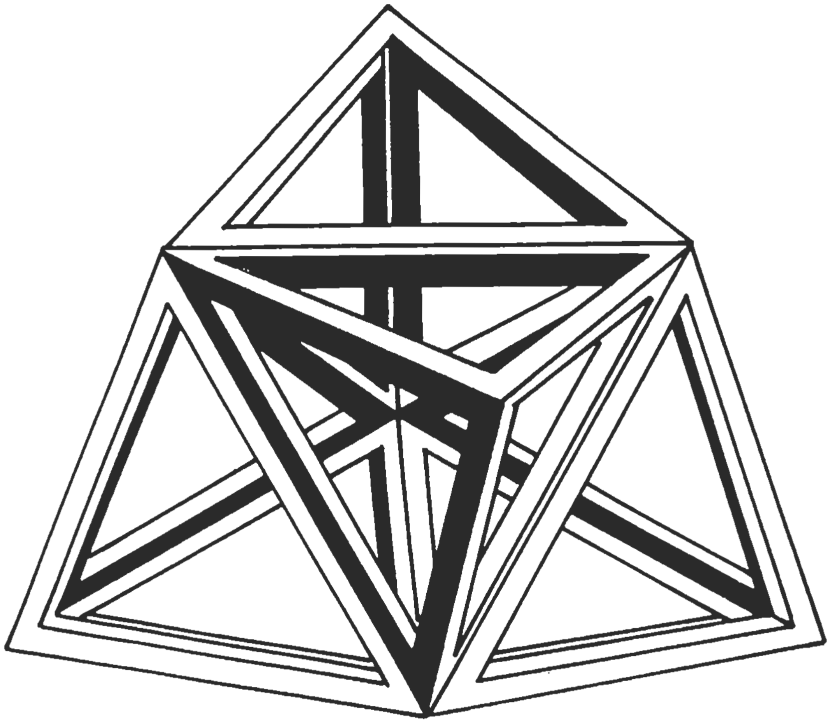
Euclides: Los Elementos.
Teoría de las Paralelas.



Método de Exhaución.

Ana García Ovejero.
Profesora de Matemáticas.
I.B. Villalba Hervás.

Ana Delgado Marante.
Profesora de Matemáticas.
I.B. La Orotava.

Los Elementos de Euclides

Como en el caso de los otros grandes matemáticos griegos, tenemos escasos datos sobre la vida de Euclides. No muchos más que los contenidos en este pasaje de PROCLO: "... Euclides, quien juntó los Elementos, recogiendo muchos de los teoremas de Eudoxo y perfeccionó muchos de Teeteto, y dando impecables demostraciones de cosas que habían sido escasamente probadas por sus predecesores. Este hombre vivió en el tiempo del primer Ptolomeo. Puesto que Arquímedes, que vivió inmediatamente después de éste, hace mención de Euclides y más aun, dijo que Ptolomeo en una ocasión le preguntó (a Euclides) si no había en geometría una vía más corta que la de los Elementos, y él respondió que no existía una VIA REAL para la Geometría".

Así pues se da el año 300 (a.c.) como la fecha en que Euclides alcanza su máximo esplendor como matemático.

Sirve esta fecha también como demarcación entre el período Helénico (600-300 a.c.) y el Alejandrino (300 a.c.-1 d.c.).

Euclides, el gran matemático alejandrino, autor de los "TRECE LIBROS DE LOS ELEMENTOS", la obra más traducida y editada de la historia de la humanidad, después de la Biblia.

Toda la estructura de los elementos está basada en LAS DEFINICIONES, LOS POSTULADOS y LAS NOCIONES COMUNES o AXIOMAS.

Las definiciones.

Los Términos o Definiciones euclídeas no tienen el significado lógico que hoy le atribuimos a una definición. Las definiciones son concebidas por los griegos como "reales", o sea, como un medio de describir objetos existentes o a los que se les atribuye la existencia: Son definiciones descriptivas de objetos existentes. Veamos algunas:

DEF I	**PUNTO es aquéllo que no tiene partes**
DEF II	**LINEA es una longitud sin ancho**
DEF IV	**LINEA RECTA es aquélla que yace igualmente respecto a sus puntos**
DEF V	**SUPERFICIE es aquéllo que tiene tanto largo como ancho**
DEF VII	**SUPERFICIE PLANA es aquélla que yace igualmente respecto a sus rectas.**

De la DEF I, dice Proclo que está conforme con el criterio de Parménides, para quien las definiciones negativas convienen a los principios. En las DEF IPYV y VII se pueden ver influencias platónicas (Parménides, 137 E).

Mencionemos también la DEF XXIII, de rectas paralelas, de la cual trataremos posteriormente y que es uno de los grandes aciertos del propio Euclides.

Los postulados.

POST I	**Se pide: Que de cualquier punto se pueda conducir una recta a todo otro punto**
POST II	**Y que, toda recta limitada, se pueda prolongar indefinidamente por derecho**
POST III	**Y que, con cualquier centro y cualquier distancia se pueda describir un círculo**
POST IV	**Y que todos los ángulos rectos sean iguales entre sí**
POST V	**Y que si una recta, cortando a otras dos, forma los ángulos internos a una misma parte, menores de dos rectos, las dos rectas progongadas se encontrarán de la parte en que son los dos ángulos menores de dos rectos**

Los tres primeros postulados son los que van a permitir construir rectas y círculos. Corresponderían a los fundamentos de las clásicas construcciones con regla y compás. Hay que observar que el POST III sólo permite el uso de un compás "no transportador". Es a partir de las proposiciones I.2 y I.3 que podremos "transportar" un segmento con el compás. (Es de notar pues, el afán de Euclides de reducir al mínimo el número de "verdades" postuladas).

En relación a la unicidad de la recta que une dos puntos hay que decir que Euclides la acepta sin explicitarlo (en la demostración de I.4).

Observemos que el POST III permite dibujar círculos de radio tan pequeño como queramos (continuidad) y tan grandes como se desee (infinitud del espacio), aunque como dice Heath, sería "unsafe" suponer que Euclides lo formulase con tal intención.

El POST IV no tiene, aparentemente, un carácter constructivo. Según Zeuthen, garantizaría la unicidad de la prolongación del segmento del POST II. El objetivo fundamental de este postulado es garantizar al ángulo recto como un patrón invariable para medir los demás tipos de ángulo. Su aplicación conlleva la suposición de unas figuras invariables, quedando así también garantizada la homogeneidad del espacio euclídeo.
El fundamental POST V, tiene de nuevo un carácter constructivo al postular la existencia de puntos de intersección entre rectas. Es la base, junto a la DEF XXIII, de la "teoría de las paralelas" que Euclides desarrolla en el Libro I y de la cual nos ocuparemos posteriormente. No goza de la evidencia inmediata de los otros postulados, lo cual provocó innumerables intentos de demostración, todos ellos infructuosos, a partir de los cuatro primeros postulados y a lo largo de 2.000 años.

Las nociones comunes.

La diferencia entre los postulados y las nociones comunes o axiomas reside, según Aristóteles, en que aquéllos son principios o verdades pertenecientes a una ciencia particular, como la geometría, mientras que los axiomas son principios comunes a varias ciencias. En el texto original de Los Elementos sólo aparecían cinco axiomas; comentadores posteriores añadieron cuatro axiomas más.

Los cinco axiomas originales son:

AX I **Las cosas iguales a una misma, son también iguales entre sí**

AX II **Si a cosas iguales se añaden cosas iguales, las sumas son iguales**

AX III **Si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales**

AX VII **Las cosas que se superponen una a la otra son iguales entre sí**

AX VIII **El todo es mayor que la parte**

Técnicas demostrativas de los elementos.

La vía demostrativa en la exposición de los teoremas en Los Elementos es la de la SINTESIS. Se procede desde lo conocido y lo simple a lo desconocido y complejo. La vía opuesta, la del ANALISIS, que va de lo complejo a lo simple, no es usada en la exposición de los teoremas, aunque juega un papel importante en el descubrimiento de las demostraciones.

Particularmente importante es el método de reducción al absurdo (per impossibile), método analítico que es frecuentemente usado en las demostraciones.

Insuficiencias lógicas de los elementos.

A este respecto, creemos conveniente transcribir algunos párrafos del libro del matemático francés Jean Dieudonné "EN HONOR DEL ESPIRITU HUMANO. LAS MATEMATICAS HOY".

"...Cuando Euclides pretende demostrar la sucesión de sus teoremas, no deja de sorprendernos un poco que cada uno vaya acompañado de una figura. Podríamos pensar que se trata simplemente de una ayuda para seguir la demostración más fácilmente.

Enseguida nos damos cuenta de que algunas de estas figuras desempeñan un papel más esencial, que recuerda bastante el modo de hacer de los geómetras indios o chinos, quienes se contentan con decir "MIRA", por toda demostración, después de trazar la figura.

Así por ejemplo, Euclides admite varias veces (II.17; VI.13) que una recta que tenga un punto en el interior de un círculo corta a este círculo. De la misma manera, si un círculo C tiene un punto interior y otro exterior a un círculo C', entonces C y C' se cortan (I.1; I.22). Ninguna de estas propiedades se deduce de los postulados.

