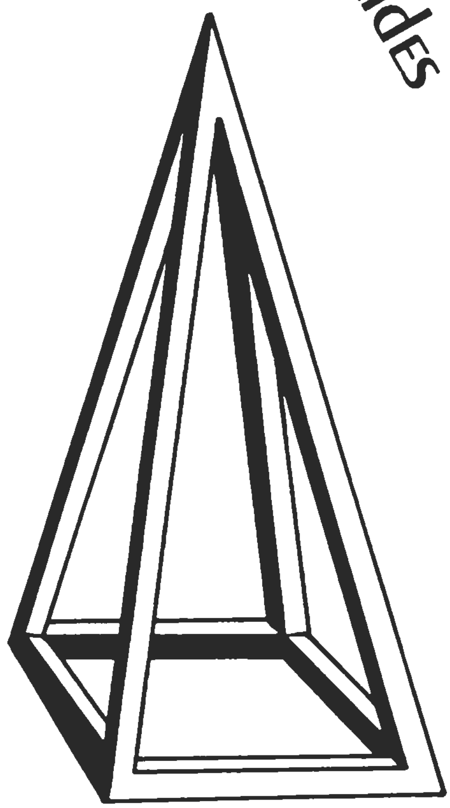
La Teoría de las Proporciones en los Elementos de Euclides



Antonio Martinón Cejas.
Profesor del Dpto. de Análisis Matemático.
Universidad de la Laguna.

1. Introducción.

En este trabajo se expone la teoría desarrollada en el Libro V de los Elementos, la célebre obra de Euclides de Alejandría (hacia 300 aC), y su relación con los números reales.

El tema tiene cierta dificultad, pues esencialmente se trata del estudio de los números irracionales a partir de los números racionales y supone la consideración de conjuntos formados por infinitos números de este tipo. Es opinión unánime que esta teoría no fue bien comprendida por la comunidad matemática hasta el siglo XIX. Por lo tanto, no se debe producir desánimo en el lector si algo hay que le quede poco claro en una primera lectura. A ello hay que añadir que la obra de Euclides goza de la opinión de ser una de las exposiciones científicas más brillantes, lúcidas y didácticas, mientras que el autor de estas líneas sólo puede aspirar a que el lector se anime a profundizar en los temas que aquí se tocan, ya que estas líneas constituyen un pobre aperitivo de los más ricos manjares que podrá encontrar en la obra del propio Euclides o en la de autores modernos.

Debe decirse que no todos emiten un juicio tan laudatorio acerca de los Elementos. Hay autores que consideran los Elementos «de una pedantería y de un estiramiento insufribles» (Bochner 1991), opinión que resulta muy digna de tener en cuenta.

En la redacción del presente trabajo, se han utilizado, principalmente, dos versiones de los Elementos: la inglesa de Heath (1956) y la española de Vera (1970). Está prevista una nueva edición completa en castellano, de la que ya se han publicado los Libros I a IV (Puertas 1991).

Como es habitual, aludiremos a las definiciones y proposiciones de los Elementos mencionando el libro de que se trate; así, por ejemplo, Definición V.5 significa la Definición 5 del Libro V y Proposición X.8 es la Proposición 8 del Libro X.

2. El Libro V de los Elementos.

Puede decirse, con carácter general, que los números sirven para expresar la medida de las cosas. Los primeros números usados por el hombre fueron los que hoy llamamos números naturales o enteros positivos: 1, 2, 3, ... Con el tiempo fueron surgiendo otras clases más amplias: racionales, irracionales, negativos, complejos.

La idea de número ha sufrido una tortuosa evolución hasta finales del siglo XIX y se ha desarrollado en dos niveles no siempre bien conectados.

Por un lado, nos encontramos con el plano «pragmático» y «calculístico», en el cual se han colocado numerosísimos matemáticos y todos los usuarios de las matemáticas (científicos, comerciantes, ...). En este nivel debemos situar el tratamiento que hacen los egipcios y los babilonios de los números, quienes llegaron a trabajar con los números naturales, las fracciones y números irracionales como $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$, aunque indudablemente desconocían que sus aproximaciones sexagesimales jamás podrían llegar a ser exactas (Kline 1985). Otro plano distinto es el «lógico» o «riguroso». Correspondió a los griegos, preocupados por obtener una «explicación racional de la naturaleza y del funcionamiento del universo» (Kline 1985), el primer tratamiento de este tipo acerca de los números naturales, las fracciones y los números reales positivos, recopilado en los Libros V, VII, VIII, IX y X de los Elementos.

Lo que realmente se hace en el Libro V de los Elementos es el desarrollo de una teoría sobre cocientes de magnitudes, sin distinguir si son o no conmensurables. Analicemos con algo más de detalle este último punto.

Desde los inicios de la geometría griega está presente la noción de semejanza de polígonos y, por lo tanto, la idea de razón o cociente de segmentos. Los primeros pitagóricos creían que con los números naturales y las fracciones (razones o cocientes de números naturales) se podrían describir todos los fenómenos, medir todas las cosas. En particular, desarrollaron una teoría de cocientes de segmentos basada en estas ideas. El descubrimiento que los propios pitagóricos hicieron de la existencia de parejas de magnitudes inconmensurables produjo una cierta conmoción al dejar sin fundamento toda la teoría de la semejanza.

