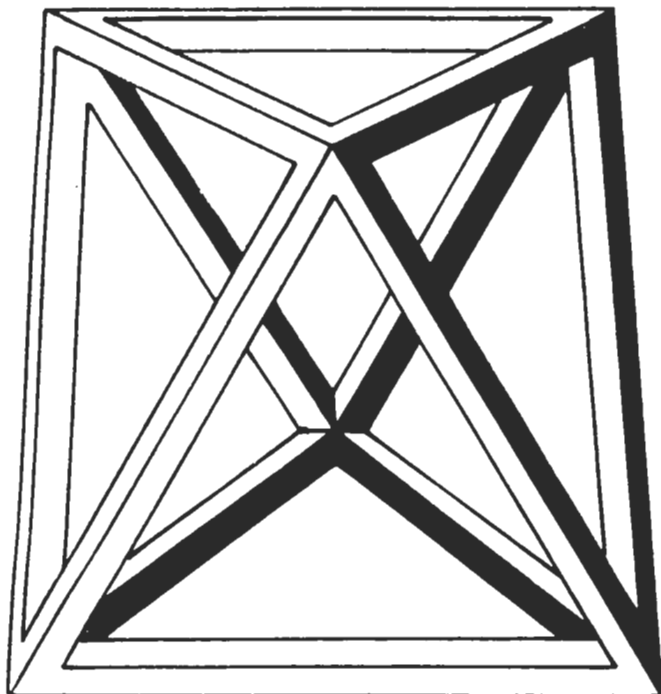


ARISTOTELE E LA MATEMATICA



Silvio Maracchia.
Profesor de Historia de la Matemática.
Universidad de Roma.

I rapporti tra Aristotele e la matematica sono stati numerosi e importanti sia dal punto di vista del matematico e dello storico della matematica e sia dal punto di vista del logico e del filosofo. Basti pensare, infatti, che solo attraverso gli accenni diretti di Aristotele possiamo conoscere alcuni momenti dello sviluppo matematico; tanto più che tali accenni spesso determinarono numerosi commenti che a loro volta fornirono ulteriori importanti informazioni. Inoltre, se la matematica trasse beneficio dalle analisi logiche che ne fece il filosofo, essa, da parte sua, contribuì non poco alla chiarificazione delle sue speculazioni logiche.

Prima di addentrarci in qualche significativo esempio, ricordiamo che, oltre a numerosi lavori su particolari aspetti matematici presenti nelle opere di Aristotele, furono anche affrontate dagli storici delle raccolte dei più significativi passi matematici presenti nelle opere di Aristotele.



La prima in ordine di tempo risale al matematico Pietro Catena che scrisse due lavori a tal proposito:

Universa loca in Logicam Aristotelis in Mathematicas disciplinas hoc novum opus declarat (Venezia, 1556);

Super loca Mathematica contenta in Topicis et Elenchis Aristotelis nunc et non antea, in lucem aedita (Venezia, 1561):

Poco dopo l'opera di Pietro Catena, ignorata da tutte le storie della matematica ed anche da coloro che si occuparono della matematica in Aristotele¹, apparve l'opera di Giuseppe Biancani (Blancanus):

Aristotelis loca mathematica ex universis operibus collecta et explicata (Bologna, 1615). "Trattato, aggiunge l'autore sul frontespizio, per accedere alla natura delle scienze matematiche".

Dopo Biancani, anch'esso ingiustamente trascurato anche se fu ripreso da I.C. Heilbronner in Historia Matheseos universe (Leipzig, 1742), A. Görland scrisse:

Aristot und die Mathematic (Marburg, 1889) volta piuttosto alla filosofia che alla matematica.

Ricordiamo anche il grande filologo danese J.L. Heiberg che rivolse la sua attività specialmente alla matematica greca curando, ad esempio, i testi critici di Euclide ed Archimede. Heiberg scrisse appunto una breve opera (49 pagine) dal titolo:

Mathematisches zu Aristoteles (Leipzig, 1904).

Infine, più recentemente lo storico della matematica Thomas Heath ha scritto la fondamentale opera

Mathematics in Aristotle (Oxford, 1949; rist. 1970).

[1] Ne ho trovato un cenno solo nella Biblioteca Matematica di Pietro Riccardi, anzi è da tale cenno che hanno avuto inizio le mie ricerche su Pietro Catena.



