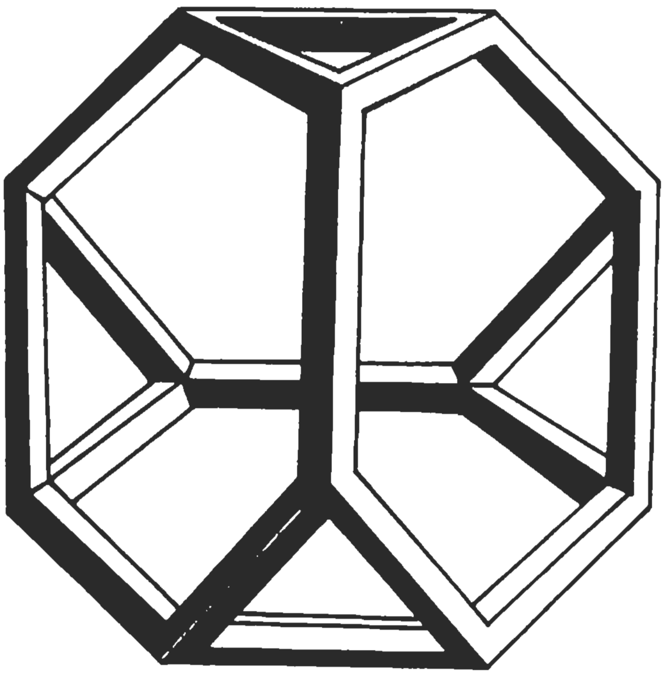
El Continuo y el Infinito en la Matemática Griega



José Montesinos Sirera.
Profesor de Matemáticas.
I.B. Villalba Hervás.

"Pero la consideración del infinito conlleva una dificultad (απορια), pues tanto al afirmar que no existe resultan muchos imposibles, como al afirmar que existe"

Aristóteles (Física 203b 30-32)

Los dos protagonistas fundamentales de nuestro tema son **ZENON DE ELEA Y ARISTOTELES DE ESTAGIRA.**

Comencemos con Zenón. **Sir Thomas Heath** en su libro **"A history of Greek mathematics"** y en el capítulo dedicado a Zenón deja traslucir su sorpresa por el hecho de ver cómo de maltratar la figura de Zenón y de mal comprender sus argumentos durante mucho tiempo, se pasa a finales del siglo XIX, a convertirlo en el adalid de la lógica y en un precursor de Weierstrass. Según él las dos posiciones son exageradas y después de repasar sus célebres argumentos contra la pluralidad y el movimiento, concluye diciendo que después de 2.300 años esta controversia no está ni mucho menos terminada.

Las polémicas sobre Zenón se reducen a dos clases de interpretaciones: a) Tales argumentos son burdos sofismas; b) Tales argumentos son razonamientos sutiles e impecables.

Según **Abel Rey (La juventud de la ciencia griega)**, *"Los que acusan a Zenón de sofisma reivindican hasta cierto punto la autoridad de Aristóteles, pues combate éste y acusa de paralogismo a una de las cuatro argumentaciones de Zenón contra el movimiento.*
Se pueden apoyar también en que el procedimiento inaugurado por Zenón va a ser el que utilicen los sofistas y el eleata fue el maestro del sofista como el médico puede serlo del envenenador".

Más adelante el propio Abel Rey dice: *"Zenón no es sólo un lógico, es la lógica misma".*

Pero veamos también un párrafo del libro **"Los principios de las matemáticas" de Bertrand Russell (1.872 - 1.970)**, citado también en la obra de Heath.

"En este mundo caprichoso nada lo es más que la fama póstuma. Una de las víctimas más notables de la falta de juicio de la posteridad es el eleático Zenón. Habiendo inventado cuatro argumentos, todos inconmensurablemente sutiles y profundos, la grosería de los filósofos subsiguientes lo consideró como un mero impostor muy ingenioso y juzgó a cada uno y a todos sus argumentos como sofismas. Al cabo de dos mil años de refutación continua esos sofismas fueron reinstaurados y transformados en el fundamento de un renacimiento matemático por un profesor alemán, el que probablemente ni soñó en conexión alguna entre él y Zenón. Weierstrass, rechazando estrictamente todos los infinitesimales, ha demostrado en última instancia que vivimos en un mundo inmutable y que la flecha en cada instante de su vuelo, se halla realmente en reposo. El único punto en que Zenón

problablemente erró fue en inferir (si es que lo hizo) que debido a que no hay cambio, el mundo debe tener el mismo estado en un instante y en otro. Esta consecuencia no se deduce en modo alguno, y en este punto el profesor germano es más constructivo que el ingenioso griego.

Weierstrass, pudiendo expresar sus opiniones matemáticamente, donde la familiaridad con la verdad elimina los prejuicios vulgares del sentido común, ha podido conferir a sus proposiciones el aire respetable de lugares comunes; y si el resultado es menos agradable para el amante de la razón que el valiente desafío de Zenón, es por lo menos más calculado para pacificar la masa de la especie humana".

El primer historiador de las matemáticas que "recupera" la figura de Zenón es **Paul Tannery** , en su libro **"Pour l'histoire de la science hellène"**, quien, consciente de su osadía trata de no tener frontalmente de enemigo al estagirita.