Se hizo necesaria una teoría acerca de los cocientes de magnitudes para salvar la de la semejanza. Esta es la teoría expuesta en el Libro V, que generalmente se atribuye a Eudoxo de Cnido (408-355 aC), o al menos las principales ideas expuestas en él. Dedicamos en la próxima sección unos párrafos a su vida y obra. Sin embargo, hay autores que lo ponen en discusión. Así, Taton (1971) dice que

Sería irresponsable o ingenuo afirmar, sin testimonios indiscutibles, que haya sido fundada [la teoría del Libro V] por tal o cual matemático de genio aunque se llame Eudoxo ... Puesto que sólo dos escolios anónimos lo atribuyen a Eudoxo, digamos meramente que el Libro V figura en los Elementos de Euclides, dejando la cuestión indecisa entre Eudoxo, Euclides o algún genio desconocido.

Boyer (1986) afirma

Algunos comentaristas sugieren que el Libro V de los Elementos es obra de Eudoxo. Pero esto parece improbable.

Dejando a un lado la discusión sobre la paternidad de la teoría expuesta en el Libro V, sobre la que el autor de estas líneas nada tiene que decir, sí se debe resaltar la opinión unánime acerca de la grandeza del contenido. Por ejemplo, Bourbaki (1972) lo considera una «exposición magistral» y Taton (1971) afirma que

En el Libro V nos encontramos ante una de las cimas del pensamiento matemático ... muy difícil por muy hermosa ... y puede afirmarse que ese libro fue en verdad asimilado y superado tan sólo hace un siglo, poco más o menos ... Es una teoría que ni un Galileo ni un Torricelli han conseguido comprender, a pesar de sus esfuerzos, y cuyo principal defensor en el s. XVII, Barrow, dirá que es el coco de los matemáticos y los filósofos de su época.

Cuesta (1981) sostiene que

La primera definición rigurosa de los números reales, tan rigurosa, si no más que cualquiera de las modernas, se contiene en las admirables Definiciones 5 y 7 del Libro V ... Durante siglos, su precisión, tan escueta, la hizo inteligible.

Dieudonné (1989) dice que

Los matemáticos de la escuela de Platón ... llegaron, gracias a una atrevida construcción que no ha sido bien entendida hasta el siglo XIX ... Esta notable invención (probablemente debida al mayor de todos los matemáticos de aquella época, Eudoxo de Cnido) está muy próxima a nuestras concepciones actuales.

3. Eudoxo de Cnido.

Eudoxo nació en Cnido. La mayoría de los autores sitúa el año de nacimiento hacia 408 aC y el de la muerte hacia 355 aC, pero Dieudonné (1989) estima el primero hacia el 400 aC y el último hacia 347 aC, y Kline (1985) pone las fechas 390-337 aC. Se reproduce el texto que Turnbull (1968) (también está en Newman 1980) dedica a la vida de Eudoxo:

Entre sus discípulos [de Platón] figuraba un joven de Cnido, llamado Eudoxo, que llegó a Atenas en la más extrema pobreza, y que, como muchos otros estudiantes pobres, tuvo que vencer dificultades para mantenerse.

Para no forzar el bolsillo tenía que alojarse a orillas del mar, en el Pireo, y cada día tenía que recorrer andando las polvorientas leguas que le separaban de Atenas. Pero su genialidad en astronomía y matemáticas le valió atraer la atención, y finalmente le llevaron a ocupar una posición eminente. Viajó y estudió en Egipto, Italia y Sicilia, y conoció a Arquitas, el geómetra, y a otros hombres renombrados. Hacia 368 aC, a la edad de 40 años, Eudoxo regresó a Atenas acompañado de buen número de discípulos, más o menos cuando Aristóteles, entonces un muchacho de 17 años, cruzaba por primera vez el mar para ir a estudiar a la Academia.

La figura de Eudoxo es la más brillante de su época. Por ejemplo, Dieudonné (1989) estima que «fue uno de los mayores innovadores de la antigüedad».

A Eudoxo se le atribuyen tres aportaciones de la máxima importancia. La primera de ellas es la teoría de las proporciones o de los cocientes, a cuya exposición se dedica el presente trabajo. La segunda es el método de exhaución (palabra introducida por Gregorius Saint Vicent (1584-1667) (Vera 1970)), el «cálculo» de los griegos. La tercera es la primera teoría astronómica conocida, mediante la cual se describe los movimientos de los planetas haciendo uso de esferas en rotación, que posteriormente fue desarrollada por Hiparco (murió hacia 125 aC) y Claudio Tolomeo (muerto en 168) y que es conocida como sistema tolemaico.

Para más información sobre la vida y la obra de Eudoxo se puede consultar Heath (1965).

4. Magnitudes.

Como el Libro V trata de razones o cocientes de magnitudes, comencemos fijando la atención en la idea de magnitud. Euclides no da ninguna definición de lo que es una magnitud, pero engloba en ese concepto a las longitudes, las áreas y los volúmenes.