Sin embargo, sólo es posible percibir estas imperfecciones porque estamos acostumbrados a las exigencias de la axiomática moderna. No parece haber habido muchas críticas de este tipo al texto de Euclides antes del siglo XIX. La rutina parece haber atenuado, en los geómetras, la conciencia de lo atrevido que resulta pasar del mundo de los objetos sensibles al de los que no son más que sus burdas imágenes. Mientras que esta conciencia es plenamente visible en Platón y Aristóteles, nos sorprende ver que pensadores tan profundos como Descartes y Pascal, que no dudaban en atacar de frente a la Escolástica, proclamaban con vigor la "verdad evidente" de los axiomas de la geometría.

De hecho no hacían sino expresar un estado de ánimo común a todos los matemáticos de su tiempo, que continuará acentuándose en el siglo siguiente, ya que todavía Gauss y Cauchy seguirán proclamando el "rigor geométrico" como modelo para las otras partes de las matemáticas. Quizá esta confianza irracional en una perfecta armonía entre los objetos geométricos y sus imágenes visibles resultaba necesaria para poder concebir los modelos matemáticos de la mecánica y de la física, que tanto éxito iban a tener.

De todas maneras, las críticas que recibió la construcción euclidiana, especialmente en el siglo XIX, dentro del movimiento general hacia un mayor "rigor" en el terreno de las matemáticas, no apuntan a la corrección de las inferencias de Euclides en el interior de sus demostraciones, sino al hecho de que están insuficientemente fundadas sobre definiciones y axiomas EXPLICITADOS. Existía un sentir general de que si se completaban convenientemente las bases de los razonamientos, se llegaría a un desarrollo completamente satisfactorio. Este fue el trabajo que realizaron Pasch y Hilbert a finales del siglo XIX, al enumerar sistemas de axiomas totalmente explicitados (23 en el *caso de Hilbert), a partir de los cuales se podían demostrar SIN FIGURAS todos los teoremas de Euclides".*

Sin embargo, los ELEMENTOS han servido a lo largo de la historia como MODELO DE SISTEMA HIPOTETICO-DEDUCTIVO.

Su organización, su ingenio y su claridad, inspiraron el tratamiento axiomático-deductivo no sólo de otras áreas de las matemáticas sino de todas las demás ciencias. La idea de una organización de todo el conocimiento físico basada en las matemáticas penetró en el mundo intelectual a través de los "Elementos".

Así por ejemplo, Spinoza (1.632-1.677) escribe su ETICA (Ethica ordine geometrico demonstrata) en la que a través de definiciones y axiomas se deducen teoremas y corolarios. O Thomas Hobbes (1.588-1679), autor de LEVIATAN ("La materia, forma y poder de una república eclesiástica y civil"), en donde la geometría de Euclides tiene una importancia fundamental en la configuración de su filosofía.

Por otra parte, los Elementos constituyen una ordenada y magnífica recopilación de toda la matemática pre-euclídea. Desafortunadamente, Euclides no escribió ningún "prólogo" a su obra, tal y como hicieran los otros dos grandes matemáticos de la "Edad de Oro" de la geometría griega: Apolonio y Arquímedes, privándonos así de datos preciosos sobre la autoría de muchos de sus teoremas.

Damos a continuación un cuadro-resumen de la composición de los trece libros de los Elementos con indicaciones de la paternidad de los contenidos, en la que la mayor parte de los historiadores de la matemática, coinciden.

-GEOMETRIA PLANA	**I** Teoría de la Igualdad y Equivalencia de Polígonos **II** Algebra Geométrica **III** Propiedades del Círculo **IV** Polígonos Regulares (de 3, 4, 5, 6, 15 lados)
-TEORIA DE LAS PROPORCIO-NES	**V** Teoría General de las Proporciones **VI** Aplicaciones a la Geometría Plana (Alg. geom.)
-LIBROS ARITMETICOS	**VII, VIII, IX**. Números Enteros y sus Propiedades
-IRRACIONALES	**X** Clasificación Geométrica de Irracionales Cuadráticos (compleja clasificación de los 25 tipos posibles de irracionales bicuadráticos)
-GEOMETRIA DE LOS SOLIDOS	**XI, XII** El Método de Exhaución
-ESTEREOME-TRIA	**XIII** Propiedades de los Poliedros Regulares

Según Marvin Greenberg los libros I, II, III, IV, VII, VIII y IX corresponderían a temática conocida ya por los pitagóricos. Los cuatro primeros libros, posiblemente, aparecerían sustancialmente ya en los "Elementos" de Hipócrates de Khios. El libro VIII sería de Arquitas.

Los libros V, VI y XII son atribuidos a Eudoxo.

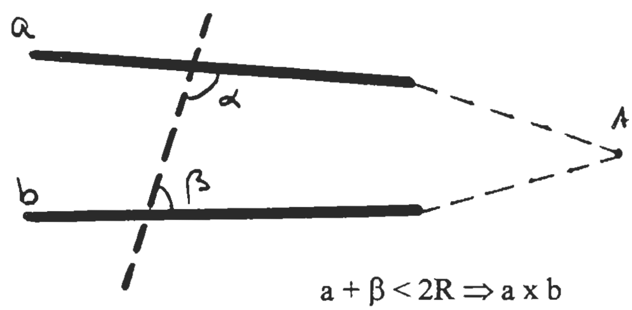
Finalmente, los libros X y XIII serían de Teeteto.

LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES: 465 proposiciones. Alguien ha dicho que una de las razones de la belleza de esta magna obra es que TANTO HAYA SIDO DEDUCIDO DE TAN POCO.

Teoría De Las Paralelas

Como ya se ha dicho, según el esquema de **"los Elementos de Euclides"**, después de las definiciones y de los axiomas se exponen las demostraciones de los teoremas y las soluciones de los problemas y, con eso, todo teorema nuevo se demuestra basándose en los axiomas y en los teoremas demostrados anteriormente. Sin embargo, un pasaje de este trabajo parecía no estar suficientemente justificado; se trata del **postulado del paralelismo, V de Euclides**, que formuló así:

"Si dos líneas rectas, al intersecarse con una tercera, forman ángulos internos unilaterales cuya suma es inferior a dos ángulos rectos, resulta ser que estas dos rectas, al prolongarlas ilimitadamente, se encontrarán por aquel lado en el que esta suma es inferior a dos ángulos rectos".



$a + \beta < 2R \Rightarrow a \times b$

La justeza del postulado del paralelismo de Euclides no suscitaba dudas. La duda respecto a este postulado radicaba en otra cosa. ¿Era justo el haberlo considerado en la categoría de los postulados?. ¿No sería posible demostrarlo y pasarlo a la categoría de los teoremas?.

La **"cuestión de las paralelas "** consiste en la tentativa de demostrar el Quinto Postulado mediante las proposiciones precedentes a su introducción y por lo tanto, mediante los primeros cuatro postulados y todas las consecuencias que de ellos pudieran extraerse.

El mismo Euclides parece esquivar el 5° postulado y no lo emplea en absoluto para las 28 primeras proposiciones. Se ha llamado a la geometría implicada en dichas proposiciones **"Geometría absoluta"**. Los postulados de esta geometría absoluta son:

1°) Se pide: que de cualquier punto se pueda conducir una recta a todo otro punto.

2°) Y que, toda recta limitada, se pueda prolongar indefinidamente por derecho.

3°) Y que, con cualquier centro y cualquier distancia, se pueda describir un circulo.

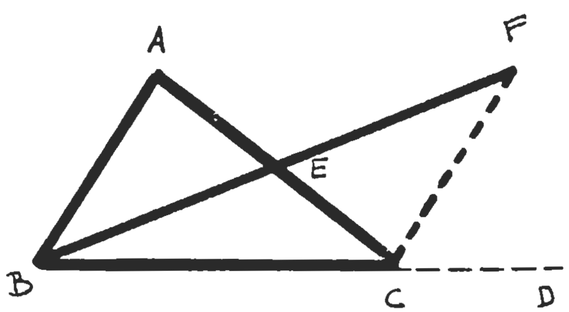
4°) Y que, todos los ángulos rectos sean iguales entre sí.

Conviene reseñar la definición de paralelas de Euclides que es la **definición LXXIII**:

"Paralelas son las rectas de un plano que prolongadas por sus dos partes en ninguna de ellas se encuentran".

Entre las proposiciones de geometría absoluta destacamos, por estar íntimamente ligadas a la cuestión de las paralelas las siguientes:

I.16: **"En todo triángulo, prolongado un lado, el ángulo externo es mayor que cada uno de los internos y opuestos"**.



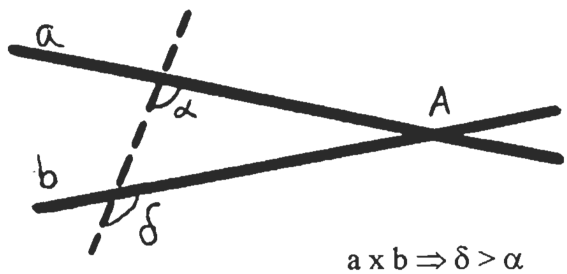
(En la demostración aparecen entre paréntesis los postulados o proposiciones anteriores a la **I.16** que se utilizan).