En éste dice: *"sobre todo, Aristóteles no debe haberse equivocado, es así solamente que se puede explicar la actitud que toma en relación a Zenón. En el fondo, sabe que su doctrina sobre el tema en cuestión es idéntica a la del Eleata; pero formalmente le reprocha haber procedido groseramente y de no haber distinguido, como él mismo tiene gran cuidado de hacer, las diversas acepciones del término UNO y del término SER. Sin embargo no se emplea en criticar a fondo los argumentos de Zenón, salvo aquellos que conciernen al movimiento, que habían adquirido como paradojas una gran celebridad y sobre los cuales un malentendido es tan fácil".*

Finalmente, antes de pasar a estudiar los tan controvertidos argumentos, digamos que el **propio Aristóteles** tiene en gran respeto la figura de Zenón a quien considera **"creador de la dialéctica"**. En cualquier caso toda la teoría aristotélica sobre el infinito se ve influída por las tesis de Zenón y en particular, su rechazo del infinito actual es un reflejo del temor a las dificultades lógicas que aquellos argumentos conllevaban.

Las Aporías De Zenon

Según el "Parménides" de Platón, parece probable que Zenón naciera hacia el 490-485 a.c. en Elea.

Discípulo de Parménides, las hipótesis contra las que dirigió su lógica dialéctica son dos: **la pluralidad y el movimiento**. Su objetivo fundamental es defender la tesis parmenidea del **UNO** contra sus atacantes, los pluralistas.

Su método consiste en reducir las hipótesis de sus oponentes al absurdo, deduciendo las consecuencias contradictorias que de ellas se siguen.

Los argumentos contra la pluralidad son dos y se han conservado a través de **Simplicio**. Sus argumentos en contra del movimiento son cuatro y cada uno de ellos los discute sucesivamente Aristóteles en su libro sobre la Física.

Nos limitaremos a analizar los argumentos contra el movimiento por ser los que entran más en relación con las matemáticas.

1º) La dicotomía.

"Tú no puedes llegar a la extremidad del estadio. No puedes franquear en un tiempo finito un número infinito de puntos. Obligadamente tienes que franquear la mitad de una cualquier distancia dada antes de franquear el todo, y la mitad de esta mitad antes de franquear ésta. Y así sucesivamente, "ad infinitum"; de manera que hay un número infinito de puntos en cualquier espacio

dado y no puedes tocar un número infinito de ellos uno después de otro en un tiempo finito" (Física VI, 9, 239b, 11).

2º) ElAquiles.

"Aquiles no se adelantará nunca a la tortuga. Primero tiene que llegar al sitio del que partió la tortuga. Durante ese tiempo la tortuga hará un cierto avance. Aquiles debe ganarlo, y la tortuga se aprovechará para hacer un nuevo trecho de camino. Siempre se acercará a ella, pero sin alcanzarla jamás" (idem, b, 14).

3º) La flecha.

"Una cosa puede estar en reposo o en movimiento cuando está en un espacio igual a sí misma. Pero el dardo que vuela está siempre en el instante. Por lo tanto está inmóvil" (idem, b,30 y b, 25).

4º) El estadio.

"Dos filas de móviles, iguales en número y tamaño, se mueven en un estadio con la misma velocidad y dirección contraria, partiendo los unos de la meta y los otros del punto central del estadio. Cree que en este caso, la mitad del tiempo es igual al doble del mismo" (idem, b,33).

Dicen **Kirk y Raven** en **"Los filósofos presocráticos"**: *"Lo mejor será considerar cada uno por separado; si bien, dado que los cuatro iban, sin duda destinados a estar juntos, debido a que el objetivo completo de cada uno depende de los otros tres, debemos considerar primeramente la finalidad combinada de todos ellos.*

Las teorías del movimiento dependen ineludiblemente de las teorías de la naturaleza del espacio y del tiempo; y en la antigüedad se sostuvieron dos opiniones opuestas sobre ellos. ***O el espacio y el tiempo son infinitamente divisibles****, en cuyo caso el* *movimiento es continuo y uniforme, o se* ***componen de mínimos indivisibles,*** *y entonces el movimiento es, como Lee adecuadamente dice, "cinematográfico" y consta de una sucesión de diminutos saltos.*

Hemos de ver que sus argumentos van dirigidos contra ambas teorías, los dos primeros contra la primera opinión y los dos últimos contra la segunda".

Es fundamental observar el carácter de dilema, de aporía (sin salida) de los argumentos. Para refutarlos habrá que hacerlo globalmente.

En relación a la finalidad combinada de los argumentos, citemos también a **Brochard** en **"Etudes de philosophie ancienne et de philosophie moderne"**:

"Los cuatro argumentos constituyen un sistema de curiosa simetría. El primero y el cuarto contemplan lo continuo y el movimiento entre límites dados; el segundo y el tercero los ven en longitudes indeterminadas cualesquiera. En el primero y en el tercero, un sólo móvil se encarga de realizar el movimiento, y resulta que aún el comienzo del movimiento es imposible. El segundo y el cuarto, por la comparación de dos móviles en movimiento, hacen en cierta manera más sencilla lo absurdo de la hipótesis, prueban que el movimiento aún comenzado no podría continuar y demuestran la imposibilidad del movimiento relativo, así como la del movimiento absoluto. Los dos primeros establecen la imposibilidad del movimiento por la naturaleza del espacio, que se supone continuo, sin que por ello deje de considerarse al tiempo como compuesto de la misma manera que el espacio; en los dos últimos la naturaleza del tiempo sirve para probar la imposibilidad del movimiento, sin que por ello se deje de considerar al espacio como formado, a su vez, por puntos indivisibles.