Dos longitudes constituyen magnitudes homogéneas o de la misma especie. Lo mismo podemos decir de las áreas y los volúmenes. Una longitud y un área no son homogéneas, no son de la misma especie.

Denotaremos por letras mayúsculas a las magnitudes: A, B, C, ...

Euclides contempla las nociones de orden y de suma, entre magnitudes homogéneas, aunque no las define. Si A y B son magnitudes homogéneas debe ser $A<B$, $A=B$ o $A>B$; **además, existe una magnitud C, del mismo tipo que A y B, tal que $A+B=C$. En las Nociones Comunes del Libro I de los Elementos se contienen algunas de las propiedades sobre el orden y la suma:**

Si $A = B$, entonces $A + C = B + C$

Si $A = B$, entonces $A - C = B - C$

Si $A < B$, entonces $A + C < B + C$

El producto de un número natural por una magnitud se entiende como una suma repetida:

$nA = A + A + ... + A$ (n veces) .

Si A y B son magnitudes tales que $A=nB$, para un cierto número natural n, se dice entonces que B es parte alícuota o submúltiplo de A (Definición V.1) y que A es múltiplo de B (Definición V.2).

A B

En el dibujo se tiene que $A=2B$ y resulta, por lo tanto, que B es parte alícuota o submúltiplo de A y que A es múltiplo de B.

Abordamos ahora uno de los conceptos fundamentales de esta exposición. Sean A y B magnitudes homogéneas. Se dice que son conmensurables si A y B tienen una parte alícuota común; esto significa que existe una magnitud C, del mismo tipo que A y B, de modo que

$A = mC$, $B = nC$,

para ciertos números naturales m y n; entonces puede ponerse

$$A/B = mC/nC = m/n .$$

Luego, si las magnitudes A y B son conmensurables, su razón o cociente A/B puede expresarse mediante una razón de números naturales m/n. Vale el recíproco de la anterior propiedad: si las magnitudes A y B tienen un cociente A/B que puede expresarse mediante una razón de números naturales m/n, entonces se tiene que A y B son magnitudes conmensurables. Estas ideas están expuestas en la Definición X.1 y en las Proposiciones X.5, X.7 y X.8 de los Elementos.

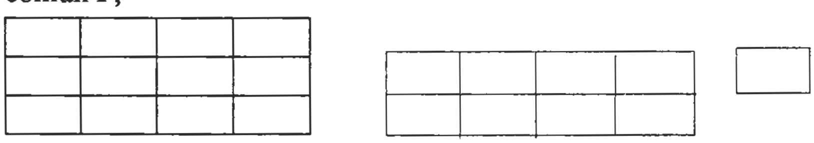
Consideremos, por ejemplo, los segmentos A y B del dibujo, que tienen una parte alícuota común E:

A B E

Se tiene que $A = 3E$, $B = 2E$,

y por lo tanto $2A = 6E = 3B$.

La razón A/B puede expresarse mediante 3/2. Si además consideramos las superficies C y D del dibujo, con parte alícuota común F,



C D F

se tiene entonces que $2C = 24F = 3D$,

y, por lo tanto, también C/D puede expresarse mediante 3/2.

Como ya se ha dicho, los pitagóricos descubrieron la existencia de magnitudes inconmensurables; por ejemplo, son inconmensurables las longitudes de la diagonal y del lado de un cuadrado. Por lo dicho en el párrafo anterior resulta que los cocientes de magnitudes inconmensurables no pueden expresarse como razón de números naturales, y debido a ello fueron denominados irracionales. La existencia de parejas de magnitudes incomensurables provocó una situación de crisis, ya que la teoría de la semejanza obligaba a tener en cuenta razones de magnitudes que no eran expresables como razones de números enteros. La teoría del Libro V de lo Elementos viene a dar respuesta a este problema, considerando cocientes o razones de cualquier par de magnitudes homogéneas; es decir, no distingue entre razones de pares de magnitudes conmensurables y razones de pares de magnitudes inconmensurables.

Conviene precisar que la nomenclatura moderna acerca de las magnitudes no es la que se usa aquí. Por ejemplo, actualmente suele decirse que los segmentos del plano los agrupamos en clases de modo que dos segmentos están en la misma clase si tienen la misma longitud; cada una de esas clases se dice que es una cantidad de la magnitud longitud.

Debemos mencionar que los griegos habían elaborado otra teoría sobre cocientes, identificándolos con una fracción continua y haciendo uso para ello de la denominada antifairesis. Una detallada discusión sobre esta teoría y la atribuída a Eudoxo se encuentra en un libro de Gardies (1988).

5. Razón de Magnitudes.

El Libro V de los Elementos contiene un total de 18 definiciones y ya hemos hecho referencia a las dos primeras. En lo que sigue analizamos las de principal importancia, que son las Definiciones V.3, V.4, V.5 y V.7, así como algunas otras.