Bisogna dire però che in queste opere, anche se sono stati messi in luce i passi fondamentali di Aristotele in cui si fa riferimento alla matematica, non sono presenti proprio tutti. E' questa la sorte comune a tutti coloro che, per primi, intraprendono un lavoro: per quanto le loro opere siano meritevoli e di importanza fondamentale, esse non possono non essere manchevoli e lacunose. Tutto ciò, sia ben inteso, nulla toglie al valore e al merito de questi autori.

E' quanto è accaduto, ad esempio nell'archeologia (scienza per molti versi simile alla ricerca storico-matematica): all'inizio la ricerca si limitava ai soli "pezzi grossi" (tombe, sarcofagi, obelischi, gioielli, ecc.), successivamente si ricercarono anche vasi e utensili più semplici, oggi si raccolgono pazientemente anche i frammenti dai quali è talvolta possibile ottenere risultati impensati e importanti².

Ebbene, dalla molteplicità degli esempi che potrebbero trarsi per mostrare i rapporti tra Aristotele e la matematica, non possiamo che fare riferimento a qualche relazione de carattere generale:

1) Aristotele ha menzionato, come abbiamo detto, antiche dimostrazioni, fornendo così preziose indicazioni storiche (pseudo quadrature, lunule di Ippocrate ecc.);

2) Aristotele, con le sue critiche, ha contribuito al raffinamento della matematica oltre che a mostrarci un momento del suo sviluppo (teoria delle parallele, definizioni, paralogismi, infinito attuale a potenziale ecc);

3) Aristotele ci ha lasciato una preziosa traccia di una antica dimostrazione di incommensurabilità tra il lato e la diagonale di

[2] A titolo di curiosità, ricordo che, ad esempio, i passi matematici tratti da Heath dalle opere logiche di Aristotele sono 259; da parte mia che lavoro con discontinua assiduità allo stesso lavoro ormai da parecchi anni, ho tratto dalle stesse opere 333 passi.



uno stesso quadrato; con la sua critica ad un altro tipo di dimostrazione della stessa incommensurabilità si è probabilmente inserito nello sviluppo di importanti tecniche dimostrative;

4) Per quanto Aristotele abbia distinto la scienza della natura dalla matematica come discipline di rigore e astrazione diverse e pertanto non confrontabili, egli ha mostrato con qualche significativo esempio come la matematica può essere usata per spiegare fenomeni naturali e per la ricerca delle cause e dunque per la ricerca della verità (astronomia, corpi pesanti, arcobaleno ecc.);

5) Aristotele, pur traendo spunto dalla matematica stessa, esaminò e descrisse le basi logiche sulle quali è possibile fondare una scienza dimostrativa, contribuendo in tal modo alla sua sistemazione assiomatica (euclidea) e fornendone un esempio con la sua logica sillogistica (definizioni, assiomi, nozioni comuni, postulati, regole di inferenza, principi fondamentali di logica ecc.);

6) Aristotele presenta poche dimostrazioni matematiche nelle sue opere ma anche attraverso queste è possibile talvolta osservare una evoluzione della matematica;

7) Infine in numerose analisi logiche di Aristotele è stato possibile nel corso dei secoli trarre indicazioni formali che oggi sono alla base di importanti rami matematici (teoria degli insiemi, nozioni comuni ecc).

Ognuno dei punti menzionati richiederebbe una intera conferenza; in questa sede non possiamo che accennare brevemente a qualcuna delle cose cui abbiamo fatto riferimento. Vedremo un esempio di come una tecnica dimostrativa divenne successivamente un risultato di logica proposizionale e come, viceversa, un tale risultato di logica può a sua volta influire sulla matematica.

Vedremo come in questo esempio l'analisi di Aristotele si inserisce bene nello sviluppo della matematica e della logica,



discipline che, come abbiamo già osservato, spesso si sono intrecciate con reciproco vantaggio.

Nei Primi Analitici (41 a, 23-30) di Aristotele si trova, a chiarimento della cosiddetta dimostrazione per riduzione all'assurdo ($\alpha\pi\alpha\omega\gamma\eta$ εις $\alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\omicron\nu$) il seguente brano:

"Infatti tutti coloro che cercano di raggiungere il proprio scopo attraverso (la riduzione al) l'assurdo, da una parte, inverò, deducono il falso, dall'altro provano dalle ipotesi quanto si erano proposti qualora, dall'assunzione della premessa contraria, si imbattono nell'assurdo, quale ad esempio (la dimostrazione del) la diagonale incommensurabile ($\alpha\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\varsigma$) (con il lato dello stesso quadrato) attraverso la circostanza che la supposta commensurabilità porta numeri dispari (as essere contemporaneamente) uguali a numeri pari. Inverò, che i numeri dispari siano uguali ai pari viene dedotto sillogisticamente; e che la diagonale è incommensurabile viene provato dalle ipotesi poiché dalla contraddizione (della tesi) discende il falso".