Sea ΔABC el triángulo y se prolonga uno de sus lados BC hasta D. Sea E el punto medio de AC (I.10);

tracemos BE prolongada hasta F, poniendo EF=BE (P1,2; I..3). Entonces AE=EC y BE=EF por construcción y ^AEB=^FEC porque son opuestos por el vértice (I.15).

Aplicando Lado-Angulo-Lado (I.4) se tiene que los triángulos ΔAEB y ΔFEC son iguales, por tanto ^BAC=^ECF, pero el ángulo ^ECD es mayor que ^ECF, luego ^ACD es mayor que ^BAE.

Análogamente, dividiendo por la mitad BC se demuestra que ^ACD es mayor que ^ABC.

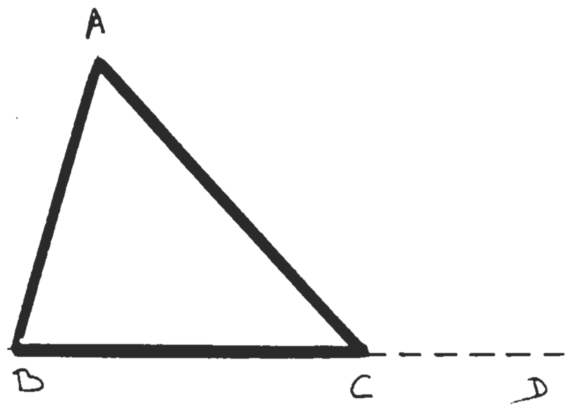


$a \times b \Rightarrow \delta > \alpha$

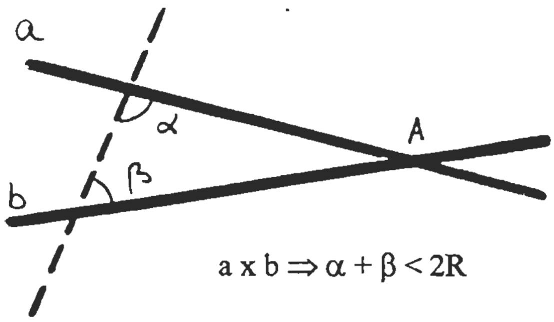
Es decir: **"cuando dos rectas se encuentran y son cortadas por una transversal (se forma un triángulo) forman ángulos correspondientes desiguales"**

I.17:" En todo triángulo, dos ángulos tomados juntos son menores de dos rectos".

Sea ΔABC el triángulo. Se prolonga BC hasta D. Puesto que en el triángulo ΔABC el ángulo ^ACD es externo y es mayor que el interno opuesto ^ABC, (I.16); se añade ^ACB común; pues la suma de ^ACD con ^ACB es mayor que la de ^ABC con ^BCA (noc. común 4). Más la suma de ^ACB y ^ACD es igual a dos rectos (I.13), por tanto ^ABC, ^BCA, tomados juntos son menores de dos rectos.



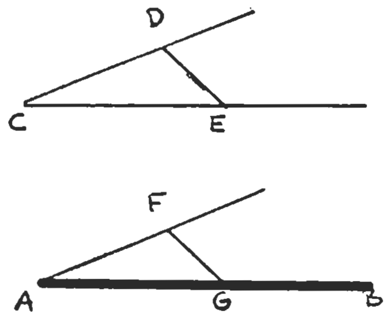
Análogamente demostraríamos que también ^BAC, ^ACB tomados juntamente, son menores que dos rectos, y así también ^CAB, ^ABC.



$a \times b \Rightarrow \alpha + \beta < 2R$

Es decir: " **Cuando dos rectas se encuentran y son cortadas por una transversal, los ángulos conjugados internos tienen una suma menor de dos rectos"**.

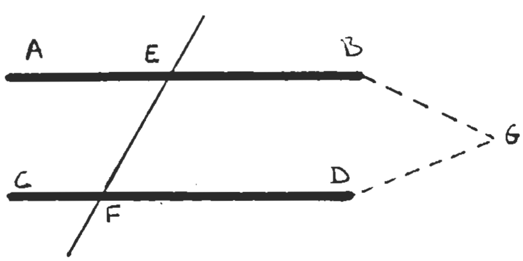
I.23: "Sobre una recta dada, y en un punto de ella, construir un ángulo rectilíneo igual a un ángulo dado".



Sea AB la recta dada, y A el punto sobre ella; y sea ^DCE el ángulo rectilíneo dado. Sobre cada una de las dos CD, CE se toman arbitrariamente dos puntos D, E; y se une D con E. Con tres rectas, iguales a las tres CD, DE, CE, se construirá el triángulo ΔAFG, de modo que CDsea igual a la AF, CE a la AG y FG a la DE (I.22).

Puesto que las dos DC, DE son iguales respectivamente a las dos FA, AG, y la base DE es igual a la base FG, el ángulo ^DCE es igual al ^FAG (I.8).

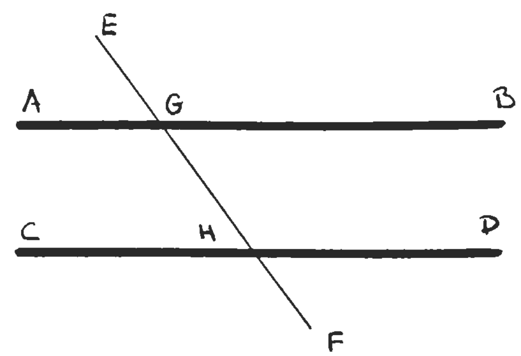
I.27: " Si una recta, cayendo sobre dos rectas, hace ángulos alternos iguales entre sí, las dos rectas serán paralelas entre sí ".



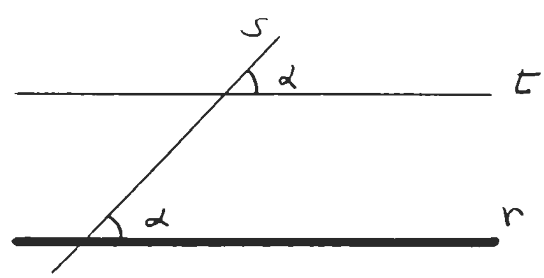
Cayendo sobre las rectas AB, CD la recta EF, hace ángulos alternos ^AEF, ^EFD iguales entre sí. Digo que, AB es paralela a CD. Si en efecto no lo fuesen, las AB, CD prolongadas se cortarían en la parte B, D ó bien en la parte A, C.Supongamos que se encuentran en G. Entonces en el triángulo ΔGEF, el ángulo externo ^AEF es igual al interno y opuesto ^EFG, lo que es imposible (I.16), luego no se cortan en la parte B, D. Análogamente se demostrará que tampoco se encuentran en la parte A, C. Mas rectas que no se cortan en ninguna de las dos partes son paralelas (Def. 23) luego AB es paralela a CD.

I.28: " Si una recta, cayendo sobre dos rectas, hace el ángulo externo igual al ángulo interno y opuesto a la misma parte, o los ángulos internos de la misma parte iguales a dos rectos, las rectas serán paralelas entre sí".

En efecto, ya que ^EGB es igual a ^GHD, así como ^EGB es igual a ^AGH (I.15), también ^AGH es igual a ^GHD y son alternos, por eso AB es paralela a CD (I.27). Por otra parte, puesto que la suma de ^BGH con ^GHD es igual a dos rectos, y también la de ^AGH con ^BGH es igual a dos rectos (I.13), ^AGH y ^BGH tomados juntos, son iguales a la suma de ^BGH con ^GHD. Se quita la parte común ^BGH; el resto ^AGH es igual al resto ^GHD (n. común 3) y son alternos, luego AB es paralela a CD (I.27).



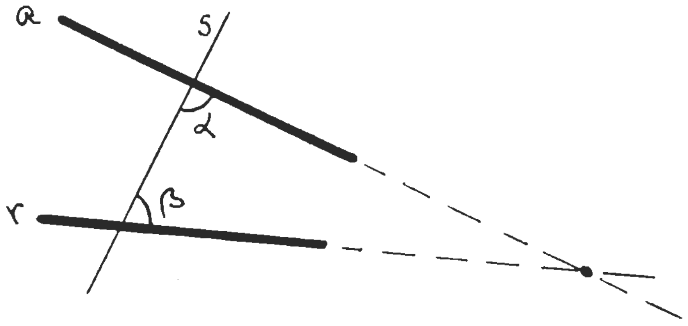
Observamos que con las dos proposiciones I.27, I.28 se demuestra que dos rectas no se pueden encontrar, es decir, son paralelas si cortándolas con una transversal se forman "ángulos internos" iguales o "ángulos correspondientes" iguales, o "ángulos conjugados internos" suplementarios, y que junto con la I.23, Euclides ha mostrado cómo es posible construir rectas paralelas a una recta dada: desde un punto cualquiera de la recta basta mandar otra recta S y construir sobre ella un ángulo igual al ángulo por ellas formado, la recta t obtenida será paralela a r.