La Definición V.3 introduce la idea de razón de dos magnitudes, pero no es propiamente una definición, sino más bien se trata de una llamada a la intuición acerca de lo que es una razón. Se dan ahora diversas versiones de esta definición con el objeto de que se aprecie el lenguaje confuso que se utiliza

> Razón es un cierto tipo de relación en tamaño de dos magnitudes del mismo tipo (Boyer 1986).
> Razón de dos magnitudes homogéneas es un cierto modo de comportarse según la cantidad (Frajese 1977).
> Una razón es un tipo de relación respecto al tamaño entre dos magnitudes homogéneas (Heath 1956).
> Una razón es cierta manera de ser de dos magnitudes homogéneas entre sí, según la cantidad (Taton 1971).
> Una razón es un tipo de relación en lo que se refiere al tamaño entre dos magnitudes homogéneas (Vega 1990).
> Razón es una relación cualquiera entre dos magnitudes homogéneas respecto de su cantidad (Vera 1970).

En las matemáticas anteriores a Eudoxo el término razón se reservaba para el cociente de magnitudes conmensurables, como queda claro al observar que el término irracional se aplica al caso de magnitudes inconmensurables, con el significado de que no tienen razón. Sin embargo, en el Libro V de los Elementos se extiende la idea de razón a cualquier par de magnitudes homogéneas, de forma tal que la teoría desarrollada es de aplicación tanto a pares de magnitudes conmensurables como inconmensurables, sin distinciones entre ambos tipos. La Definición V.3 evoca, por lo tanto, una noción de razón restringida a pares de magnitudes conmensurables y generaliza la idea a magnitudes de cualquier clase, debiendo insistir en que no se da propiamente una definición.

Tal como observa Frajese (1977), la limitación a magnitudes homogéneas da lugar a lo que entendemos por números puros, aunque en la física se contemplan razones de magnitudes no homogéneas (por ejemplo, espacio y tiempo) que dan lugar a otra magnitud (velocidad).

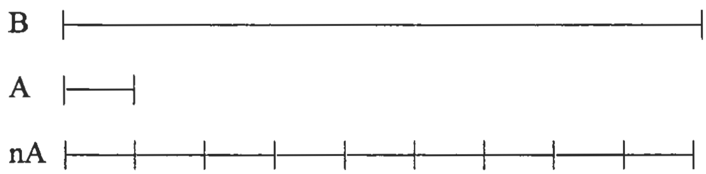
Euclides no utiliza ninguna notación para las razones, pero como es habitual usaremos A/B para referirnos a la razón de A a B, o de A entre B.

6. El Axioma de Arquímedes.

La Definición V.4 de los Elementos recoge uno de los principios básicos de la teoría. Podemos formularla en los siguientes términos:

Se dice que dos magnitudes tienen razón si cualquiera de ellas tiene múltiplos mayores que la otra.

Es decir, si A y B son magnitudes que tienen razón, existen números naturales m y n tales que $mA>B$ y $nB>A$. Esto suele expresarse diciendo que por muy pequeña que sea A y por muy grande que sea B, se puede encontrar un múltiplo de A mayor que B:



Este es el conocido como axioma de Arquímedes, que el propio Arquímedes de Siracusa (287-212 aC) atribuye a Eudoxo. Observemos que queda excluído el cero como magnitud y clarifica lo que debe entenderse por magnitud homogénea: un segmento y un área no son magnitudes homogéneas. Esta propiedad arquimediana de las magnitudes impide que haya magnitudes «infinitamente pequeñas».

Mencionemos que se ha desarrollado una «matemática no arquimediana», con ramas de activa investigación en la actualidad, como son el análisis no arquimediano y el análisis no-standard.

7. Igualdad de Razones.

La más importante de las definiciones que Euclides da en el Libro V de los Elementos es la Definición V.5, que podemos formular de la siguiente manera:

La razón A/B es igual a la razón C/D si cualesquiera que sean los naturales m y n, de $mA>nB$ se obtiene $mC>nD$, de $mA=nB$ se obtiene $mC=nD$, y de $mA<nB$ se obtiene $mC<nD$.

Otro modo de expresar la anterior definición es la siguiente: se verifica que A/B = C/D si cualesquiera que sean los naturales m y n se cumple

Si mA>nB, entonces mC>nD

Si mA=nB, entonces mC=nD

Si mA<nB, entonces mC<nD

Analicemos con más detalle la anterior definición. Consideremos dos magnitudes homogéneas A y B, que serán fijas en el razonamiento que sigue, y dos números naturales m y n. Cualquiera que sea el significado de A/B debe ser comparable con la fracción n/m. Caben, por lo tanto, tres posibilidades mutuamente excluyentes:

(1)A/B >n/m ,

(2) A/B = n/m ,

(3) A/B< n/m .

Sin embargo, este tipo de relaciones carece de significado, salvo (2) que corresponde al caso de magnitudes conmensurables ya explicado en la sección 4. En lugar de (1), (2) y (3) debemos escribir, respectivamente,

(1')mA >nB ,

(2') mA = nB ,

(3') mA <nB ,

que sí puede hacerse, pues se trata de la comparación de magnitudes homogéneas. Al escribir (1'), (2') y (3') debemos pensar que lo que realmente estamos haciendo es escribir correctamente (1), (2) y (3). Por lo tanto, un par de magnitudes homogéneas A y B, o la razón A/B, produce una partición en el conjunto de las fracciones positivas:

[A/B]- = {n/m : A/B >n/m} ,

$$[A/B] \; = \; \{n/m : A/B = n/m\} \, ,$$

$$[A/B]+ \; = \; \{n/m : A/B < n/m\} \, .$$

Las fracciones del conjunto [A/B] son aproximaciones por defecto del cociente A/B y las del conjunto [A/B]+ son aproximaciones por exceso. Observemos que si A y B son inconmensurables, entonces el conjunto [A/B] es vacío.