Aristotele fa dunque riferimento ad una dimostrazione dell'incommensurabilità tra la lato e diagonale di uno stesso quadrato basata sul procedimento indiretto della dimostrazione per riduzione all'assurdo. E' questa una importante indicazione storica quale che sia il procedimento a cui egli si riferì effettivamente.³

La spiegazione più semplice di questo brano, anche se non tutti gli storici della matematica concordano⁴, la si può trovare in uno scolio al X libro degli Elementi di Euclide che, anzi, prima delle analisi di Heiberg veniva considerato di Euclide stesso⁵:

[3] I contatti tra Aristotele e l'incommensurabilità furono numerosi e importanti; per una analisi dei trenta brani nei quali Aristotele la affronta cfr. Aristotele e l'incommensurabilità di S. Maracchia, in Archive for History of Exact Sciences, vol. 21, Springer, 1980.

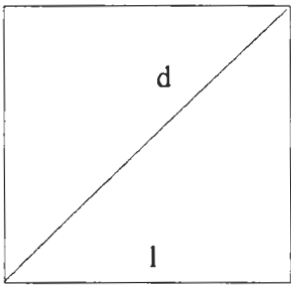
[4] Cfr. ad esempio W. Knorr, The evolution of the Euclidean elements, cap. 2 ("The side and the diameter"), Reidel Publishing Company, London, 1975.

[5] Cfr. Euclidis Elementa vol. III, Liber X cum Appendice, post I.L. Heiberg, editio E.S.



"Proponiamoci di dimostrare che nelle figure quadrate il diametro è incommensurabile in lunghezza con il lato"

La dimostrazione pseudo-euclidea, comunque assai antica, segue un percorso che sembra quello cui avrebbe fatto riferimento Aristotele. A noi, in questa sede, non interessa tanto esporla alla lettera, quanto osservare un particolare passaggio che in essa si trova. Per questo motivo esporremo la dimostrazione in forma abbreviata anche se non ne tradiremo lo spirito.



Supponendo commensurabili lato e diagonale del quadrato, indicata con \underline{m} la loro più grande sottomultipla comune, siano \underline{l} e \underline{d} le loro rispettive misure: \underline{l} e \underline{d} sono pertanto numeri interi tra loro primi.

Per il teorema di Pitagora si ha allora

$$d^2 = 2 l^2$$

ma questa relazione risulta assurda, infatti da essa risulta che d^2 è un numero pari e quindi anche \underline{d} è numero pari per il fatto che il quadrato di un numero dispari è numero dispari⁶; di conseguenza il numero \underline{l} , primo con \underline{d} , è numero dispari. Ora, se si pone $\underline{d} = 2n$, si ha

$$(2n)^2 = 2 l^2 \quad \text{cioè} \quad l^2 = 2 n^2$$

ma allora, essendo l^2 numero pari, anche \underline{l} è numero pari in contrasto con quanto era stato già ottenuto.

Esaminiamo però più attentamente il ragionamento secondo il quale un numero è pari se è pari il suo quadrato, ragionamento che è stato applicato due volte nella dimostrazione vista e che si sviluppa nel seguente modo:

Stamatis, Leipzig, Teubner 1972 in *Appendix* 27, p.231.

[6] Sommare un numero dispari di volte un numero dispari, osserva lo pseudo-Euclide, dà come risultato un numero dispari. Noi possiamo osservare più schematicamente che, posto un numero dispari nella forma $2n+1$ il suo quadrato è il numero dispari $(2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 = 2(2n^2+2n)+1$.



poichè il quadrato di un certo numero dispari, è dispari; se il quadrato di un numero è pari (cioè non è dispari); allora questo numero è pari (cioè non è dispari).