Finalmente el segundo no es sino otra forma del primero y el cuarto se apoya en el mismo principio que el tercero. El primer par de argumentos está destinado a combatir la idea, que naturalmente se ofrece primero al espíritu, de la divisibilidad *indefinida de lo continuo; el segundo par se opone a la concepción que no se presenta al pensamiento sino cuando reconoció las dificultades del primero.*

El orden lógico de estos argumentos está, pues, completamente conforme con el orden histórico en el que Aristóteles nos los transmitió y que seguramente era el adoptado por Zenón".

Veamos algunas de las refutaciones que se hacen a los argumentos, empezando por las que se hacen al par **Dicotomía-Aquiles.**

Primeramente la refutación de Aristóteles:

"Por lo que también el argumento de Zenón es falso al afirmar que no es posible recorrer las cosas infinitas o entrar en contacto separadamente con ellas en un tiempo finito.

Pues de dos maneras se dice que son infinitos la longitud, el tiempo y, en general, todo lo que es continuo. O respecto a su divisibilidad, o respecto a sus extremos. Mientras que no es posible entrar en contacto con las cosas cuantitativamente infinitas en un tiempo finito, sí que lo es respecto a la divisibilidad; pues también el tiempo es, en este sentido, infinito; de manera que se recorre lo infinito en un tiempo infinito y no en uno finito y se entra en contacto con las cosas infinitas no mediante momentos finitos, sino numéricamente infinitos".

Aristóteles observa que estos dos primeros argumentos vienen a ser el mismo, con la diferencia en el hecho de que la razón de cada espacio atravesado por Aquiles con respecto al espacio recorrido en el primer argumento, es, no 1:2 sino 1:n, donde n puede ser cualquier número. Pero como dice Heath, Aristóteles mal interpreta el carácter del argumento en la dicotomía, pues: *"Zenón sabía perfectamente que con respecto a la divisibilidad el tiempo y el espacio tenían la misma propiedad y que eran ambos divisibles "ad infinitum". La cuestión es ¿cómo?, en un caso y en otro estas series de divisiones, por definición inagotables pueden ser agotadas, y tienen que serlo si el* *movimiento es posible. No es una respuesta decir que las dos series se agotan simultaneamente".*

Las respuestas dadas a nuestros argumentos por grandes matemáticos desde **Descartes** a **Whitehead** residen en hacer ver **que la suma de la serie infinita 1+1/2+1/4+.... es igual a dos** ó en calcular el momento exacto en que Aquiles alcanza a la Tortuga (que por otra parte, puede ser calculada sin la necesidad de una serie).

Debemos citar y comentar aqui el importante artículo dedicado al tema, **"Achilles and the tortoise"**, publicado en ANALYSIS, XI (1.950-51) por Max Black, y que dió lugar a una larga serie de intervenciones en la misma revista unas a favor y otras en contra.

Cuando un matemático afirma que la "suma" de la serie infinita de números 1+1/2+1/4+.... es igual a dos, está realizando una operación de **"paso al límite"**.

Lo que quiere decir, es que por pequeño que sea un número que se proponga, la diferencia entre la suma de los n primeros números de la serie (n, suficientemente grande pero finito) y dos, es más pequeña que el número inicialmente propuesto.

Hay pues una diferencia entre sumar un número finito de números y "sumar" los términos de una serie infinita.

Hecha esta aclaración, sigamos con el razonamiento de Max Black: la dificultad lógica estriba en que Aquiles, para alcanzar a la tortuga, tiene que realizar una serie infinita de actos, pero, arguye Black, "realizar una serie infinita de actos" es contradictorio lógicamente, para lo cual, se extiende en la descripción de unas "máquinas infinitas" capaces de realizar tal proeza, para después probar que esto es lógicamente contradictorio.

Concluye finalmente, diciendo que los matemáticos caen en la trampa que les tiende Zenón, pues Aquiles sólo tiene que realizar un número finito de actos para alcanzar a la tortuga: *"But* *all the things he really does are finite in number; a finite number of steps, heart beats, deep breaths, cries of defiance, and so on. The track on which he runs has a finite number of pebbles, grains of earth, an blades of grass, each of which in turn has a finite, though enormous number of atoms".*

La infinitud de la serie es una vía, un intento, que creemos útil, de describir la realidad física.

Pero Aquiles no está enfrentado a realizar algo lógicamente imposible. La pretensión de tal cosa se crea por confundir el número finito de actos reales que el corredor tiene que realizar con la serie infinita de números con la cual describimos lo que hace.

El modelo matemático que aplicamos no describe el espacio, el tiempo, el movimiento.

Pasemos ahora a analizar los dos últimos argumentos: **la Flecha y el Estadio.**

Entramos en la segunda parte del dilema. El espacio y el tiempo son considerados ahora como formados por elementos indivisibles. En el caso del tiempo, por "νυν" (momentos, instantes).

Veamos primeramente el argumento de la Flecha.

Aristóteles lo refuta simplemente negando las hipótesis. *"Porque el tiempo no está constituido por elementos indivisibles. La conclusión de Zenón procede de suponer que el tiempo está formado por indivisibles. Si no se admite ésto, no se sigue aquélla".*

Pero si aceptamos las hipótesis, la conclusión es irrefutable. Esté una cosa en reposo o en movimiento, está en el espacio que traza o marca igual a si misma.

Considerémosla en movimiento. Entonces está, en el mismo momento en que la consideramos, en el instante que por definición es indivisible: el momento del tiempo sin antes ni después, sin pasado y sin duración. Por lo tanto si cambiara de lugar en ese instante, haría falta que ocupara otra posición en el espacio, que recortara más lejos la dimensión espacial que le corresponde. Pero entonces hay una posición **anterior** y una posición **posterior**, un **antes** y un **después,** dos instantes en el instante. De esta manera, éste sería divisible, lo que es contrario a la hipótesis y contradictorio.