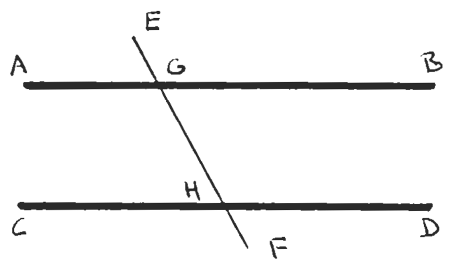
Con la siguiente proposición, **I.29**, Euclides pretende demostrar el recíproco del teorema anterior, es decir: **"Una recta**

que cae sobre dos rectas paralelas hace ángulos alternos iguales entre sí, el ángulo externo igual al interno y opuesto, y los ángulos internos a la misma parte, iguales a dos rectos".

Para demostrar este teorema, Euclides precisa del **V Postulado**; ¿qué ocurre si una recta a formase con la transversal s un ángulo α tal que sumado con β diese un resultado menor de dos rectos?. La respuesta parece evidente; la recta a tendrá que encontrar a la recta r, sin embargo, no consiguió demostrar esta conclusión que parecía tan natural y evidente. Generalmente, dos curvas que se aproximan arbitrariamente una a la otra sin encontrarse, se dice que son asintóticas o que se aproximan la una a la otra asintóticamente, pero no es obvio que las líneas rectas no puedan ser asintóticas. Debe ser probado. Euclides salva este escollo postulando que si $\alpha + \beta$ es menor que dos rectos, a y r se encuentran.



Ahora estamos en condiciones de demostrar la I.29.

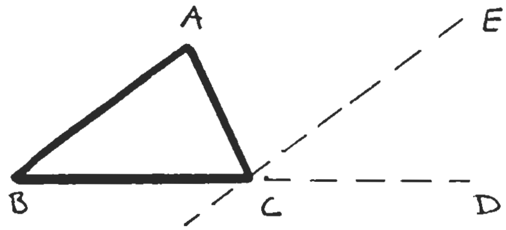


Supongamos que no fuese ^AGH igual a ^GHD; uno sería mayor, por ejemplo ^AGH; se añade ^BGH común, entonces ^AGH, ^BGH tomados juntos, son mayores que la suma de ^BGH con ^GHD (n.c. 2). Pero ^AGH, ^BGH tomados juntos, son iguales a dos rectos (I.13), con lo que la suma de ^BGH con ^GHD es menor que dos rectos, pero dos rectas que hacen los ángulos internos menores de dos rectos, prolongadas indefinidamente, se encuentran (P.5) con lo que AB, CD se encuentran. Pero no se encuentran porque se han supuesto paralelas, luego ^AGH no es desigual a ^GHD, por tanto será igual. ^AGH es igual a ^EGB (I.15) y por tanto ^EGB es igual a ^GHD (n.c. 1).

Se añade ^BGH común, como ^EGB, ^BGH tomados juntos son iguales a la suma de ^BGH con ^GHD (n.c. 2), y ^BGH, ^GHD tomados juntos son iguales a dos rectos, también la suma de ^BGH, ^GHD es igual a dos rectos.

Las siguientes proposiciones **I.30** y **I.31**, se enuncian respectivamente: " **Las paralelas a una misma recta, son también paralelas entre sí"** y **"por un punto dado, conducir una línea recta paralela a una recta dada"** y destacan que pese a que con anterioridad "sabíamos dibujar" paralelas, ahora podemos asegurar la unicidad de tal paralela.

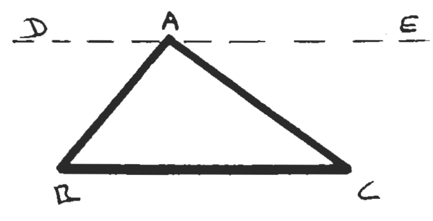
Terminamos esta sucesión de proposiciones o teoremas con uno de los más significativos del libro **I**, es el **I.32: " Prolongado un lado de cualquier triángulo, el ángulo externo es igual a los dos internos y opuestos, y los tres ángulos internos del triángulo son iguales a dos rectos"**.



Sea ΔABC el triángulo, y se prolonga uno de sus lados BC en D. Se conduce por el punto C la paralela CE a AB.

Los ángulos alternos ^BAC, ^ACE son iguales entre sí (I.29).También el ángulo ^ECD es igual al ^ABC (I.29), luego todo el ^ACD es igual a la suma de los dos internos y opuestos ^BAC, ^ABC (n.c.2).

Se añade ^ACB común. Entonces ^ACD, ^ACB, tomados juntos son iguales a la suma de los tres ^ABC, ^BCA, ^CAB (n.c. 2), pero ^ACD, ^ABC tomados juntos son iguales a dos rectos (I.13), luego también la suma de ^ACB, ^CBA, ^CAB es igual a dos rectos (n.c. 1).



Esta propiedad está en el origen de todo el tratamiento de las paralelas; la demostración original se adjudica a los pitagóricos y parece ser la que sugiere la figura adjunta, donde se hace uso de los ángulos alternos internos que las paralelas determinan con las transversales AB, AC.

También en Aristóteles (Metafísica 1051 a, 24) aparece: "¿Por qué la suma de los ángulos de un triángulo es dos rectos?. Porque los ángulos alrededor de un punto son igual a dos rectos. Si entonces, trazamos la paralela al lado, queda claro con simplemente mirar la figura ".

Observemos que es la demostración Euclídea usando I.31 y I.29 y ambas necesitan del V Postulado.

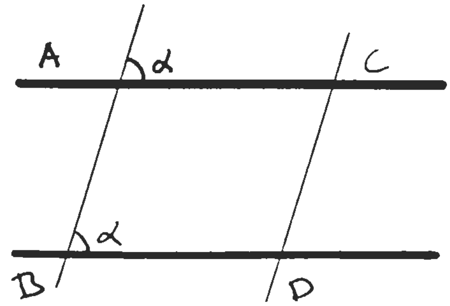
También implicada estaría la **I.33** : " **Las rectas que unen los extremos de dos rectas paralelas e iguales, son iguales y paralelas** "; esta proposición conlleva la existencia de paralelogramos y la equidistancia de rectas paralelas.

Aristóteles criticó la teoría de las paralelas existente en su tiempo (primeros analíticos, 11, 16, 65e, 4-7): " **Aquellos que creen construir rectas paralelas no se dan cuenta que suponen aquello que no podría demostrarse si las rectas paralelas no existiesen** ", y (en primeros analíticos 11, 17, 66a, 11-15): " **No es de hecho sorprendente que la misma falsa conclusión se siga de diversas hipótesis; por ejemplo, que las rectas paralelas se encuentren, sea suponiendo que el ángulo externo de un triángulo sea menor que el interno no adyacente, sea suponiendo que el triángulo tenga más de dos ángulos rectos** ".

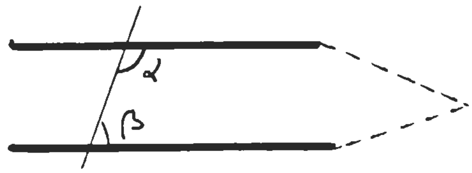
Así pues, Aristóteles acusa a los matemáticos de su tiempo de caer, inconscientemente, en un círculo vicioso (petitio principii).

El origen de este círculo vicioso podría estar en la propia definición de paralelas más corriente en el tiempo de Aristóteles. Son varios los autores que piensan que la definición pre-euclídea de rectas paralelas fue la de rectas que tienen la misma dirección, esto es, rectas que cortadas por una transversal forman ángulos correspondientes iguales. La "viciada" teoría de las paralelas podría radicar en lo siguiente: la definición anterior implicaría que los ángulos de un paralelogramo suman cuatro rectos.

En efecto, sean AC y BD paralelas, los ángulos correspondientes formados por la transversal AB iguales. Si admitimos sin más que esto sucede con cualquier transversal, entonces ^BAC + ^ABD = 2R y ^ACD + ^CDB = 2R y tendríamos probado que la suma de los ángulos de un paralelogramo es 4R. A su vez esto implicaría que la suma de los ángulos de un triángulo es dos rectos, primero para triángulos rectángulos y después para cualquiera y de aquí llegaríamos por reducción al absurdo a que:



"dos rectas paralelas no se encuentran nunca" ya que si se encontrasen formarían un triángulo cuyos ángulos sumarían más de dos rectos ($\alpha + \beta = 2R$). Es decir, obtendríamos **las proposiciones euclídeas sin necesidad del V Postulado**. La cuestión está en que como dice Gauss (Werke,IV, p.365) "Si la igualdad de dirección se reconoce por la igualdad de ángulos correspondientes con una tercera línea, no sabemos sin demostración, si la misma igualdad se verificaría con una cuarta línea (otra transversal) y por tanto necesitaríamos de un axioma: "Rectas que forman ángulos correspondientes iguales con una transversal, lo hacen con cualquier transversal", axioma que es equivalente al V Postulado.



Proclo alude a otra definición de las paralelas que tiene como fin el hacer posible la demostración del postulado V; se le atribuye a Posidonio (siglo II,I A.C.) y es: " Rectas paralelas son rectas equidistantes en el plano". Observamos que en el supuesto de que existan rectas coplanarias equidistantes se esconde la hipótesis de que el lugar geométrico de los puntos equidistantes de una recta es una recta; hipótesis que sustancialmente conduce al V Postulado.

