adición de uno en uno, atribuida al pitagórico Euritos , no aparece hasta el 400 a.n.e., cuando ya el concepto religioso de Unidad ha visto rebajado su prestigio al de un simple número, aunque conserve la preeminencia entre ellos .

## Armonía Musical

**J**ámblico afirma que Pitágoras aprendió de los babilonios que la serie 6:8:9:12 contenía la armonía musical . Las razones de tales números permiten expresar la



relación entre un tono y su octava -6:12-, entre un tono y su cuarta -9:12-, y entre un tono y su quinta -8:12-<sup>2</sup>. Según Szabó, la palabra "logos" cobra por vez primera el sentido matemático de "medida" por referencia a la relación entre números que designaban intervalos armónicos en un monocordio. Por generalización, "logos" pasó a significar la relación entre dos números cualesquiera, lo que nosotros llamamos "razón"; aparece en consecuencia la expresión "ana logos", igualdad de "razón", que dará nuestros términos "analogía" y "proporción". Más tarde, para soslayar la imposibilidad de expresar de forma numérica la "razón-logos" entre ciertos entes, como la diagonal y el lado de un cuadrado, "logos" amplió su sentido a "razón entre magnitudes". Forjar el concepto matemático de "logos" fue, por tanto, la contribución más importante de los estudios pitagóricos sobre música al desarrollo de la matemática. La teoría de la armonía musical junto a las llamadas tríadas pitagóricas -aunque usadas mucho antes por egipcios y babilonios- se erigieron en los pilares sobre los que la secta levantó su mística numérica. Por Aristóxeno conocemos que utilizaban la música en rituales de purificación y como terapia, conforme a la tradición chamanística. Sabemos que Hípaso de Metaponto estudió la armonía en instrumentos unidimensionales como cuerdas, flautas y tridimensionales -mediante discos de metal con dos dimensiones iguales y proporcional la tercera. Parece ser que fue Arquitas el sistematizador de la armonía musical y quien realizó experimentos para probar que la intensidad del sonido es proporcional a la velocidad del movimiento y que si tales velocidades son proporcionales según ciertas razones simples los sonidos resultantes serán armónicos. Los pitagóricos extendieron la musicalidad a los astros, que al desplazarse producen la armonía de las esferas, inaudible en

---

[2] Szabó conjetura que al principio la octava, quinta y cuarta se representaban mediante la serie 1:2:3:4, es decir, 1:2, 2:3 y 3:4 respectivamente; el cambio a la serie 6:8:9:12 obedecería a la búsqueda de una medida común para los intervalos, dicho en nuestros términos "mínimo común múltiplo".



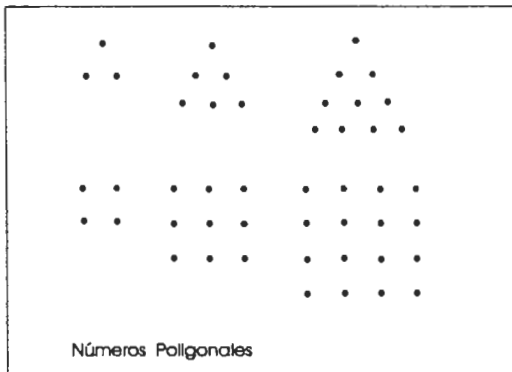


cuanto que oída desde siempre resulta indistinguible del restante material sonoro . El Tiempo , marcado por los astros , queda así constituido en el ritmo de lo fluctuante , del movimiento .

## Aritmética

**K**urt von Fritz ha mostrado la importancia de la "visualización" en el primer período de la matemática griega , no sólo en geometría donde tenemos como ejemplo los teoremas atribuidos a Tales que se basan en la simetría -simetría que salta a la vista- y el famoso problema de la duplicación del área del cuadrado que hallamos en el Menón , sino también en aritmética , donde los teoremas pitagóricos sobre los pares e impares eran demostrados mediante la representación gráfica de los números con piedrecillas . Ello explica que la tetractys , figura triangular de los cuatro primeros números y

cuya suma es diez , se convirtiera en el símbolo sagrado de la secta , y que se dedicaran al estudio de los números poligonales.<sup>3</sup>



El concepto de divisibilidad ocupa un lugar primordial en la matemática pitagórica ; el estudio de la dicotomía les condujo a elaborar su teoría de los pares e impares , la expresión más antigua que conocemos