A/B]- [A/B] [A/B]+

Consideremos ahora otras dos magnitudes homogénas C y D. La Definición V.5 dice que A/B = C/D si ambos pares de magnitudes, A y B por un lado, y C y D por otro, producen la misma partición en el conjunto de las fracciones; es decir, coinciden los tres conjuntos de fracciones a los que da lugar cada una de las razones: coinciden las aproximaciones por defecto

$$[A/B]- = [C/D]- \, ,$$

las aproximaciones por exceso

$$[A/B]+ = [C/D]+ \, ,$$

y también

$$[A/B] = [C/D] \, ,$$

que en el caso conmensurable son no vacíos y en el inconmensurable son vacíos. Obsérvese que esta última igualdad garantiza que si A/B = C/D, entonces decir que A y B son conmensurables es equivalente al hecho de que lo sean C y D; o bien, A y B son inconmensurables es equivalente a que lo sean C y D.

Hagamos dos observaciones finales acerca de esta Definición V.5 sobre la igualdad de las razones A/B y C/D. Primera, las magnitudes A y B deben ser homogéneas, así como las C y D, pero no necesariamente han de ser las cuatro homogéneas entre sí; por ejemplo, A y B pueden ser longitudes y C y D superficies. Segunda, se trata de una definición por abstracción, en el sentido de que no se enumeran las características del ente definido. Como indica Frajese (1977), no se define directamente lo que es una razón, pero se establece cuando dos magnitudes tienen la misma razón que otras dos. Si, por ejemplo, queremos definir la temperatura, todos los posibles cuerpos son clasificados poniendo en un mismo grupo todos los que poseen igual temperatura; en cada grupo hay cuerpos de lo más variado: formas distintas, pesos distintos, materias distintas, ... Hacemos abstracción de todos los caracteres y prestamos atención sólo al carácter común a todos (la temperatura): así se define por abstracción la temperatura. La Definición V.6 dice que las magnitudes que tienen la misma razón se llaman proporcionales. Vega (1990) entiende que se trata de una relación binaria entre razones de magnitudes, es decir una relación cuaternaria entre magnitudes, de modo que debe decirse que las magnitudes A, B, C y D son proporcionales para indicar que $A/B = C/D$. Indica este autor que esta es la idea de Euclides y que esa idea le lleva a enunciar y demostrar en la Proposición V.11 la siguiente implicación:

Si $A/B = C/D$ y $E/F = C/D$, entonces $A/B = E/F$,

lo que podría parecer superfluo si se usa la primera noción común del Libro I: «Cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí». Sin embargo, esta Proposición es básica y en absoluto superflua, pues es la que realmente permite poder considerar la igualdad de razones como el mismo concepto de igualdad que aparece en esa noción común; es decir, la Proposición V.11 viene a decir que la Definición V.5 es coherente, en el sentido de que la igualdad de razones no depende de la representación que se use de una determinada razón.

Hay confusión acerca del significado del término proporcional. Como observa Max Simon (ver Heath 1956), ¿qué es proporcional a qué? Por ejemplo, se dice que el peso es proporcional al precio.

8. Desigualdad de Razones y otras Definiciones.

La Definición V.7 establece el orden entre razones de magnitudes:

La razón A/B es mayor que la razón C/D si existen números naturales m y n tales que $mA>nB$ y $nD>mC$.

Obsérvese que la idea clave es la siguiente: $A/B>C/D$ si existe una fracción n/m tal que

$$A/B > n/m > C/D ,$$

y de aquí se obtienen las desigualdades

$$mA>nB \quad y \quad nD>mC .$$

De Morgan (ver Heath 1956) observa que el test de la desproporción es más simple que el de la proporción, pues en este último son necesarias infinitas comprobaciones y ahora sólo es necesario encontrar dos naturales satisfaciendo una condición. Obsérvese que $A/B=C/D$ es equivalente a ser falsas $A/B>C/D$ y $A/B<C/D$.

El resto de las definiciones del Libro V están destinadas a introducir cierta nomenclatura. Sólo prestamos atención a tres de estas definiciones.

La Definición V.8 dice que una proporción tiene al menos tres términos. Se trata de lo que se denomina proporción continua:

$$A/B = B/C .$$

En este caso se dice que la razón A/C es la duplicada de A/B (y de B/C) (Definición V.9). Si A, B, C y D están en proporción continua,

$$A/B = B/C = C/D\ ,$$

se dice que A/D es la triplicada (Definición V.10) de A/B (y de B/C, y de C/D). Estas dos últimas definiciones envuelven una idea de producto de razones iguales, al menos en el caso de proporción continua:

$$A/B\ .\ B/C = A/B\ .\ A/B = A/C\ ,$$

$$A/B\ .\ B/C\ .\ C/D = A/B\ .\ A/B\ .\ A/B = A/D\ .$$

9. Proposiciones sobre Magnitudes.

El Libro V contiene 25 proposiciones, algunas relativas a magnitudes y otras a razones de magnitudes. Comencemos con las primeras.