La elección de la definición para líneas paralelas y la misma teoría de la paralelas de Los Elementos, es seguramente la gran aportación personal de Euclides, y esto lo podemos deducir del hecho de que entre Aristóteles y Euclides (40 años de diferencia) no hubo ningún gran matemático que pudiera elaborar una teoría tan perfecta, inexistente en el tiempo de Aristóteles, cuyas críticas debieron dirigirse a la teoría de las paralelas existente en alguno de "Los Elementos" pre-euclídeos, probablemente a los de Teudio.

Durante 2000 años se han venido sucediendo numerosos esfuerzos intentando demostrar el V Postulado y ninguno dio resultado positivo. El tipo de demostración errónea más difundido era el de su sustitución por otra proposición equivalente. Como ejemplos destacables están:

Proclo(412-485): Una paralela a una recta dada, dista de ella una longitud constante. Si una línea recta corta a una de las paralelas, también cortará a la otra.

Wallis(1616-1703): Existen triángulos cuyos ángulos son iguales pero de lados desiguales.

Saccheri(1667-1733): Existe al menos un rectángulo, es decir, un cuadrilátero cuyos ángulos son rectos.

Playfair(1748-1819): A través de un punto dado existe una única línea paralela a una línea recta dada.

Legendre(1752-1833): La suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos.

Bolyai(1775-1856): Dados tres puntos cualesquiera que no estén en línea recta, existe un círculo que pasa a través de ellos.

La lista podría prolongarse ampliamente. Para terminar diremos que la teoría de las rectas paralelas se convirtió a lo largo del siglo XIX en uno de los principales problemas de la geometría; Gauss se ocupó del problema a partir de 1792 al igual que un poco más tarde lo hicieron Schweikart y Taurinus; Gauss ocultó cuidadosamente sus investigaciones, Schweikart se limitó a la correspondencia privada con Gauss y sólo Taurinus publicó los elementos de una nueva geometría basada en la negación del V Postulado. Sin embargo, él mismo desechó la posibilidad de esta nueva geometría y ninguno de ellos llegó a dar la respuesta final del problema. En 1815, Lobachevski, comenzó a trabajar en la teoría de las paralelas, tratando al principio, como los demás geómetras de probar el V Postulado; prosiguiendo el camino en el que Saccheri y Lambert habían dado los primeros pasos, tomó como hipótesis la aserción contraria al postulado de Euclides, de la siguiente forma: " Por un punto exterior a una recta se pueden trazar no una, sino al menos dos rectas paralelas a la recta dada". Tomando esta proposición condicionalmente como axioma, y añadiendo las demás proposiciones de la geometría, si es incompatible con ellas llegaremos a una contradicción y probaremos así indirectamente el V Postulado. Sin embargo, tal contradicción no se detectó, llegando Lobachevski a las siguientes conclusiones:

El Quinto Postulado no puede demostrarse y, es posible desarrollar sobre la base de un axioma contrario una cadena de consecuencias que no contienen contradicción alguna y que forman por derecho propio una nueva geometría completamente lógica, tan rica y perfecta como la de Euclides.

Casi al mismo tiempo que Lobachevski, Janos Bolyai (1802-1860) descubrió también la imposibilidad de probar el V Postulado y la posibilidad de una geometría no euclidiana.

De esta forma queda zanjado el "Problema de las Paralelas".

Método de Exhaución

I. Introducción

El libro XII de Los Elementos de Euclides se dedica por entero al estudio de las relaciones entre áreas y volúmenes de figuras.

En él se encuentra una forma particular de demostración a la que Gregory de St. Vicent en el s. XVII llamó MÉTODO DE EXHAUCIÓN.

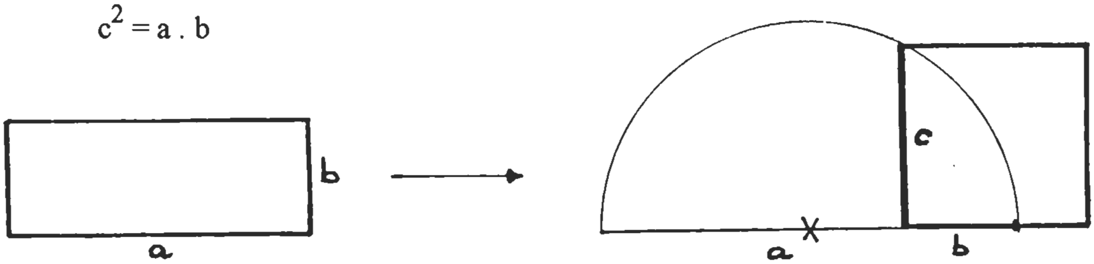
De todos es conocido que los matemáticos griegos trabajaban las figuras geométricas en términos de proporciones y que éstas sólo permitían la comparación (véase definición de proporción del libro V de Los Elementos o ponencia La Teoría de las Proporciones en Los Elementos de Euclides) de figuras del mismo tipo (segmentos con segmentos, áreas con áreas o volúmenes con volúmenes). En este sentido nos dice C.H. Edwards en The Historical Development of the Calculus:

*..."Los matemáticos griegos no representaban las magnitudes geométricas en términos de números reales. Consecuentemente, para especificar el área de una figura dada [...] el geómetra griego tenía que introducir una figura plana con área igual a la de la figura inicial. Por ejemplo, Arquímedes diría que el área, **A**, de un cilindro circular recto (excluyendo sus bases) es igual al área de un círculo cuyo radio, **r**, es la media proporcional entre la altura, **h**, y el diámetro, **d**, del cilindro (**r** es tal que **h/r=r/d**). Nosotros simplemente escribiríamos que **A= dh**"...*

Si hablamos del plano podemos decir que los griegos dominaban perfectamente las figuras rectilíneas: los polígonos. La cuadratura de cualquiera de ellas se reduce a un simple ejercicio si recogemos aquellas ideas que ya habían desarrollado los egipcios, según sugieren algunos de los problemas del *Rhind Papirus*. La cuadratura (construcción de un cuadrado de igual área que la de la figura dada) de un polígono la conseguían dividiendo la figura en triángulos los que a su vez se reducían a rectángulos y éstos a cuadrados. Por último quedaría encontrar un cuadrado de área la suma de las áreas de los cuadrados resultantes:

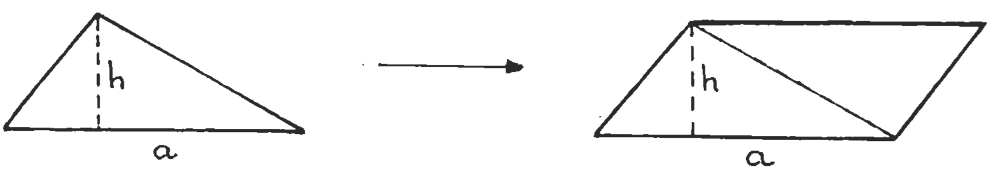
Cuadratura de un rectángulo

$c^2 = a \, . \, b$

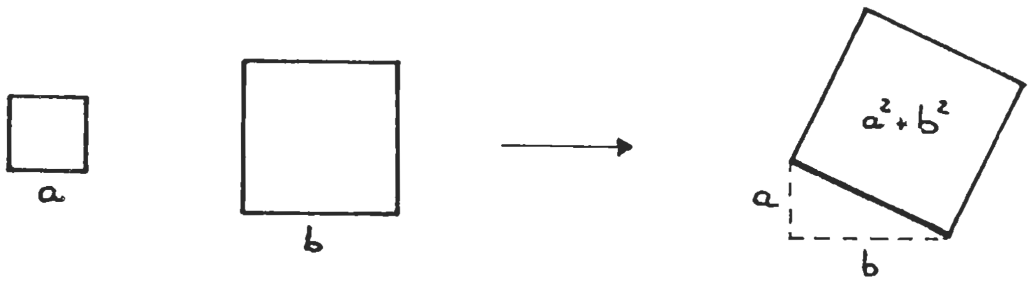


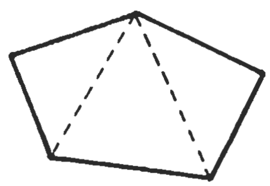
Cuadratura de un paralelogramo: reducción a un rectángulo

Cuadratura de un triángulo: reducción a un paralelogramo



Cuadratura de la suma de dos cuadrados





Cuadratura de un polígono: se resuelve sin más que dividir el polígono en triángulos (cuadrables). El área del polígono es igual a la suma de las áreas de estos triángulos (la suma de cuadrados es cuadrable).

El siguiente paso evidentemente tenía que ser el estudio de figuras curvilíneas. Con él conquistarían por completo el plano en lo que a áreas se refiere.

Pero ¿cómo abordar este problema? Si se pueden conocer las figuras rectilíneas más complejas por reducción al caso de figuras rectilíneas más sencillas, lo más obvio sería llegar a descomponer la figura curvilínea en suma de cierto número de figuras rectilíneas. Sin duda éste fue el propio pensamiento de los matemáticos griegos. Recuérdese a Antifonte (s. V a.C.) y su concepción del círculo como polígono regular de un número suficientemente grande de lados. Sin embargo, ¿cómo dar el salto de lo curvilíneo a lo rectilíneo?.Una idea tan llamativa se vio al punto mermada: les llevaba inevitablemente a toparse con el temido **infinito**.