Possiamo sintetizzare questo ragionamento con lo schema:

se **p** allora **q**

ma **non-q**

quindi **non-p**

Tale schema riproduce la dimostrazione presente nello scolio con:

p	"un numero è dispari"
q	"il quadrato del numero è dispari"
non-q	"non -il quadrato del numero è dispari-", cioè "il quadrato del numero è pari"
non-p	"non -un numero è dispari-" cioè "il numero è pari"

Insomma possiamo scrivere ancora più formalmente:

$$\begin{array}{r} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \neg p \end{array}$$

Ed è proprio in un aspetto formale di questo tipo che i logici stoici espressero uno dei loro (cinque) "indimostrabili" (*ἀναπόδεικτοι*) sui quali, a guisa di regole di inferenze basavano i loro ragionamenti.⁷

Possiamo osservare che la nostra regola logica (chiamata regola del "modus tollendo tollens" o più semplicemente "modus tollens") può anche esprimersi nella forma che "se **p** implica **q**,

[7] Per l'esposizione e l'analisi degli "indimostrabili" stoici cfr. ad esempio la Breve storia della logica di S. Maracchia, Euroma, La Goliardica, Roma, 1987, cap. VI.



allora da $\neg q$ segue $\neg p$ "; in ogni caso, infatti, le premesse sono sia l'implicazione $p \rightarrow q$, sia $\neg q$ e la conclusione è $\neg p$.

Non entriamo nel merito di che cosa voglia dire oggi quell'"implica" che, come sappiamo dalla storia della logica, ha avuto varie definizioni. Oggi, nella nostra logica matematica, tale implicazione ha assunto il carattere della "implicazione materiale" così come era stata intesa dal megarico Filone.

Non c'è dubbio, però, che quella implicazione presupponeva inizialmente uno stretto legame tra l'antecedente p e il conseguente q sul tipo di quello che si ha anche in matematica per cui se $p \rightarrow q$ ciò vuol dire che da p è possibile dedurre q . In questa fase di passaggio probabile dalla deduzione matematica all'implicazione logica ritroviamo una preziosa analisi di Aristotele che si inserisce anche nelle polemiche avvenute tra filosofi e matematici alla ricerca di convincenti definizioni di termini e di operazioni matematiche. In questo ambito vennero esaminate, ad esempio, il significato ed i limiti del termine "elementi" (στοιχεῖα) e le circostanze, legate alla precedente ricerca, relative alla possibilità di poter invertire o no una determinata proposizione⁸. "Elementi" vennero infatti considerati sia i più semplici costituenti di una scienza sui quali basare le proprietà della scienza stessa a guisa di postulati⁹, e sia proprietà cosiddette elementari adatte allo sviluppo successivo e più elevato della materia. E' quest'ultimo significato che i libri di Euclide ebbero appunto il nome de Elementi.

"Elemento" venne anche ad assumere il significato di "premessa" atta alla dimostrazione di una certa proprietà: pertanto se dalla proprietà **A** è possibile dedurre la proprietà **B**, ecco che **A** risulta "elemento" di **B**. Vennero allora anche esaminate le

[8] Si ricordi che "proposizione" (ἀποφαντικὴ) è una affermazione suscettibile di essere vera o falsa; in essa è presente un soggetto e un predicato del tipo "A è B".

[9] Notiamo che il termine στοιχεῖα sta ad indicare anche la "lettera" con la quale formare la parola.



condizioni in cui sarebbe stato possibile invertire la relazione e considerare **B** come a sua volta "elemento" di **A**.

Nelle opere de Platone vi sono varie tracce di queste analisi, di queste discussioni¹⁰; è però Aristotele che affronta compiutamente il problema descrivendo il cosiddetto "quadrilatero delle proposizioni"¹¹:

"Dato poi che quattro sono le contrapposizioni (αντιθεσεις) tanto chi demolisce quanto chi consolida può esaminare le proposizioni contraddittorie -attraverso un concatenari inverso dei termini- servendosi dell'induzione.

Se ad esempio l'uomo è animale, il non-animale è non-uomo (οἷον εἰ ὁ ἄνθρωπος ζῶον, τὸ μὴ ζῶον οὐκ ἄνθρωπος); similmente si dica per gli altri casi (ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων) qui difatti la concatenazione dei termini è inversa: all'uomo consegue invero l'animale (cioè l'essere animale), mentre al non-uomo non consegue il non-animale, ma inversamente, al non-animale consegue il non-uomo.

In tutti i casi occorre dunque esigere un tale presupposto. Ad esempio se il bello è piacevole anche el non-piacevole è non bello, e se quest'ultima asserzione non vale, non varrà neppure la prima; così pure, se il non-piacevole è non-bello, il bello è piacevole.

Rispetto ai contrari tanto chi demolisce quanto chi consolida può d'altra parte considerare, se al contraio consegua il contrario o allo stesso modo o inversamente; per quanto è utile poi occorre assumere anche un siffatto esame attraverso l'induzione"¹².