Antes de analizar el argumento del Estadio, conviene que hablemos de la hipótesis o conjetura de P. Tannery, que permite explicar brillantemente los motivos de Zenón, especialmente en éste su cuarto argumento:

Parménides escribe su famoso poema sobre el **SER**, en un tiempo en el que el pensamiento de la escuela de los pitagóricos es dominante.

Los ataques en contra del contenido del poema debieron venir sobre todo de éstos.

¿Cuál era el punto débil, según Zenón, en las doctrinas pitagóricas?. ¿De qué manera se le presentan como siendo una afirmación de la pluralidad de las cosas?.

La clave está en la definición pitagórica de punto matemático. Para éstos, **el punto es la unidad con posición,** o la unidad considerada en el espacio. Se sigue inmediatamente que el cuerpo geométrico es una pluralidad, suma de puntos, análogamente a como el número es una pluralidad suma de unidades.

Unicamente el descubrimiento de la existencia de magnitudes inconmensurables pudo hacerles ver el error de tal planteamiento. (¿Sabía Zenón la existencia de los inconmensurables?). Pero no por ello, los pitagóricos dejaban sus especulaciones aritméticas sobre números triangurares, oblongos, etc..

En esta época no hay una clara distinción entre cuerpo geométrico y cuerpo físico. Los cuerpos son pues considerados como suma de puntos y sus propiedades ligadas a las propiedades de los números que representaban esas sumas.

Esta es, en resumen, la base de la conjetura de Tannery que permite, de aceptarla, dar un sentido lógico irrefutable a los argumentos de Zenón.

Veamos entonces el argumento del **Estadio**, juzgado por Aristóteles como un paralogismo (falsedad, que a diferencia del sofisma, es esgrimida sin conciencia de serlo).

A través de Simplicio, nos ha llegado el diagrama de **Alejandro de Afrodisia**, relativo a nuestro argumento

A A A A

B B B B →

← **C C C C**

Si estos cuerpos "sólidos" o "masas", representados por las letras representan esos mínimos de espacio indivisible y éstos se mueven, en las filas B y C con la velocidad adecuada para pasar a un A en un mínimo de tiempo indivisible, entonces la conclusión de Zenón es totalmente correcta.

Está plenamente justificada la postura de Zenón cuando invita a sus oponentes, o a los que, al menos creían en los últimos indivisibles, a que visualicen una situación semejante. Si el espacio se compone, en efecto, de mínimos indivisibles, es completamente legítimo trazar un diagrama que represente, a escala tan amplia como se quiera, un número de tales mínimos; y si lo mismo es válido respecto al tiempo, los demás datos son igualmente legítimos, y una vez que se admiten estos presupuestos, es válido el resto del argumento. Porque en el tiempo en que cada B ha pasado a dos A, lo que según los datos equivale a dos mínimos de tiempo indivisible, cada C ha pasado a cuatro B, lo que asimismo, debe haber acontecido en cuatro mínimos indivisibles.

Conclusión, de aceptar la hipótesis de los indivisibles llegaríamos al absurdo de la igualdad de un tiempo doble y su mitad.

Es cierto, naturalmente, que el argumento es completamente inválido, como dice Aristóteles, si no se refiere a mínimos indivisibles. *"Cree poder deducir la igualdad entre un tiempo doble y su mitad. Hay paralogismo cuando postula que dimensiones o tamaños iguales animados por igual velocidad, pasan en el mismo tiempo a lo largo de una dimensión, ya en movimiento, ya en reposo".*

Aristóteles achacaría pues a Zenón el no entender el concepto de velocidad relativa.

Los Sofistas

Como reacción al **racionalismo de la Escuela de Elea** y a su incapacidad de explicar el mundo real, surge una escuela de pensadores "empiristas", que al mismo tiempo que niega la geometrización de la realidad, hace uso sin embargo, de las armas dialécticas que tan brillantemente esgrimiera Zenón.

Son los primeros representantes de un grupo de pensadores y maestros a los que la Historia conoce con el nombre de sofistas y que viajan por todo el mundo griego entre el 450-350 a.c., impartiendo lecciones sobre un variado núcleo de temas a cambio de una paga.

Sus grandes adversarios: **Platón y Aristóteles**, a través de los cuales tenemos toda la información sobre ellos y que los han hecho aparecer como charlatanes, que no van en busca de la verdad sino que tienen como objetivo el vencer en las discusiones, aún si es a costa de argumentos falaces. Es cierto, que en una segunda etapa los sofistas de la escuela de Megara hacen que el desarrollo del arte de discutir y persuadir degenere en un vano juego de palabras: **La Erística.**

Hay que esperar hasta el siglo XIX para que, a través de Hegel y posteriormente los positivistas ingleses, se recupere a muchos de estos pensadores que fueron incluidos en la "lista" únicamente por no estar sus teorías de acuerdo con la ortodoxia platónica y aristotélica.

Nosotros nos ocuparemos de aquellos sofistas que tuvieron relación con las matemáticas y en particular con el infinito y la continuidad.

PROTAGORAS DE ABDERA (480-? A.C.), afirma, que en la realidad no existen las condiciones de racionalidad que los geómetras pretenden. Así, las rectas tangentes a una circunferencia no existen, pues no es cierto que tengan un único punto de contacto, dado que la geometría "correcta" debe ser aquella que se presenta a nuestros sentidos y no aquella que sólo puede pensarse.