Después de innumerables esfuerzos, fue el MÉTODO DE EXHAUCIÓN el que brillantemente sorteó este obstáculo mediante una doble reducción al absurdo y tomando, como mucho, cantidades que se hacían tan grandes como... y diferencias que se hacían tan pequeñas como...

La esencia matemática del método la podemos resumir en una serie de pasos que se repiten siempre a lo largo del libro XII de Los Elementos y que vamos a describir a continuación.

*Si se desea establecer la relación entre las áreas de dos figuras **A** y **B**; por ejemplo, demostrar que el área de **A** es k veces el área de **B** (**a(A)=ka(B)**):*

1°) Construiríamos dos secuencias de figuras rectilíneas A_1, A_2,..., A_n,... y B_1, B_2,..., B_n,... inscritas en **A** y **B** respectivamente, siendo $a(A_1)<a(A_2)<...a(A_n)<...$; $a(B_1)<a(B_2)<...a(B_n)<...$ y guardando entre sí la misma relación que queremos demostrar para **A** y **B**: $a(A_n)=ka(B_n)$, $\forall\ n\in N$

[Los polígonos A_i (B_j) tienen áreas estrictamente crecientes hacia el área de A (B)]

2°) Demostraríamos para cada secuencia que dada una cantidad positiva 0 siempre se puede encontrar un A_i y un B_j lo suficientemente grandes como para que

$$a(A)-a(A_i)<\varepsilon \qquad a(B)-a(B_j)<\varepsilon$$

[Los polígonos A_i (B_j) se acercan tanto a A (B) como queramos: "agotan" a A (B)]

*3°) Completaríamos la demostración viendo que si suponemos cierto que **a(A)>ka(B)** o que **a(A)<ka(B)**, llegamos a contradicciones; por tanto, **a(A)** tiene que ser k veces el **a(B)**.*

Nótese que hoy, el concepto de límite nos ahorraría la reducción al absurdo (tercer paso):

$$a(A)= \lim_n a(A_n)= \lim_n ka(B_n)= k\lim_n a(B_n)= ka(B)$$

Observemos que el método sirve para demostrar resultados que "se saben" de antemano. Se trata de ver que **a(A)=ka(B)** y no de cuánto vale **a(A)**.

Sin embargo, fue la contribución más grande de los griegos al cálculo de áreas y volúmenes y aparece por primera vez -en lo que se refiere a trabajos que se conservan- en Los Elementos. Pero ¿surgió sin más o tiene algún sustento histórico anterior?

Si nos dedicamos a la labor y buscamos a personajes cuyas ideas pudieran contribuir a la gestación de este método, nos encontraríamos con:

Antifonte y Brisón de Heraclea (s. V a.C.), sobre la cuadratura del círculo.

Hipócrates de Khios (470-400 a.C.), sobre la cuadratura de las lúnulas.

Demócrito de Abdera (460-370 a.C.), sobre la relación entre los volúmenes del cono con el cilindro y del prisma con la pirámide.

Mención especial merece **Eudoxo de Cnido** (390-337 a.C.) al cual se le atribuye, entre otros, el descubrimiento del método de exhaución y la demostración de algunas de las proposiciones del libro XII.

De la obra de Eudoxo no se conserva nada. Sin embargo por las referencias de autores posteriores, hoy se le considera uno de los más grandes matemáticos griegos. Tanto es así que Attilio Frajese en su obra Attraverso de la Storia della Matematica llega a decir de él:

..."Podemos decir que el método de exhaustión disciplina, regula, doma, el uso del infinito y que Eudoxo, al cual se le atribuye el método de exhaustión, es el más grande domador del infinito en la matemática griega, y tal vez en la de todos los tiempos"...

Uno de los autores por el que conocemos los trabajos de Eudoxo es Arquímedes (287-212 a.C.). Lo menciona en sus libros Sobre la Esfera y el Cilindro y La Cuadratura de la Parábola. En éstas y otras obras, Arquímedes también hace uso de la exhaución, utilizando no sólo figuras inscritas como Eudoxo -y Euclides- sino también circunscritas. Arquímedes perfecciona y completa el proceso.

El método de exhaución parte de una idea brillante: el "agotamiento" de la figura curvilínea en el plano o del sólido en el espacio, mediante polígonos o poliedros regulares. Y conlleva:

A. La necesidad de algún tipo de mecanismo más o menos fiable por el cual -de forma no rigurosa- se llegue a dilucidar el resultado que luego va a ser demostrado. La reducción al absurdo no puede hacerse efectiva de otra manera.

B. Un procedimiento ingenioso que permitió reducir el atasco al que habían llegado en este campo de la geometría: la proposición 1 del Libro X de Los Elementos:

Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor sustraemos una magnitud mayor que su mitad, de la que queda sustraemos una magnitud mayor que su mitad y si repetimos este proceso continuamente, llegaremos a una magnitud que será menor que la más pequeña de las magnitudes iniciales.

Resultado de Eudoxo que -en palabras de Boyer- constituye la base del método de exhaustión griego. En efecto, la aplicación de esta propiedad sustituye hábilmente el encuentro con el infinito por un juego entre cantidades que potencialmente "pueden ser" tan grandes o tan pequeñas como se desee.

Su enunciado y demostración indican que está estrechamente conectada, es una adaptación, de la definición 4 del libro V:

Dos magnitudes guardan entre sí una razón si al ser multiplicadas una puede exceder a la otra.

[L_1 y L_2, magnitudes, están en una razón si $\exists n \in N$: $nL_1>L_2$ y $\exists m \in N$: $mL_2>L_1$]

Criterio que comporta la homogeneidad de las magnitudes consideradas (sólo podemos comparar segmentos con segmentos, superficies con superficies,...) y elimina la posibilidad de la existencia de lo infinitamente pequeño y de lo infinitamente grande. Es el Postulado de Eudoxo-Arquímedes.

Como apoyo al primer proceso (A) hemos elaborado el apartado II; para ilustrar el segundo (B), el III.

II. Libro XII. Proposiciones

El libro XII consta de 18 proposiciones. Las dos primeras se refieren a áreas y más concretamente a la relación entre un círculo y su diámetro. El resto trata de volúmenes, comenzando con pirámides/prismas, cilindros/conos y terminando con la esfera.

Parece como si Euclides, contagiado por ese anhelo de belleza que rodea casi toda obra griega, hubiese querido mostrar su trabajo sobre la medida de figuras partiendo de la más sencilla y perfecta en el plano: el círculo, para llegar a su análoga en el espacio: la esfera. Para la primera, *círculos son uno a otro como los cuadrados de sus diámetros* ($C_1/C_2 = d_1^2/d_2^2$).

Para la segunda, *esferas son una a otra como los cubos de sus diámetros* ($E_1/E_2 = d_1^3/d_2^3$).

Las proposiciones más importantes en cuanto a lo que nos ocupa son la 2, la 7 y la 10, cuyos resultados se conocían antes del tiempo de Eudoxo. A ellas dedicaremos los siguientes párrafos.

Proposición XII 2:

Círculos son uno a otro como los cuadrados de sus diámetros

Simplicio (s. VI d.C.), a través de las palabras de Eudemo, cita a Hipócrates de Khios como el primero en establecer que *segmentos semejantes de círculos están en la misma razón que sus* *bases*. Resultado que emplea en la cuadratura de sus lúnulas y que prueba demostrando nuestra proposición.

Sin embargo, Simplicio no explica cómo fue la demostración de Hipócrates. Hoy se piensa que ni conocía el método de exhaución ni dio ningún otro tipo de prueba rigurosa.

Así, por ejemplo, Carl Boyer en su Historia de las Matemáticas dice:

..."sin embargo no parece probable que hiciera una demostración rigurosa de la proposición, máxime cuando por esta época (430 a.C.) la teoría de las proporciones se encuentra en una fase de desarrollo que la hacía aplicable sólo a magnitudes conmensurables"...

Entonces ¿cómo pudo hacer Hipócrates? Antifonte "veía" un círculo como un polígono regular de un número suficientemente grande de lados, tantos como para que segmento y arco se confundan. Si Hipócrates hizo suya esta idea, aquello que ocurre para polígono semejantes inscritos en círculos -son uno a otro como los cuadrados de los diámetros de los círculos que los contienen (prop. XII.1)- puede extenderse a los círculos mismos.

En cuanto a la proposición 7:

Cualquier prisma de base triangular se puede dividir en tres pirámides iguales [del mismo volumen] *de bases triangulares* [e iguales a la del prisma]

y a la proposición 10:

Cualquier cono es la tercera parte del cilindro que tiene igual base e igual altura que él

Arquímedes en más de una ocasión nombra a Eudoxo como el que dio una demostración matemática de las mismas. Sin embargo en El Método dice:

..."una buena parte del mérito de este descubrimiento debe ser atribuida a Demócrito quien fue el primero en enunciar estos resultados aunque sin probarlos"...