[10] Cfr. ad esempio *Entif.* 11e - 12a; *Protaq.* 350 c. d.

[11] Cfr. *Aristotele e il quadrilatero delle proposizioni* di S. Maracchia in *Archimede*. Le Monnier, Firenze, 1971 nn.1-2.

[12] Arist. *Topici*. 113b. 15-30 (tr. G.Colli); il testo da me consultato è quello curato da W.D. Ross. *Arsitoteles. Topica et Sophistici elenchi*. Tipographeo Clarendoniano, Oxonii, 1958.



Aristotele prosegue ora con altri esempi e ritorna poi su quanto ha già detto ed abbiamo visto. Esaminiamo però il brano riportato.

Innanzitutto Aristotele afferma che "quattro" sono le contrapposizioni che possono essere esaminate e poi fornisce un esempio affermando che dall'uomo che è animale ne viene che il non-animale è non-uomo.

Scematizzando, indichiamo con **A** l'"essere uomo" e con **B** l'"essere animale"; si ha allora:

A → **B** (cioè l'"essere uomo" implica l'"essere animale")

¬ **B** → ¬ **A** (cioè il non-"essere animale" implica il non-"essere uomo", infatti se qualche cosa non è animale non può essere neppure uomo)

Si tratta, come si vede, della possibilità più volte descritta, simile al "modus tollens" che egli considera anche nel senso inverso allorché nell'esempio del "piacevole" (**C**) e del "bello" (**D**) non solo afferma che dalla **C** → **D** segue ¬ **D** → ¬ **C** ma anche, viceversa che dalla ¬ **D** → ¬ **C** segue **C** → **D**.¹³ Ma Aristotele osserva anche che dalla **A** → **B** non consegue necessariamente la implicazione "contraria" ¬ **A** → ¬ **B** ("all'uomo -scrive- consegue invero l'animale, mentre al non-uomo non consegue il non-animale"), così come non consegue sempre la "inversa" (**B** → **A**), infatti il l'"essere animale" non implica l'"essere uomo". Questo quarto caso non viene trattato nel brano riportato però in esso viene esplicitamente affermato che "quattro sono le contrapposizioni" pertanto non vi è dubbio che in Aristotele sia chiara l'esistenza delle quattro possibilità cui forse accenna nell'ultima frase del brano riportato. D'altra parte in un altro brano

[13] Questo è evidente e non aggiunge nulla di nuovo se si pensa che nella logica binaria di Aristotele ¬ (¬ **A**) = **A**.



Aristotele non solo critica ancora la possibilità di poter dedurre dalla $A \rightarrow B$ la $\neg A \rightarrow \neg B$ ma anche quella di poter dedurre l'implicazione inversa $B \rightarrow A$.¹⁴

"Quanto poi ai paralogismi che concludono partendo dalla conseguenza, bisogna risolverli esaminando l'argomentazione stessa. Orbene, la derivazione delle conseguenze è duplice. In un senso, diffatti, come alla nozione particolare consegue quella universale, ad esempio al uomo [consegue] l'animale, così si sostiene che deve avvenire l'inverso; in realtà, se una nozione si accompagna ad un'altra -tale è la pretesa di coloro che argomentano a questo modo- la seconda dovrà pure accompagnarsi alla prima"

Aristotele ha dunque chiara l'esistenza del quadrilatero delle proposizioni che si può sintetizzare con el seguente schema:

$A \rightarrow B$	proposizione diretta
$B \rightarrow A$:	" inversa
$\neg A \rightarrow \neg B$	" contraria
$\neg B \rightarrow \neg A$	" contronominale

Così abbiamo visto che in Aristotele è chiara la proprietà che dalla verità della proposizione diretta scaturisce anche quella della contronominale (e viceversa dato che, come sappiamo, la proposizione diretta è la contronominale della contronominale) cioè di quella proprietà che abbiamo visto più volte sotto diverse forme e che nel calcolo proposizionale va sotto il nome di "prima legge delle inverse".