[3] Los griegos solían representar los números empíricamente mediante piedrecillas -psefoi- con las que formaban figuras geométricas ; así obtenían series de números poligonales o figurados, por ejemplo, números triangulares. -3. 6. 10. 15...-, o números cuadrados -4. 9. 16. 25...-



conocemos de matemática deductiva . Oscar Becker mostró que dicha teoría había quedado recogida como un añadido a los Elementos de Euclides en los teoremas 21 a 36 del libro IX , más el apéndice 27 del libro X . Posteriormente Van der Waerden demostró que los teoremas 1 a 36 del libro VII habían sido compilados tal cual en algún texto matemático de los pitagóricos del siglo V a.n.e. La generalización del concepto de divisibilidad les llevó al estudio de los números primos y compuestos . De posterior aparición es el concepto de números amigos -aquella pareja en la que los divisores de cada uno suman el otro- y la clasificación de los números en perfectos, deficientes y abundantes, según que la suma de sus divisores sea igual , menor o mayor que el propio número .

De la teoría armónica surge la teoría de las proporciones , que en el siglo IV.a.n.e. alcanzará su forma canónica con Eudoxo y Euclides . Una proporción es la igualdad de razón entre cuatro números -o tres si el segundo se repite ; de aquí derivan los conceptos pitagóricos de media aritmética , media geométrica , media armónica y proporción áurea;<sup>4</sup> esta última llegó a ser utilizada como canon estético en arquitectura. Es muy probable que fueran los pitagóricos quienes idearan los procedimientos geométricos para dividir cualquier segmento en la sección áurea y para construir un rectángulo áureo a partir de un cuadrado cualquiera , tal como encontramos en los Elementos de Euclides. Kurt von Fritz ha atribuido al pitagórico Hípaso de Metaponto (1ª mitad del s.V. a.n.e.) el descubrimiento de la inconmensurabilidad, mediante la aplicación de la antiféresis al pentágono regular, cuyo lado y diagonal se encuentran precisamente en proporción áurea .

---

[4] Los griegos expresaban siempre las medias como razones entre números. Para  $a < b < c$ :  
Media aritmética:  $(b-a)/(c-b)=a/a$  Media geométrica:  $(b-a)/(c-b)=a/b$   
Media armónica :  $(b-a)/(c-b)=a/c$



## Geometría

### A) Teorema de Pitágoras

**E**udemo atribuyó a Pitágoras el descubrimiento de que la suma de los ángulos de un triángulo equivale a dos ángulos rectos; ello le sirve a Heath para dudar de la versión que concede a Tales el mérito de averiguar que el ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto, pues de ahí hubiera deducido ipso facto que el valor de los ángulos de un triángulo equivale a dos rectos.

Por lo que respecta al llamado teorema de Pitágoras, textos del segundo milenio a.C. muestran que los egipcios sabían construir ángulos rectos mediante triadas numéricas apropiadas; también en la India en un texto del s.VIII a.C. encontramos la triada 15-36-39; en fecha posterior a Pitágoras, hacia el 400 a.C., el matemático hindú Apastamba usó las triadas 3-4-5, 5-12-13, 8-15-17, 12-35-37, y aunque enuncia el teorema en términos generales no da prueba alguna, pero da reglas para construir un cuadrado de área igual a la suma o diferencia de dos cuadrados dados. Heath aventura que la prueba del teorema que da Euclides en El. I,47 era nueva, por lo cual añade en El. VI,31 otra prueba basada en la teoría de las proporciones y que debe ser más parecida a la forma original de la demostración;

### B) Determinación de áreas

La determinación de áreas es uno de los problemas clásicos de la geometría pitagórica y puede ser enunciado así:



Dadas dos figuras , determinar una tercera de área igual a la primera y semejante a la segunda . Este campo ha sido llamado por algunos historiadores de la matemática "álgebra geométrica", porque los procedimientos empleados representan soluciones geométricas a ecuaciones cuadráticas ; sin embargo , Szabó ha mostrado que tal nombre es del todo inapropiado , pues la mentalidad pitagórica es ajena a toda pretensión algebraica . Según Heath , la parte de los libros I y II de los Elementos en que Euclides trata este problema es una fiel reproducción de la geometría pitagórica. Szabó afirma que el tema de la determinación de áreas es consecuencia directa de la aplicación de la teoría numérica de las proporciones a la geometría; se desarrolla así el estudio de la semejanza de las figuras rectilíneas. Se tomó el cuadrado como la figura por excelencia a que reducir todas las demás . Aparece así el concepto de "media proporcional": el lado de un cuadrado de igual área que un rectángulo dado es media proporcional entre los lados del último; este concepto será el que conduzca al problema de la inconmensurabilidad de ciertas magnitudes geométricas; así pues, el asunto de las cantidades irracionales es desde el principio una cuestión geométrica y no aritmética . Es a la luz de la determinación de áreas como hay que comprender problemas clásicos tan importantes como la cuadratura del círculo y la duplicación del cuadrado .