Según Heath, las palabras "sin probarlo" que emplea Arquímedes aquí no significan que Demócrito no diese ningún tipo de demostración, sino que ésta no cumplía las exigencias de lo que más tarde se consideró una demostración rigurosa; de la misma manera que "su método" mecánico -el de Arquímedes- no lo era.

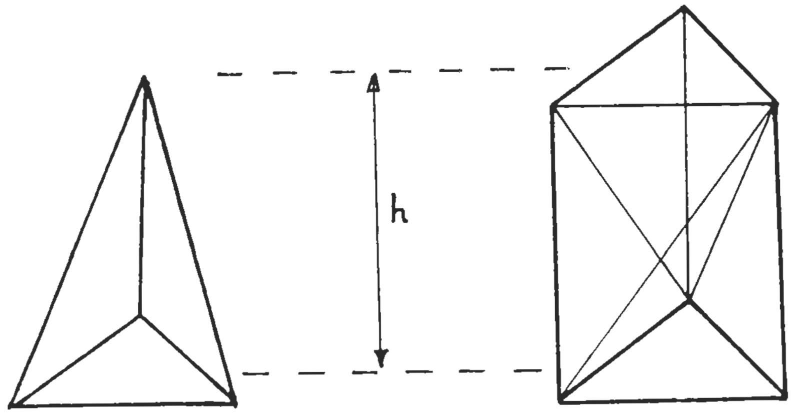
Una posible indicación de la forma en la que Demócrito lo probó puede darla la siguiente cuestión atribuida a él por Plutarco (en De Comm. Not. Adversus Stoicos, XXXIX 3):

Si se corta un cono por un plano paralelo a la base (se entiende infinitamente cercano a ella) ¿qué se puede pensar de las superficies de las secciones? ¿son iguales o distintas? Si fuesen desiguales harían al cono irregular, como si tuviese replanos, como una escalera; si por el contrario fuesen iguales parecería que el cono tuviese la misma propiedad que el cilindro esto es, de estar formado por círculos iguales y no desiguales, lo que sería absurdo.

Plutarco no dice cómo resolvió Demócrito la cuestión. Pero la frase estar formado por círculos iguales muestra que Demócrito tenía ya la idea de un sólido como constituido por la suma de un número "infinito" de láminas indefinidamente delgadas e indefinidamente cerca unas de otras (argumento ampliamente explotado siglos más tarde por Cavalieri en su Geometría de los Indivisibles). Partiendo de esto -y siguiendo las conjeturas de Enriques ya expuestas en la ponencia El Infinito y la Continuidad en la Matematica Griega - pudo "llegar" al resultado:

Dos pirámides de igual base triangular e igual altura tienen el mismo volumen.

Aplicando este test de igualdad, las tres pirámides en que se puede dividir un prisma de base triangular, en el sentido de XII 7, resultan iguales. Se concluye que *la pirámide es 1/3 del prisma que tiene igual base e igual altura que ella*



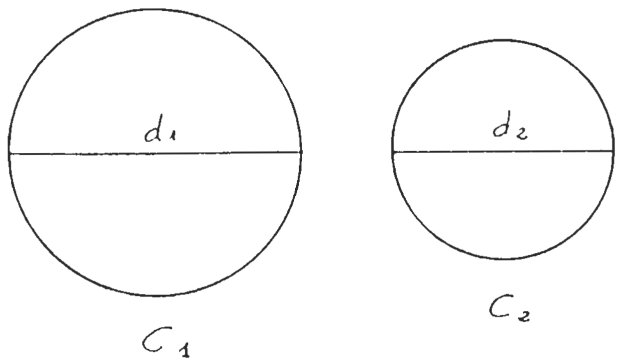
De la extensión a pirámides de base poligonal puede inferirse la propiedad de que *el cono es 1/3 del cilindro con igual base y altura* por "agotamiento" del cono con pirámides cuyas bases aumentan el número de lados indefinidamente.

III. Ejemplo de aplicación del método de exhaución. La proposición XII 2

PROPOSICIÓN XII.2:

Círculos son uno a otro como los cuadrados de sus diámetros

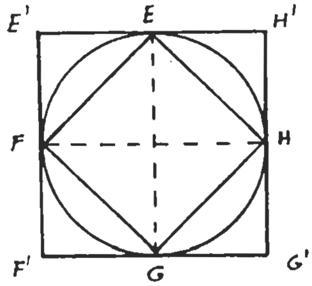
DEMOSTRACIÓN:



Tenemos que demostrar que $\frac{a(C_1)}{a(C_2)}=\frac{d_1^2}{d_2^2}$

Si no se diese la igualdad entonces $\frac{d_1^2}{d_2^2}=\frac{a(C_1)}{a(S)}$

siendo S una figura con área mayor o menor que C_2.



A. Supongamos que a(S)>a(C_2)

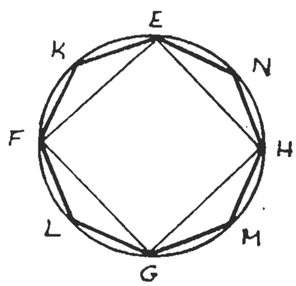
Sea EFGH el cuadrado inscrito en el círculo C_2. El área de este cuadrado es mayor que la mitad del área del círculo C_2:

$$a\,(EFGH) > \frac{1}{2}\,a\,(C_2)$$

puesto que si E'F'G'H' es el cuadrado circunscrito de la figura:

$$a\,(EFGH) = \frac{1}{2}\,a\,(E'F'G'H')$$

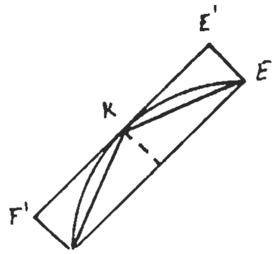
y como $\frac{1}{2}\,a\,(E'F'G'H') > \frac{1}{2}\,a\,(C_2)$ se concluye que $a\,(EFGH) > \frac{1}{2}\,a\,(C_2)$.



Sean K, L, M, N los puntos medios de los arcos ⌒ EF, ⌒ FG, ⌒ GH y ⌒ HE, que unidos con los que tenemos, forman 4 triángulos iguales.

Cada uno de ellos es mayor que la mitad del segmento circular correspondiente. Veámoslo para ΔEKF (con el resto ocurrirá lo mismo).

Trazando la tangente al círculo en K y las perpendiculares al segmento EF por ambos extremos, obtenemos el rectángulo EE'F'F.

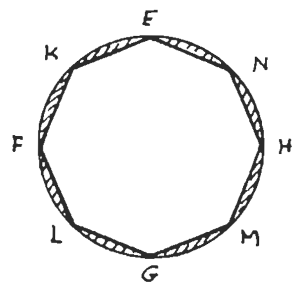


Como a(ΔEFK) = ½ a(EE'F'F) y ½ a(EE'F'F) ½ a(⌒EFK) entonces a(ΔEFK) ½ a(⌒EFK).

Si tomamos los puntos medios de los 8 arcos que nos quedan y los unimos con los puntos que ya tenemos, obtendremos 8 triángulos cuyas áreas son mayores que la mitad de las áreas de los 8 segmentos circulares.

La continuación de estas construcciones nos permite aplicar la proposición X 1:

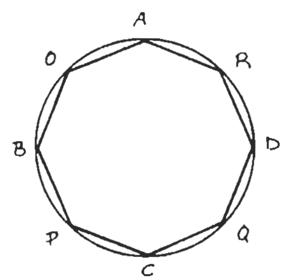
Dadas las magnitudes área de C_2 y la diferencia entre ésta y el área de S ($a(C_2)$, $a(C_2)-a(S)$), del círculo C_2 sustraemos el cuadrado inscrito EFGH, cuya área es mayor que la mitad del área de C_2; de lo que queda (los cuatro segmentos circulares ⌒EKF, ⌒FLG, ⌒GMH y ⌒HNE) sustraemos los 4 triángulos ΔEKF, ΔFLG, ΔGMH y ΔHNE, mayores que la mitad de los 4 segmentos; si seguimos repitiendo el proceso, podremos llegar a un resto -de segmentos circulares- cuya suma de áreas será menor que $a(C_2)-a(S)$.Supongamos, sin pérdida de generalidad, que estos segmentos son ⌒EK, ⌒KF, ⌒FL, ⌒LG, ⌒GM, ⌒MH, ⌒HN y ⌒NE.



Entonces el polígono -en este caso octógono- que determinan, EKFLGMHN debe ser de área mayor que la de S:

a(EFKLGMHN) > a(S) (1)

Tomemos, ahora, el polígono AOBPCQDR inscrito en C_1 y semejante a EKFLGMHN. Por la proposición XII.1 (polígonos semejantes inscritos en círculos son uno a otro como los cuadrados de los diámetros de los círculos que los contienen):



$$\frac{a(AOBPCQDR)}{a(EKFLGMHN)}=\frac{d_1^2}{d_2^2} \text{ y por hipótesis } \frac{d_1^2}{d_2^2}=\frac{a(C_1)}{a(S)}$$

luego $$\frac{a(C_1)}{a(AOBPCQDR)}=\frac{a(S)}{a(EKFLGMHN)}$$

Ahora bien, $a(C_1)>a(AOBPCQDR)$, por tanto $a(S)>a(EKFLGMHN)$ (2)

(1) y (2) están en contradicción:

$$\frac{d_1^2}{d_2^2}=\frac{a(C_1)}{a(S)}$$ con a(S)>a(C_2) es imposible.