Assumere tale proprietà assiomaticamente come regola di inferenza, inserita in una logica formalizzata come fecero i logici

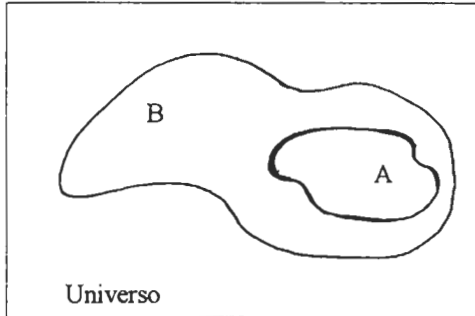
[14] Cfr. *Confut. Sofist.* 181a 22-30 per l'intero brano; ho riportato qui solo le righe 22-25 relative alla sola inversione (tr. di G. Colli)



stoici, è corretto; mentre le analisi di Aristotele, compiute attraverso esempi anche se con la piena consapevolezza della loro generalizzazione, rimanevano alquanto slegate. Storicamente però furono proprio le opere de Aristotele ad influire sui logici successivi.

Ad ogni modo, per mostrare come questa proprietà sia ancora presente nei nostri testi moderni ove assume l'aspetto di un teorema, osserviamo per prima cosa la teoria degli insiemi. E' naturale trovarla in questa sede tenendo presente che la logica aristotelica può anche pensarsi come logica di classi rappresentando soggetti e predicati come particolari insiemi.

In altre parole, l'espressione aristotelica "ogni **A** è **B**" ("proposizione universale affermativa") può intendersi pensando all'insieme costituito da tutti gli **A** come sottoinsieme di quello costituito da tutte le **B** come, ad esempio, accade se **A** è l'"essere uomo" (e dunque l'insieme di tutti gli uomini) e **B** l'"essere mortale" (e dunque l'insieme di tutte le cose mortali).



In questo caso l'insieme complementare **A'** di un insieme **A**, costituito da tutti gli elementi dell'universo considerato che non appartengono ad **A**, si può porre in corrispondenza con la proposizione $\neg A$.

Ebbene, nella teoria degli insiemi è possibile dimostrare:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$$

cioè dimostrare che se l'insieme **A** è contenuto nell'insieme **B**, allora l'insieme complementare di **B** è contenuto nell'insieme complementare di **A** (e viceversa). In altre parole, se ogni elemento di **A** è elemento di **B**, allora ogni elemento che non appartiene a **B** non appartiene neppure ad **A** (e viceversa).

Trascuriamo la facile dimostrazione e osserviamo soltanto l'implicazione semplice:



$$A \subseteq B \rightarrow B' \subseteq A'$$

Se consideriamo **A** l'insieme di tutti gli uomini e **B** quello degli animali, tale implicazione non è che il risultato già ottenuto da Aristotele: se ogni uomo è animale, allora ogni non animale è non-uomo.

Osserviamo ora come la nostra proprietà sia presente anche nei nostri testi di logica matematica come teorema o, più semplicemente, come esercizio di "equivalenza"¹⁵.

Infatti, dopo aver definito che equivalenza tra due proposizione **A** e **B** vuol dire che la proposizione $A \equiv B$ è sempre vera, cioè è una cosiddetta "tautologia", si può verificare come esercizio l'equivalenza tra le due proposizioni $A \rightarrow B$ e $\neg B \rightarrow \neg A$ il che vuol dire anche che una di queste "implica logicamente" l'altra¹⁶.

Possiamo osservare, infine, che il "modus tollens" di cui è stata fatta implicitamente una rapida storia, è stato usato da Karl Popper per la "falsificazione" delle teoria scientifiche: se una certa teoria **A** implica le conseguenze **B** ($A \rightarrow B$), nel caso che, al contrario, si verificano conseguenze contrarie ($\neg B$) a quelle attese, questo è sufficiente per la distruzione o falsificazione della teoria ($\neg A$), cioè $\neg B \rightarrow \neg A$ ¹⁷.

Lo scopo di questa rapida storia è stato quello di mostrare l'importanza del contributo (uno dei tanti contributi) alla matematica e alla logica da parte di Aristotele che spesso si è

[15] Come esercizio si trova appunto nel manuale di logica matematica di Elliot Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic* (1964)

[16] Ho usato termini e definizioni di logica matematica su cui non insisto ma che possono trovarsi in qualunque manuale specifico.

[17] L'analisi di K. Popper, che possiamo trovare ad esempio in *La ricerca non ha fine. Autobiografia intellettuale* (1964) tradotta in italiano da D. Antiseri (A. Armando ed. Roma, 1976 p.43 sgg.) è in realtà più complessa poiché esiste anche la cosiddetta "immunizzazione" che arricchisce anche se non cambia la sostanza della tecnica falsificatrice di Popper.



giovato della matematica per il conseguimento di proprietà talvolta di portata più vasta, e consentendo pertanto un approfondimento della matematica stessa.