Las Proposiciones V.1, V.2, V.5 y V.6 establecen ciertas igualdades que con el lenguaje algebraico actual resultan muy familiares. He aquí los enunciados:

$$mA + mB = m(A + B)\ ,$$

$$mA + nA = (m + n)A\ ,$$

$$mA - mB = m(A - B)\ ,$$

$$mA - nA = (m - n)A\ .$$

Con el objeto de ilustrar el estilo de las demostraciones de los Elementos, fijamos ahora la atención en la penúltima de esas igualdades (Proposición V.5).

Si una magnitud C es el mismo múltiplo de una magnitud A (C=mA) que una parte D de C lo es de una parte B de A (D=mB), entonces la diferencia C-D es también el mismo múltiplo de la diferencia A-B (C-D=mA-mB=m(A-B)).

Aquí la palabra parte debe entenderse en el sentido de submúltiplo. Veamos ahora la demostración que aparece en los Elementos, pero utilizando un lenguaje más algebraico. Se trata de demostrar que

$$mA - mB = m(A - B) .$$

Sea E tal que

$$mA - mB = mE .$$

Entonces

$$mA = (mA - mB) + mB = mE + mB = m(E + B) ,$$

luego

$$A = E + B ,$$

y resulta

$$E = A - B ,$$

y consecuentemente

$$mA - mB = mE = m(A - B) .$$

La anterior demostración utiliza la existencia de submúltiplos de una magnitud, que Euclides ni prueba ni postula explícitamente, al introducir la magnitud E en el razonamiento. Una demostración que soslaya esta dificultad se desarrolla de esta manera:

$$m(A - B) + mB = m(A - B + B) = mA ,$$

luego

$m(A - B) = mA - mB$.

Esta última argumentación es una simplificación de una que figura en Heath (1956).

10. Proposiciones sobre Razones.

Recogemos tan sólo algunas de las proposiciones que se refieren a razones, con el objeto de dar una idea de su contenido.

Las Proposiciones V.15 y V.4 establecen lo siguiente:

$A/B = mA/mB$,

Si $A/B = C/D$, entonces $mA/nB = mC/nD$.

Las Proposiciones V.7 y V.9 permiten asegurar la equivalencia entre las tres siguientes igualdades:

$A = B$,

$A/C = B/C$,

$C/A = C/B$.

Análogamente, las Proposiciones V.8 y V.10 pueden agruparse diciendo que las siguientes desigualdades son equivalentes:

$A > B$,

$A/C > B/C$,

$A/C < B/C$.

La Proposición V.14 afirma que si $A/B = C/D$, se verifican las siguientes implicaciones:

Si $A>C$, entonces $B>D$,

Si $A=C$, entonces $B=D$,

Si $A<C$, entonces $B<D$.

A partir de la igualdad $A/B=C/D$ en las Proposiciones V.16, V.17 y V.18 se establecen las siguientes igualdades:

$A/C = B/D$,

$(A-B)/B = (C-D)/D$,

$(A+B)/B = (C+D)/D$.

Obsérvese que a partir de la primera de ellas se obtiene la igualdad de las razones inversas, aplicando esa proposición dos veces: si $A/B=C/D$, entonces $A/C=B/D$, luego $B/D=A/C$, y finalmente $B/A=D/C$.

Las Proposiciones V.22 y V.23 tienen relación con el producto de razones en casos especiales:

Si $A/B=D/E$ y $B/C=E/F$, entonces $A/C=D/F$,

Si $A/B=E/F$ y $B/C=D/E$, entonces $A/C=D/F$.

Igualmente la Proposición V.24 evoca la suma con mismo denominador:

Si $A/B=C/D$ y $E/B=F/D$, entonces $(A+E)/B=(C+F)/D$.

Para finalizar damos la demostración de la Proposición V.16: queremos ver que

Si $A/B=C/D$, entonces $A/C=B/D$.

Por la Proposición V.15 se tiene que, para cualesquiera números naturales m y n, se verifica:

$mA/mB = A/B$ y $nC/nD = C/D$.

La Proposición V.11 afirma (ver sección 7)

Si $A/B=C/D$ y $E/F=C/D$, entonces $A/B=E/F$,

y de ahí se obtiene

$mA/mB = nC/nD$.

La Proposición V.14 permite entonces escribir

Si $mA>nC$, entonces $mB>nD$,

Si $mA=nC$, entonces $mB=nD$,

Si $mA<nC$, entonces $mB<nD$.

Este último conjunto de implicaciones garantiza, por la Definición V.5, la igualdad $A/C=B/D$.

Una de las propiedades que Euclides ni postula ni demuestra es la existencia de la cuarta proporcional de tres magnitudes dadas. Es decir, dadas tres magnitudes A, B y C, siendo A y B homogéneas, existe una cuarta magnitud D, homogénea con C, de modo que $A/B=C/D$. Sin embargo, su unicidad sí se puede deducir a partir de las Proposiciones V.9 y V.11. Se trata de ver que

Si $A/B=C/D$ y $A/B=C/E$, entonces $D=E$.