### **C) Sólidos regulares**

En su conocida obra "La República", escrita hacia el 380 a.n.e., Platón se lamenta del escaso desarrollo de la estereometría, es decir , de la geometría de tres dimensiones. La fuente de tal queja es probablemente su amigo Teeteto , renombrado matemático ateniense a quien Gémino adjudica el mérito de haber inscrito el octaedro y el icosaedro en la esfera , y a quien el propio Platón dedicó uno de sus diálogos . Heath ha sugerido que quizá los pitagóricos del s.V a.n.e. conocían ya los cinco sólidos regulares, aunque sólo tenemos certeza respecto del



cubo , el tetraedro y el dodecaedro ; Jámblico atribuye la construcción de este último y su inscripción en la esfera a Hípaso. Sabemos que los pitagóricos intentaban construir figuras empíricamente juntando ángulos en torno a un punto. Así, uniendo cuadrados de tres en tres surge el cubo y uniendo triángulos equiláteros de tres en tres , de cuatro en cuatro y de cinco en cinco se forman el tetraedro , el octaedro y el icosaedro, respectivamente . La construcción del dodecaedro podría haber surgido juntando cinco triángulos equiláteros alrededor de un vértice , pues sus bases forman un pentágono regular ; sabemos que esta figura poseía un especial interés para los pitagóricos , ya que su lado y diagonal se hallan en razón áurea ; quizá por eso , como atestiguan diversas fuentes , la estrella pentagonal formada por las diagonales constituía un emblema de la secta .

#### D) Cosmogonía

Aristóteles , entre otros , nos ha conservado la famosa tabla de los opuestos en que los pitagóricos concretaban su visión dualista del universo , alineando los valores superiores en un lado y los inferiores enfrente. (Ver tabla, pág.83).

Mientras que en la tradición jónica hay una pluralidad de mundos , en la itálica el Cosmos es Uno , Uno que se concibe con límites . Que Pitágoras llamara "lo Otro" a la materia apunta ya al trasfondo matemático de la "physis", a la tesis de que las cosas son números . Estos números no tienen existencia separada de los cuerpos sensibles que encarnan ; serán , sin embargo , junto a la noción geométrica de "figura" un precedente fundamental del concepto platónico de "idea". Sexto Empírico menciona a físicos pitagóricos que sostenían que los primeros principios son imperceptibles e incorpóreos , es decir , anteriores a los cuerpos : puntos , líneas , superficies , sólidos . Las unidades pitagóricas que constituyen el Uno son a la vez aritméticas , geométricas y físicas ; el universo físico aún no ha sido diferenciado del matemático , como criticará Aristóteles en



su "Física". Mediante yuxtaposición los puntos generan líneas, éstas forman triángulos equiláteros, que a su vez originan tetraedros que componen los cuerpos. Posteriormente, quizá para evitar las paradojas de Zenón, aparece el concepto de "fluxión": el punto fluye generando la línea, esta fluye formando el cuadrado, que a su vez fluye originando el cubo y de cubos se componen los cuerpos. Quienquiera que lea el "Timeo" platónico escuchará los ecos de esta doctrina.

La concepción cuantitativa que vincula materia y números lleva a los pitagóricos a pensar los números como algo que se genera: el cambio de la cosa es el aumento o disminución de unos números que se generan o desaparecen; no concebirllos como formas intemporales merecerá la reprimenda de Aristóteles. Lo impar y lo par son los principios de los números; creo que la superioridad de lo impar se debe a que la unidad es el principio de diferencia, lo que le falta a un número para generar el siguiente, aunque no hay testimonio fehaciente de esta concepción hasta finales del s. V a.n.e.; en cambio, lo par es principio de repetición, lo que dobla o dicotomiza. ¿Cómo conciliar esta explicación con el hecho de que sabemos que los pitagóricos no consideraban el uno como un número, sino como la fuente de todos los números y era por tanto par e impar a la vez?

Cornford ha mostrado que parte de la confusión que se produce ya en los comentaristas antiguos se debe a los múltiples sentidos de los términos "tò hén", "he monás" y "hóros"; hay que distinguir entre Uno-universo, Uno-unidad primordial/número 1, uno-identidad/unicidad/cosa y unidad-miembro de una pluralidad. Aquí el logos hunde sus raíces en lo mítico; el Uno (universo) en el origen fue algo único: una unidad. En "De sensu" Aristóteles se interroga sobre cómo sería esa unidad primordial y apunta dos respuestas posibles: o un sólido geométrico, a la manera de Platón en el "Timeo", o una semilla con capacidad de engendrar; probablemente fue imaginada como ambas. Pero lo Uno no consta sólo de cuerpos, también de vacío: el aire ilimitado.