ANTIFONTE, discípulo de Protágoras, pretende resolver el problema de la **CUADRATURA DEL CIRCULO** incribiendo polígonos cada vez con número de lados doble que el anterior, hasta que el polígono inscrito (cuadrable como todo polígono de lados rectos) se confunde con la circunferencia.

Es muy posible que lo que pretendía Antifonte fuese mostrar que el famoso problema que apasionaba a los matemáticos estaba mal puesto o era inexistente: En una geometría empírica, la única posible, bastaría doblar el número de lados del polígono inscrito para llegar rapidamente al resultado.

El historiador de las matemáticas italiano **Gino Loria** en su libro **"Le science esatte nell'antica Grecia"** afirma que *"Lo que se puede imputar a Antifonte es el haber identificado el círculo a un polígono, en vez de considerarlo como límite de un tal* *polígono, pero el pretender que poseyese la moderna precisión de ideas y de lenguaje no es razonable.*

Más bien debemos estarle agradecidos de haberse anticipado a su tiempo, manipulando valientemente el infinito en geometría".

Aristóteles no fue ciertemente, tan benigno con la figura de Antifonte y su manera de "resolver" la cuadratura del círculo, pues la pone como ejemplo de falacia a la que ni siquiera debe refutarse (por no atenerse a los principios geométricos, en este caso el de la infinita divisibilidad de un segmento).

Es **Arquímedes (Medida del círculo)**, el que capta lo fecundo de la idea de Antifonte y consigue una aproximación del número π considerando polígonos inscritos y circunscritos de 96 lados.

BRISON DE HERACLEA. El problema de la cuadratura del círculo interesó a otro sofista: Brisón (fines del siglo V a.c.), del que se "ocupa" Aristóteles a menudo, al que pone como ejemplo de sostenedor de razonamientos erísticos, encaminados más a un juego de palabras que a un resultado verdadero.

La "**demostración**" de Brisón consiste más bien en una **declaración de existencia** de un cuadrado equivalente a un círculo dado. Su idea es, considerar un cuadrado inscrito y otro circunscrito al círculo. Haciendo variar poco a poco el cuadrado pequeño hasta hacerlo igual al grande existirá, por una cierta intuición de continuidad, una posición en que el cuadrado es equivalente al círculo.

Las críticas de Aristóteles y de otros matemáticos, justificadas desde el punto de vista riguroso, no tienen en cuenta, que en realidad, del argumento de Brisón era posible ver la necesidad de definir explícitamente un **CRITERIO DE CONTINUIDAD** que en los Elementos de Euclides no es todavía del todo satisfactorio.

Euclides, en la cuarta definición del libro V de los Elementos enuncia explícitamente el hoy conocido como postulado de Arquímedes, pero que probablemente es debido a Eudoxo. Pero este postulado, por sí sólo, no permite garantizar la existencia de elementos de separación entre clases contiguas. Por esta circunstancia Euclides está obligado a la tácita admisión de puntos de intersección de curvas (I,1; I,13; I,22), lo que representa uno de los "fallos" de su inmortal obra.

Aristóteles y el Infinito Matemático

Aristóteles trata temáticamente el infinito en la **FISICA** (Libro III. CAP. 4 A 8), en **DE CAELO** (Libro I CAP. 5 A 7) y en **LA METAFISICA** (Libro XI, cap. 10).

Para Aristóteles, el problema del infinito es eminentemente físico. Magnitud, movimiento y tiempo es lo que caracteriza a la Naturaleza y "definido el movimiento, hay que intentar abordar de la misma manera lo que sigue. Parece que el movimiento es algo continuo, y lo infinito aparece primero en lo continuo. Por esto ocurre que los que definen lo continuo a menudo necesitan el concepto de infinito, como quiera que lo divisible a lo infinito es continuo". (Física, 200b, 15-20).

El infinito, como predicable propio de aquéllos, es pues un asunto de la Física.

No obstante, admite que sea también un tema a tratar por los matemáticos, y esto por dos motivos:

a) La serie de los números naturales no tiene fin

b) La infinita divisibilidad de un segmento.

La sucesión creciente de números enteros naturales no tiene fin, es **infinita**, porque fijado un número natural por grande que sea, siempre es posible encontrar un número mayor que él. Pues bien, la definición de **INFINITO POTENCIAL** para una sucesión de elementos es ésta: La posibilidad de proceder siempre más allá, sin que exista un último elemento.

La imposibilidad de pensar un final para el espacio, una barrera tras de la cual no exista más espacio, es otra de las vías naturales que conducen a la conquista de la categoría mental del infinito potencial.

La infinidad potencial es característica de nuestro modo normal de concebir el espacio y el tiempo, respectivamente, como un cubo que crece ininterrumpidamenmte o como un segmento que es prolongable indefinidamente. Pero dejemos a un lado los problemas relativos a la infinitud o no del Universo, del espacio físico o del tiempo real, y restrinjámonos al infinito matemático; esto es, a **construcciones mentales, relativas a los números enteros o a segmentos de recta o de curva continua.**

Observemos que hay una diferencia de calidad entre la sucesión infinito-potencial de los números naturales crecientes y la sucesión de los puntos de un segmento, de lo que llamamos un **continuo lineal**

SUCESION DISCRETA . . . .

SUCESION CONTINUA ----------------------------

En los dos casos, la sucesión está compuesta de una cantidad inagotable de elementos. Pero en el caso de los números naturales se trata de una sucesión infinita "discreta": Dado un punto, está bién claro cuál es el siguiente. Entre un elemento y el que le sigue, hay un hueco, un vacío.