B. Supongamos que a(S) <a(C_2)

Con el mismo razonamiento que en el apartado **A**, podríamos haber demostrado que

$$\frac{d_2^2}{d_1^2}=\frac{a(C_2)}{a(T)}$$ con a(T)<a(C_1) es imposible (1)

Dadas las tres magnitudes a(C_1), a(C_2) y a(S), es posible encontrar otra figura U para cuya área se cumpla:

$$\frac{a(S)}{a(C_1)}=\frac{a(C_2)}{a(U)}$$ y a(U)<a(C_1) pues a(C_2)< a(S) por hipótesis

Entonces:

$$\frac{d_2^2}{d_1^2}=\frac{a(S)}{a(C_1)}=\frac{a(C_2)}{a(U)} \quad ,a(U)<a(C_1)$$

luego

$$\frac{d_2^2}{d_1^2}=\frac{a(C_2)}{a(U)} \quad con\ a(U)<a(C_1)$$ lo que entra en contradicción con (1).

Hemos demostrado que los supuestos a(S)<a(C_2) y a(S)>a(C_2) no pueden ocurrir; por tanto, a(S) = a(C_2), es decir

$$\frac{d_1^2}{d_2^2}=\frac{a(C_1)}{a(C_2)}$$

c.q.d.

La parte esencial en esta demostración -dice Heath- es probar que podemos agotar un círculo en el sentido de X 1, inscribiendo sucesivamente polígonos regulares cada uno de los cuales tiene el doble de lados que el anterior. Probando que lo que le falta a cada uno de estos polígonos para llegar a ser el círculo siempre es mayor que el doble de lo que le falta al siguiente polígono para ser el círculo, entonces por la proposición X.1, la construcción de Euclides de sucesivos polígonos regulares en un círculo, si continúa lo suficiente, hace que lo que le falte a éstos para llegar a ser el círculo sea menor que cualquier área dada.

IV. El método de exhaución en Arquímedes

Los trabajos de Arquímedes en geometría comienzan donde los deja Euclides en el libro XII. Se dedica a la cuadratura de figuras curvilíneas y a la cuadratura y cubatura de superficies curvas, extendiendo el procedimiento de Eudoxo a lo que se conoce como MÉTODO DE COMPRESIÓN -según denominación de Dijksteirhuis- en su doble versión de diferencias o razones en orden creciente.

Para probar que el área o volumen de una figura S es igual a la de otra **C**, del mismo tipo, construye dos secuencias de polígonos o poliedros regulares $\{\mathbf{U_n}\}$ y $\{\mathbf{L_n}\}$ por sucesivos doblamientos del número de lados del polígono o poliedro inicial, que van "comprimiendo" a S:

$$\ldots<a(U_n)<a(U_{n+1})<\ldots<a(S)<\ldots<a(L_{n+1})<a(L_n)<\ldots$$

o $$\ldots<v(U_n)<v(U_{n+1})<\ldots<v(S)<\ldots<v(L_{n+1})<v(L_n)<\ldots$$

Cuando se consideran diferencias, demuestra que el área o volumen de las figuras inscritas ($\mathbf{U_n}$) o circunscritas ($\mathbf{L_n}$) crece o decrece de forma que se pueda aplicar la proposición X 1. La doble reducción al absurdo termina la demostración (tanto **a(S)>a(C)** [v(S)>v(C)] como **a(S)<a(C)** [v(S)<v(C)] son imposibles). En el otro caso se consideran razones entre polígonos de forma similar.

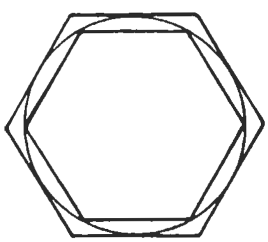
Esta idea de "encajonar" la figura tanto por fuera como por dentro completa y cierra el método de exhaustión. Su forma nos recuerda a Brisón de Heraclea quien, en su intento de cuadrar el círculo, toma un cuadrado inscrito y otro circunscrito al mismo.

Hoy su sustancia forma parte del cálculo integral:

..."gave birth to the calculus of the infinite conceived and brought to perfection successively by Kepler, Cavalieri, Fermat, Leibniz and Newton"...

(A History of Greek Mathematics, vol. II. Heath, pag. 19)

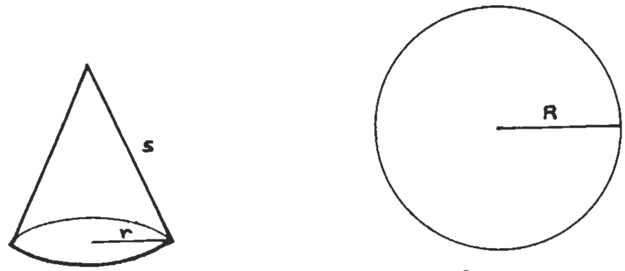
A continuación, y de forma muy breve, exponemos algunas deducciones de Arquímedes directamente relacionadas con el libro XII.



Si en éste Euclides llega al resultado de que el área de un círculo es proporcional al cuadrado de su diámetro, en "La Medida del Círculo", Arquímedes calcula el valor aproximado de la constante de proporcionalidad -llamémosla π - de esta razón, comenzando con un exágono (para algunos un decágono) inscrito y otro circunscrito. Doblando el número de lados obtiene polígonos de hasta 96 lados y calcula sus perímetros para buscar cotas superiores e inferiores de π:

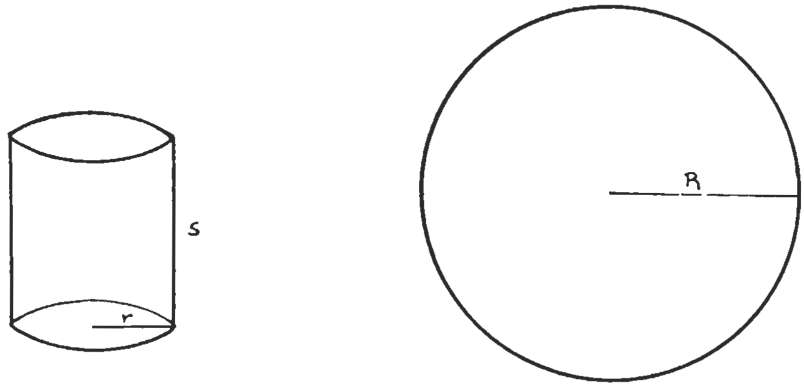
$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ (mejor aproximación a la que llegó)

En "Sobre la Esfera y el Cilindro" trata de encontrar la superficie de un cono y un cilindro rectos. Inscribiendo y circunscribiendo polígonos regulares en las bases del cono y cilindro construye pirámides y prismas que envuelven al cono y cilindro respectivamente. En las proposiciones 13 y 14 del libro I prueba, por el método de compresión, que las superficies de ambos sólidos (excluyendo sus bases) son iguales a las del círculo cuyo radio es media proporcional entre la generatriz del cono o cilindro y el radio o diámetro de la base.



$$\frac{s}{R} = \frac{R}{r} \;\Downarrow\; R = \sqrt{s \cdot r}$$

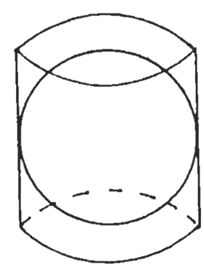
área del cono $= \pi R^2 = \pi s r$



$$\frac{s}{R} = \frac{R}{2r} \;\Downarrow\; R = \sqrt{2rs}$$

área del cilindro $= \pi R^2 = \pi 2 r s$

A continuación se dedica al estudio del volumen de una esfera y al área de su superficie, demostrando que la primera es $4/3\pi r^3$ y la segunda $4\pi r^2$ (Euclides se contentó con que el volumen de la esfera es proporcional al cubo de su radio).



La superficie de la esfera es 2/3 de la superficie del cilindro (incluidas sus bases)

El volumen de la esfera es 2/3 del volumen del cilindro.

Para demostrar todos estos resultados -excepto la aproximación de π – utilizó primero métodos heurísticos que le indicaran la solución y luego la doble exhaución de la figura. Pero de Arquímedes se hablará en próximas ponencias.

Bibliografía

Boyer, C. (1.986): Historia de las Matemáticas. Alianza Univ.

Dieudonne, J. (1.989): En honor del espíritu humano. Las matemáticas hoy. Alianza Universidad.

Edwards, C.H. (1.982): The historical development of the calculus. Springer-Verlag.

Frajese, A. (1.977): Atraverso la storia della matematica. Le Monnier.

Greenberg, M. (1.970): Euclidean and non-euclidean geometries. Freeman.

Heath, T. (1.981): A history of greek mathematics. Dover.

Heath, T. (1.956): The thirteen books of the elements. Dover.

Maracchia, S. (1.991): La historia de las matemáticas y su enseñanza. Conferencia en la Universidad de La Laguna.

Maracchia, S. (1.975): La matematica come sistema ipotetico-deduttivo. Le Monnier.

Vega, L. (1.990): La trama de la demostración. Alianza Univ.