Fuego y Aire son los primeros principios que concurren en la unidad primordial ; el Fuego , que en la cosmología pitagórica ocupa el centro de la Tierra ( y en el tardío sistema de Filolao el centro del Universo ) es el principio de lo Limitado , de la Luz , del Calor ; el Aire es el principio de lo Ilimitado , de la Oscuridad , del Frío , aquello de que se componen las almas . El Uno es un ser vivo que respira: el Fuego nutriéndose del Aire ; así crece y se desarrolla . Por tanto , la unidad primordial es un tetraedro de Fuego que se reproduce ; la condensación de pirámides ígneas producirá Tierra y Agua según el mayor o menor vacío que las separe .

### **E) La interacción entre Filosofía y Matemáticas**

Los estudios de Neugebauer sobre las matemáticas egipcia y babilónica muestran claramente que la principal diferencia con la matemática griega radica en el paso de lo meramente empírico a lo teórico : no hay rastro en las primeras de conceptos tales como prueba , demostración , axioma o teorema. Karl von Fritz ha distinguido una primera fase visual en la matemática helena que comprendería los teoremas atribuidos a Tales , basados en la simetría y superposición de figuras planas , así como la aritmogeometría pitagórica de los psefoi ; la reacción posterior en contra de lo empírico y en favor de lo teórico podría detectarse tanto en la insistencia de Platón sobre la idealidad matemática -véase Menón y República- cuanto en los esfuerzos de Euclides por eludir lo visual en sus demostraciones.

¿Cuándo comienza la fase deductiva ? Arpad Szabó ha investigado la cuestión rastreando filológicamente los orígenes de conceptos matemáticos fundamentales . Euclides utiliza en la construcción de su sistema los términos "horoi" (definiciones), "aitemata" (postulados) y koinai ennoiai (nociones comunes) ; ya hemos visto que "horoi" remite a la teoría pitagórica de la armonía musical ; "aitemata" tiene un origen dialéctico ,



significando requisición , demanda : son asunciones que se estipulan , pero que no es necesario compartir ; las "koinai ennoiai" son comunes porque valen para todos los libros de los Elementos , y por tanto , para toda la matemática conocida ,pero además son proposiciones autoevidentes . Tannery fue el primero en señalar que Euclides no utilizaba en los "Elementos" algunas de las definiciones que proporcionaba al inicio del libro primero , así como la distinta terminología empleada a veces en las definiciones, por un lado , y en las proposiciones y pruebas , por otro ; de ahí concluyó que el intento de fundamentar las matemáticas era anterior a Euclides y que éste había respetado ciertos términos y definiciones antiguos manteniéndolos al principio de los "Elementos".

Aristóteles consideraba elemental para toda ciencia la investigación de sus primeros principios (archai) y en sus "Primeros Analíticos" encontramos la discusión más antigua sobre la fundamentación de la matemática ; en los "Segundos Analíticos" distingue dos tipos de "archai": "tesis" y "axioma"; aunque ni unos ni otros pueden ser probados , para aprender una ciencia es necesario conocer los últimos , no así las primeras , que divide a su vez entre "hipótesis" (proposiciones existenciales) y "horismos" (definiciones). La diferencia sustancial entre los principios fundamentales de Aristóteles y Euclides indica que aunque el estagirita debió ser influido por el desarrollo de la matemática elaboró una concepción propia sobre cómo fundamentar toda ciencia .

En la filosofía platónica hallamos un doble uso del término "hipótesis", que se refiere tanto a proposiciones que fundamentan las matemáticas como a cualquier asunción "ad hoc" de la que se parte en una determinada argumentación. Es célebre la diferencia que establece Platón entre el pensamiento noético y el matemático: el primero demuestra todas sus hipótesis de partida mientras que el segundo las deja sin demostrar . En sus diálogos encontramos numerosos razonamientos en los que la aparición de una contradicción motiva el rechazo de la hipótesis inicial , a la manera en que los pitagóricos deducían por demostración





indirecta. Szabó considera que en esa época la matemática era una rama de la dialéctica -de ahí la similitud de sus métodos- y cree probable que las primeras "hipótesis" usadas en matemáticas fueran las de Hipócrates de Quios en sus perdidos "Elementos" (430 a.n.e.) según referencia de Eudemo; fuentes antiguas atribuyen asimismo los tres primeros postulados de Euclides a Enópides de Quios (440 a.n.e.). Recordemos que O. Becker y Van der Waerden demostraron que ciertos teoremas de los "Elementos" habían sido elaborados por los pitagóricos de mediados del s.V a.n.e.