Bien diverso es el comportamiento en el caso del segmento. Aquí la sucesión infinita es "continua". Dado un punto del segmento no tiene sentido hablar del punto inmediatamente sucesivo a él. Entre un punto y otro que le sigue hay siempre infinitos puntos que forman también un segmento continuo, también infinitamente divisible en partes continuas, que a su vez son infinitamente divisibles, y así sucesivamente.

Aquí parece que se tenga una colección de infinitos puntos dados todos juntos, un INFINITO EN ACTO, y no sólo en potencia; una infinidad agotada o completa y no inagotable.

Una sucesión infinita discreta, siempre reconducible a la repetición infinita del "más uno", es un objeto mental hasta cierto punto reposante. Hegel lo llama "die schlechte Unendlichkeit", "la mala infinidad".

Es el infinito que producen los números enteros, la Aritmética.

El continuo lineal, **el infinito que produce la Geometría** es mucho más inquietante, definitivamente y rigurosamente dominado por **Dedekind** y **Cantor** a finales del siglo XIX.

Así pues, Aristóteles se ve enfrentado al siguiente problema: Un segmento continuo, ¿es sólamente divisible en un número de partes tan grande como se quiera, con un proceso de sucesivas divisiones, y es infinito en el sentido potencial? ó ¿puede ser concebido como infinito en acto, como colección infinita exhaustivamente dada de todos sus puntos?.

Pues bien, la respuesta de Aristóteles a este problema es NEGAR LA EXISTENCIA DEL INFINITO ACTUAL, tanto físico como mental.

En el capítulo 5 del libro III de la Física se demuestra que no existe un cuerpo infinito en acto.

Pero Aristóteles niega también la posibilidad del infinito actual mental o matemático (y aquí hay que ver la influencia de los argumentos de Zenón).

En todo caso, sea en el Universo o en el pensamiento, para Aristóteles *"es imposible que el infinito sea en acto"* (Física 204a, 28), por tanto, *"queda decir, entonces, que el infinito es en potencia"* (idem 206a, 18) y *"que el infinito no es en otro modo, únicamente en éste, esto es, en potencia y por división"* (idem 206b, 12-13) ó *"también por adición el infinito es, siempre, en potencia"* (idem 206b, 16).

Sin embargo, esta "prohibición", no impide a los matemáticos realizar sus razonamientos: *"Este nuestro discurso, no pretende suprimir las investigaciones de los matemáticos por el hecho de excluir que el infinito por adición pueda recorrerse en acto. En realidad, ellos (los matemáticos), en el estado presente, no sienten la necesidad del infinito, y en realidad no se sirven de él, sino solamente de una cantidad tan grande como se quiera, aunque siempre finita ..."* (Física 207b, 31).

Esto es, no se puede retroceder al infinito o avanzar al infinito; se puede unicamente retroceder o avanzar cuanto se quiera.

Ya los matemáticos anteriores a Aristóteles, (Arquitas, Teeteto, Eudoxo), entendiendo que los argumentos de Zenón eran fatales para los infinitesimales, habían eliminado el uso del infinito, incluso potencial, para evitar las dificultades que éste concepto introduce en la argumentación lógica.

Con Aristóteles, esta situación se oficializa y no es hasta el siglo V d.c., que **Agustín de Tagaste**, (354-430 d.c.), Obispo de Hipona, se atreve a contradecir la no posibilidad de pensar un infinito en acto. Si bien, el personaje que tiene tal facultad es excepcional: **DIOS**. *"Todo número está caracterizado por su propiedad, así que dos cualesquiera son distintos. Por tanto los números son distintos, y tomados singularmente son finitos, y tomados todos juntos son infinitos.*

Dios, entonces, a causa de su infinitud los conoce todos. ¿Cómo sería posible que la ciencia de Dios conociese unos números e ignorase otros? ¿El que sostuviese ésto no sería un demente?" (De Civitate Dei).

La tesis agustiniana de la presencia de **"infinitos actuales" en la mente de Dios (in mente Dei)** influye probablemente mil años después en Galileo y Cavalieri, cuando introducen los primeros métodos infinitesimales.

Pero que el infinito actual "puede ser pensado", incluso por mente humana, puede verse en la propia historia de la geometría griega. Aunque de una forma subterránea y algo vergonzante.

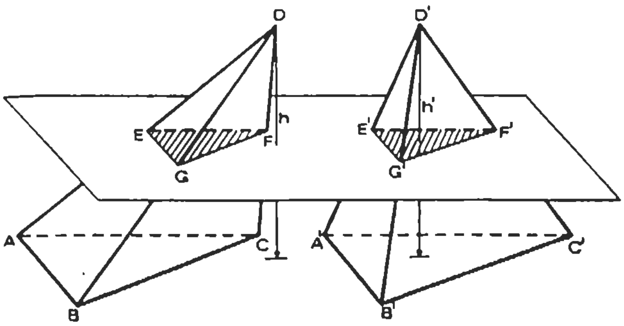
En 1.906, el filólogo danés **J. L. Heiberg,** descubre en un palimpsesto la copia de una carta dirigida por **ARQUIMEDES** a **ERATOSTENES**, matemático y bibliotecario de Alejandría:

"Arquímedes a Eratóstenes, salud
(...) Reconociendo, como digo, tu celo y tu excelente dominio en materia de filosofía, amén de que sabes apreciar, llegado el caso, la investigación de cuestiones matemáticas, he creido oportuno confiarte por escrito, y explicar en este mismo libro, las características propias de un método según el cual te será posible abordar la investigación de ciertas cuestiones matemáticas por medio de la mecánica. Algo que, por lo demás, estoy convencido, no es en absoluto menos útil en orden a la demostración de los teoremas mismos. Pues algunos de los que primero se me hicieron patentes por la mecánica, recibieron luego demostración por geometría, habida cuenta de que la investigación por ese método queda lejos de una demostración; como que es más fácil construir la demostración después de haber adquirido por ese método cierto conocimiento de los problemas, que buscarla sin la menor idea al respecto. Por esta razón, aún en el caso de los teoremas referentes al cono y a la pirámide, cuya demostración fue Eudoxo el primero en hallar, a saber: que el cono es la tercera parte del cilindro y la pirámide es la tercera parte del prisma, con la misma base e igual altura, conviene atribuir buena parte del mérito a Demócrito, el primero que enunció esto sin demostración acerca de dichas figuras".

Este es el comienzo del "Método de Arquímedes relativo a las proposiciones mecánicas".

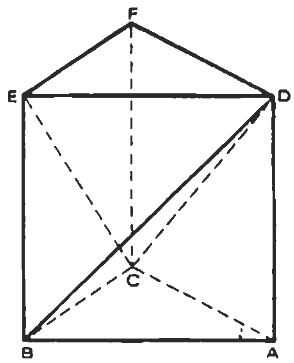
Fijemos nuestra atención en el hecho de que "la pirámide es la tercera parte del prisma que tiene la misma base e igual altura", e intentemos comprender las dos afirmaciones que Arquímedes hace de Demócrito.

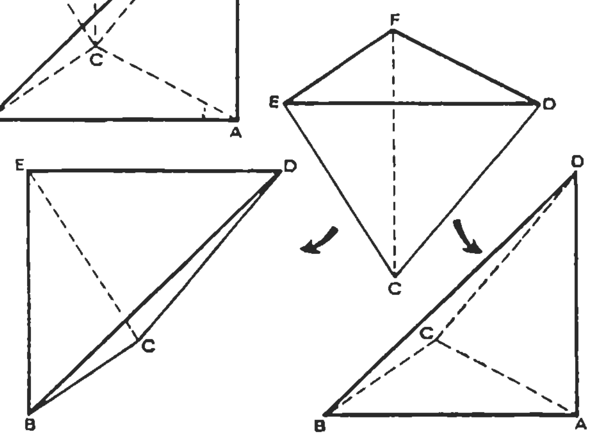
Arquímedes dice que Demócrito **conoce** el resultado y que éste era exacto, pero que **no es una demostración.**



¿Cómo pudo llegar Demócrito a éste importante resultado?. Veamos la reconstrucción que de su razonamiento hace Federico Enriques (1.871-1.946):

Demócrito pudo haber partido del hecho de que **"pirámides con igual base e igual altura tienen igual volumen"**. (ver fig. 1), para llegar después a la conclusión buscada, como hace Euclides en la proposición (XII, 7), con la descomposición del prisma en tres pirámides iguales. (ver fig. 2).





2

Demócrito, en definitiva, entiende que dos pirámides con la misma base e igual altura tienen el mismo volumen porque las imagina compuestas por, **infinitas en acto**, secciones planas dos a dos iguales.

Y aquí, aparece en escena, el segundo gran personaje citado por Arquímedes: **Eudoxo de Cnido**, miembro de la Academia de Platón.

Una vez descubierta, por método **heurístico** (Euriskein= encontrar=descubrir), la propiedad, el proceso se convierte en demostración si conseguimos hacer ver que **el resultado no puede no ser aquel.** Dos negaciones afirman.

Esto es lo que consigue Eudoxo con su **METODO DE EXHAUCION.** No podemos extendernos aquí en la explicación de este método, que será el objeto de otra ponencia de este Seminario.

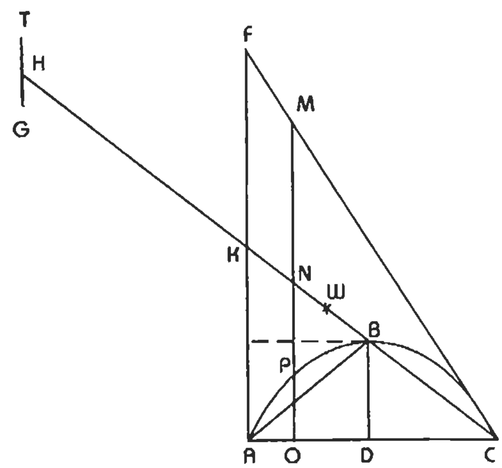
En cualquier caso, la causa de que Arquímedes no considere como una verdadera demostración el resultado de Demócrito, es sin duda el uso del infinito actual hecho por aquél.

En el Método, de Arquímedes, el procedimiento geométrico está basado sobre propiedades relativas al "baricentro", centro de gravedad de los sólidos, y sobre el famoso principio de equilibrio de una palanca que lleva el nombre de **Principio de Arquímedes**.

Consideremos el método mecánico que emplea Arquímedes para **"cuadrar la parábola"**.