En efecto: por la Proposición V.11 resulta $C/D=C/E$ y por la Proposición V.9 se obtiene $D = E$.

11. De Euclides al Siglo XIX.

La teoría expuesta en el Libro V de los Elementos es, en ciertos aspectos, una teoría de los números reales, pero fuertemente vinculada a la geometría, pues las magnitudes que Euclides considera son todas geométricas.

Ahora podemos plantearnos una pregunta básica: ¿Hasta que punto la teoría expuesta en el Libro V es una teoría de los números reales? Por supuesto, nos referimos a los números reales positivos, pues los números negativos aparecen mucho más tarde en la evolución de las matemáticas. Hagamos una comparación simple entre ambas teorías.

Por un lado, los números reales constituyen un conjunto de entes en el que se ha definido un orden y dos operaciones (suma y producto). Por otro lado, en los Elementos se consideran magnitudes y razones de magnitudes, de forma que se define un orden entre razones (Definición V.7), pero no se define ni la suma ni el producto de razones de magnitudes. Precisemos un poco más estas últimas afirmaciones. Cuando aparece la suma, no de manera clara, los sumandos tienen el mismo denominador (Proposición V.24); sin embargo, sí considera la suma de magnitudes. El producto de razones se contempla en ciertos casos, aunque no de forma explícita. La Proposición VI.23 contempla el producto de cocientes de longitudes A/B . C/D y demuestra que se trata del cociente de dos áreas AC/BD. Pese a todo, «no por ello deja de tener Euclides una concepción perfectamente clara de esta operación y de sus propiedades», afirma Bourbaki(1972). La teoría del Libro V no resultó manejable para los cálculos, principalmente por su concepción del producto de razones, fuertemente vinculada a la geometría y sólo resultó clara para unos pocos llenos de espíritu riguroso (Bourbaki 1972). Este rigor de Euclides paralizó el desarrollo del cálculo algebraico. Los cálculos habían de ser siempre representados geométricamente y el producto de dos longitudes es un área, lo que origina una complicación que hace imposible el manejo de relaciones algebraicas de grado superior al segundo.

En el periodo alejandrino (a partir de 300 aC) Arquímedes y Apolonio de Perga (262-190 aC) prosiguieron el método de Euclides. Sin embargo, al declinar la matemática griega, se impone el punto de vista intuitivo y pragmático, en la línea de egipcios y babilonios, ta como no dejaron de hacer los logísticos o calculadores profesionales. Así hacen Claudio Tolomeo (s. II) y Diofanto (s.III) , quienes no se complican con representaciones geométricas de los números al desarrollar técnicas de cálculo, utilizan los números irracionales (π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$) acríticamente y los aproximan cuando es necesario.

Los hindúes y los árabes, que tomaron el relevo de las matemáticas después del final de la civilización griega alejandrina, usaron enteros, fracciones y también irracionales, hallando reglas para operar con ellos, tales como $\sqrt{ab}=\sqrt{a}.\sqrt{b}$. Luca Pacioli (1445-1514), Michael Stifel (1486-1567) y Jérôme Cardan (1501-1576) usaron los números irracionales siguiendo la tradición hindú y árabe, como también lo hizo John Napier (1550-1617) al introducir los logaritmos.

Un avance importante se produjo con los trabajos de Rafael Bombelli (1526-1572). Bombelli supuso que existe una correspondenica exacta entre los números reales y los segmentos sobre una recta. Elegida una unidad OU, existe una correspondencia biyectiva entre longitudes OX y números reales. Definió para las longitudes las cuatro operaciones básicas. De esta forma los números reales continuaban estrechamente vinculados a la geometría, pero ahora de forma más manejable. René Descartes (1596-1650) en 1637 con su Geometría (Descartes 1954) y Pierre Fermat (1601-1665), en un manuscrito de 1629, crearon la geometría analítica y ninguno de los dos tenía una noción clara de los números irracionales. Ambos, sin embargo, supusieron una correspondencia entre números reales y puntos de una recta: la distancia de cualquier punto al origen puede expresarse mediante un número, lo que supone aceptar los irracionales. Es una concepción en la línea de Bombelli. Simon Stevin (1548-1620) reconocía los irracionales como números y los aproximó con racionales cada vez con más precisión y John Wallis (1616-1703) en su Algebra (1685) aceptó los irracionales como números en el pleno sentido de la palabra. Sin embargo, ni Stevin ni Wallis aportaron fundamentación lógica alguna.

A pesar de la ausencia de una clara concepción sobre los números reales, durante los siglos XVI, XVII y XVIII los procedimientos de cálculo mejoraron. Como señala Kline (1985) «Eudoxo ofreció una teoría de la proporcionalidad para magnitudes, una teoría vinculada a la geometría, pero en modo alguno una teoría de números irracionales. Sin embargo, la conciencia de aquellos hombres del siglo XVII, aunque no su lógica, estaba tranquila respecto a los irracionales»

12. La Teoría Moderna de los Números Reales.

Hacia 1800 los distintos tipos de números se habían hecho tan familiares que, aunque no tuvieran una base lógica, no había demasiada preocupación acerca de sus propiedades. Sin embargo, a lo largo del siglo XIX se va desarrollando en todos los matemáticos un espíritu de máximo rigor. Esto ocurre en todas las ramas de las matemáticas y responde a la necesidad de dar una sólida fundamentación a los avances que se habían producido en los siglos anteriores. Esta necesidad era especialmente acuciante en el análisis, el «cálculo», cuya potencia y eficacia contrastaba fuertemente con su falta de rigor.