Tras haberse remontado hasta ahí Szabó anuncia su tesis principal : el origen de la deducción es la demostración indirecta forjada por los filósofos eleáticos, de quienes la toman los pitagóricos . Los historiadores de la cultura griega habían dado siempre por supuesto lo inverso , siendo los eleáticos deudores de los matemáticos. En la filosofía helena del s. VI a.n.e. -Tales, Anaximandro, Anaxímenes, Jenófanes- no hay trazas de pensamiento deductivo , como no las hay en la obra de Heráclito y Alcmeón hacia el 500 a.n.e.; en cambio , los primeros sofistas , hacia el 450 a.n.e., creadores de la Retórica, enseñaban a ejercitarse en el diálogo polémico defendiendo o atacando sucesivamente una tesis y su antítesis desvelando , entre otros medios , las contradicciones a que daban lugar . Es por tanto en la primera mitad del s.V a.n.e. cuando surge la deducción ; ahora bien, el estudio sobre si la prioridad de su invención corresponde a filósofos o matemáticos se ve dificultada por el hecho de que no poseemos testimonios directos de la matemática de esa época, aunque sí de la filosofía .

Sabemos, no obstante , que surgen al mismo tiempo el antiempirismo logicista eleático y el antiempirismo matemático que se aparta de lo visual ; en ambos casos el instrumento es el mismo : la demostración indirecta o reducción al absurdo . Su importancia queda clara cuando constatamos que de los teoremas del s.Va.n.e. conservados en los "Elementos" -VII,1-36 Y IX,21-36- ventiuno se prueban por demostración indirecta. Esta forma prístina de deducción se halla por vez primera en el Poema



de Parménides , escrito hacia el 485 a.n.e. , donde se demuestra que el Ser es y que el No Ser no es mostrando las contradicciones que surgen de afirmar las tesis contrarias : que el Ser no es y que el No Ser es. Será Zenón, llamado por Aristóteles "padre de la dialéctica" quien popularizará este método de reducción al absurdo mediante sus célebres aporías contra la pluralidad y el movimiento, escritas en defensa de la doctrina de su maestro ; de él lo tomarán los sofistas. Szabó cree que el éxito de la demostración indirecta entre los matemáticos se debió a la prueba de la existencia de magnitudes irracionales; en efecto, la inconmensurabilidad no es algo empírico , sino puramente teórico, y su descubrimiento es lo que imprimió probablemente a la matemática griega un cambio de rumbo que la convertiría en esa obra de ingeniería deductiva que han admirado las centurias posteriores.

### **Bibliografía**

- CAPELLE, W. "Hª de la Fª griega ". Ed. Gredos
- CORNFORD, F. "Platón y Parménides". Ed. Visor  
"Principium sapientiae". Ed. Visor  
"Antes y después de Sócrates ", Ed. Ariel
- DETIENNE, M. "Los maestros de verdad en la Grecia arcaica ".Ed. Taurus
- DODDS, E. "Los griegos y lo irracional", Ed. Alianza
- EGGERS, C. "Los filósofos presocráticos", Ed. Gredos.
- GERNET, L. "Antropología de la Grecia antigua" Ed. Taurus
- GIGON, O. "Los orígenes de la Fª griega" Ed. Gredos
- JAEGER, W. "La teología de los primeros filósofos griegos" Ed. F.C.E.



- HEATH, Th. "A history of greek mathematics", Ed.Dover
- KIRK, G. & RAVEN, J."Los filósofos presocráticos", Ed. Gredos
- LLEDO, E. "La memoria del Logos". Ed. Taurus
- NESTLE, W. "H<sup>a</sup> del espíritu griego".Ed. Ariel
- REY, A. "La juventud de la ciencia griega " Ed. Uteha
- SEVERINO, E. "La filosofía antigua ", Ed. Ariel
- SZABO, A. "The beginnings of greek mathematics" Ed. Dordrecht
- "The transformation of mathematics into deductive science" en "Scripta Mathematica ", vol 27,1
- TANNERY, P. "Pour l'histoire de la science hellene" Ed. J.Gabay
- VERNANT, J. "Mito y pensamiento en la Grecia antigua" Ed. Ariel
- VIDAL NAQUET, P."Formas de pensamiento y formas de sociedad en el mundo griego" Ed.Península