Cuadratura de la parábola

B: VERTICE DE LA PARABOLA
BD: EJE DE LA PARABOLA
AC: CUERDA PERPENDICULAR A BD
FC: TANGENTE A LA PARABOLA EN C
AF: PERPENDICULAR A AC
K: PUNTO DE CORTE DE CB CON AF
HK= KC
W: BARICENTRO DEL TRIANGULO ΔFCA
OM: SEGMENTO PARALELO A FA POR UN PUNTO GENERICO O DE AC
TG= OP



Consideremos el triángulo ΔFCA formado por los segmentos OM, "dotados de peso", cuando O recorre AC, y consideramos K como el fulcro de una palanca. Todo el "peso" del triángulo ΔFCA estará concentrado en W, baricentro del triángulo. Consideraremos todo el "peso" del segmento parabólico ⌒ABC concentrado en H, trasladando los segmentos OP hasta H.

Supondremos probado que $AK = FK$ y que $\dfrac{MO}{OP} = \dfrac{CA}{AO}$
(por propiedades generales de la parábola)

Entonces, y como $\dfrac{CA}{AO} = \dfrac{CK}{KN}$ por semejanza de triángulos, poniendo $CK = HK$, tendremos $\dfrac{HK}{KN} = \dfrac{MO}{OP}$ y de aquí $OP \,.\, HK = MO \,.\, KN$, lo que según la *"ley de la palanca"*: *peso x brazo = peso x brazo*, indicaría que la balanza con fulcro en K, estaría en equilibrio con el peso de OM en N y de $OP = TG$ en H.

Por tanto y por ser $KW = \frac{1}{3} KC = \frac{1}{3} HK$, **ΔFAC = 3 ⌒ABC**

El área del triángulo ΔFAC es igual al triple del área del segmento parabólico ⌒ABC Pero claramente , **ΔFAC = 4 ΔABC** por tener ambos triángulos la misma base y ser la altura FA=4BD.

Finalmente, tendríamos **⌒ABC = 4/3 ΔABC**

"EL AREA DEL SEGMENTO PARABOLICO ⌒ABC ES IGUAL A 4/3 DEL AREA DEL TRIANGULO ΔABC"

Arquímedes comenta esta demostración afirmando que "ésto no ha sido verdaderamente demostrado por medio de lo que se ha dicho; pero ha sido dada una indicación que induce a pensar que la conclusión es verdadera" y añade "por eso, viendo que la conclusión no ha sido demostrada, pero presumiendo que ella es cierta, propondremos una demostración por vía geométrica encontrada por nosotros mismos, que ya hemos publicado".

¿Por qué dice Arquímedes que esta demostración no es correcta?. La teoría de los baricentros es estrictamente geométrica y no va por tanto, en contra del purismo griego.

La clave está en la siguiente parte de la "demostración" "(...) el triángulo CFA consta de las rectas trazadas en el triángulo CFA" (paralelamente al lado AF), "mientras que el segmento parabólico ABC consta de las rectas trazadas similarmente a la OP", esto es, de las cuerdas paralelas al eje de la parábola. Estas afirmaciones suponen que la región plana (triángulo, segmento parabólico), está **compuesta por las infinitas cuerdas paralelas a una dirección dada,** implicando una subdivisión **no sólo potencial sino actual, de un continuo, en infinitas partes.**

De hecho, una cosa es afirmar que un continuo puede ser dividido en un número de partes tan grande como se quiera y otra cosa es imaginar **la subdivisión realizada completamente, saltando del finito al infinito**, imaginar el continuo formado por infinitos indivisibles, de dimensión inferior al suyo. En nuestro caso, una región plana "bidimensional", viene concebida como compuesta de una **infinidad** en acto de segmentos.

Arquímedes no tiene el coraje de arriesgar el salto filosófico que hará dos mil años después Galileo.

Arquímedes recurre al infinito actual porque es un "instrumento técnico" que le sirve para hacerse una idea del resultado que busca, y en la carta a Eratóstenes subraya: *"(...) y he querido publicar el método porque estoy convencido de que puede representar una contribución no poco provechosa a la investigación matemática. Pues supongo que algunos de mis contemporáneos o sucesores llegarán a encontrar por el método expuesto otros teoremas que a mí no se me han ocurrido".*

Esto sucederá casi dos mil años después con el **"método de los indivisibles" de Cavalieri y Torricelli**, fundado sobre un principio análogo al método "mecánico" de Arquímedes, y del cual, por cierto, no tenían noticia los matemáticos italianos.

THE WILL IS INFINITE

AND THE EXECUTION IS CONFINED

THE DESIRE IS BOUNDLESS

AND THE ACT A SLAVE TO LIMIT

Shakespeare (Troylus and Cressida)

Bibliografía

Black, M. (1.950-51): "Achilles and the tortoise". Analysis XI.

Heath, T. (1.981): A history of greek mathematics. Tomo I Dover

Kirk - Raven (1.974): Los filósofos presocráticos Ed. Gredos

Lombardo-Radice L. (1.981): L'Infinito Ed. Riuniti

Maracchia, S. (1.987): Breve storia della logica antica. Ed. Universitaria di Roma.

Maracchia, S. (1.977): " I sofisti e la matematica" Revista Archimede.

Prevosti Monclus, A. (1.985): La teoría del infinito de Aristóteles. Biblioteca Universitaria de Filosofía.

Rey, A. (1.961): La juventud de la ciencia griega Ed. Uteha

Rufini, E. (1.926): Il "metodo" di Archimede. Ed. Feltrinelli. Ed. Espasa-Calpe.

Szabo, A. (1.9): "The transformation of mathematics into deductive science and the beginnings of its foundation on definitions and axions". Scripta mathematica Vol. XXVII, núm. I

Tannery, P. (1.9): Pour l'histoire de la science hellène. Ed. Jacques Gabay

Vega, L. (1.986): Introducción y notas a Arquímedes: El Método. Ed. Alianza Editorial.