Varios matemáticos se dieron cuenta de que no se podía dar una base sólida al análisis sin antes alcanzar una mejor comprensión del sistema de los números reales. Algunos de ellos ofrecieron una rigurosa definición y demostración de las propiedades de los números irracionales sobre la base de las propiedades de los racionales, no haciendo mención a las magnitudes y desligando los números reales de toda referencia geométrica. De esta manera surgen tres teorías, a las que ahora nos referiremos, utilizando los datos de Dieudonné (1978).

La teoría de Karl Weierstrass (1815-1897) no fue la primera concebida ni la primera publicada, pero sí fue la primera en influir en la vasta reforma del análisis que acabó por darle la forma que tiene hoy. La teoría de Weierstrass puede situarse hacia 1863 y fue publicada por uno de sus alumnos por primera vez en 1872, en base a las notas tomadas en el curso 1865-1866. Una descripción de la teoría de Weiestrass se encuentra en Dieudonné (1978).

La segunda teoría se debe, independientemente, a Charles Méray (1835-1911) y Georg Cantor (1845-1918). Fue Méray el primero en publicar en 1869 una teoría rigurosa de los irracionales. La teoría de Cantor fue publicada en 1872. Ambos usan el llamado método de las sucesiones de Cauchy, que no exponemos aquí y que puede encontrarse en muchos textos de introducción al análisis.

La teoría de Richard Dedekind (1831-1916) se publicó en 1872, en su trabajo titulado "Continuidad y números irracionales" (Dedekind 1963; también puede encontrarse em Newmann 1980), cuyo contenido dice él que es de 1858. Dada la clara influencia que el Libro V de los Elementos tiene en la obra de Dedekind, tal como él mismo reconoce en carta a Rudolf Lipschitz (1832-1903) (ver Cuesta 1981), analizamos con cierto detalle esta teoría.

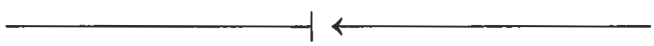
Comencemos con una frase del propio Dedekind, que precisa el problema que se trata de resolver:

La comparación del dominio de los números racionales con una línea recta conduce al reconocimiento de huecos, de un cierto estado incompleto o de discontinuidad del primero, mientras que nosotros consideramos a la línea recta completa, sin huecos, o sea, continua. ¿En qué consiste pues esta continuidad?

Como dice el propio Dedekind, una de las propiedades esenciales del conjunto de los números reales (del conjunto de puntos de la recta) es la continuidad. Geométricamente esto significa que si los números reales se representan en una recta, en la que previamente se ha elegido un origen y una unidad, entonces a cada punto de la recta le corresponde un número real y a cada número real le corresponde un punto de la recta. Es decir, la recta es la imagen geométrica de los números reales. Esta propiedad de continuidad no se recoge en los Elementos de manera explícita, aunque sí se utiliza para asegurar la existencia de un punto de intersección entre dos líneas. Caveing (1984) realiza un estudio sobre la continuidad en los Elementos.

La idea clave de Dedekind es la siguiente: en el conjunto de los números racionales se consideran pares (X,Y) de subconjuntos no vacíos, de modo que todo número racional está en uno de los subconjuntos X o Y, y tales que todo número x de X es menor que todo número y de Y, e Y no tiene mínimo. A estos pares de conjuntos los llama cortaduras. Por lo tanto, una cortadura produce una división de los números racionales en dos subconjuntos no vacíos: el formado por los números de la izquierda (X) y el formado por los números de la derecha (Y). Geométricamente supone «cortar» o «partir» la «recta racional» en dos semirrectas, siendo la de la derecha (Y) una semirrecta «abierta» (Y no tiene mínimo).

Aparecen dos tipos de cortadura, según que el conjunto X tenga o no tenga máximo; es decir, según que la correspondiente semirrecta de la izquierda sea «cerrada» o «abierta». Si X tiene máximo la cortadura «se produce» por un número racional, que es el máximo de X:



X Y

Si X no tiene máximo, entonces en el conjunto de los racionales hay un hueco, que corresponde a un número irracional:

X Y

Dedekind define el conjunto de los números reales como el conjunto de cortaduras (X,Y). Define un orden y las operaciones en el conjunto de los números reales y demuestra que en ese conjunto no hay huecos.

La similitud entre la teoría del Libro V de los Elementos y la de Richard Dedekind es clara. Si A y B son magnitudes homogéneas surge una partición de los racionales en tres subconjuntos

[A/B]- [A/B] [A/B]+

Los conjuntos

X = [A/B]U[A/B]- , Y = [A/B]+

constituyen una cortadura del conjunto de números racionales que define el número real A/B. Si A y B son conmensurables, entonces [A/B] no es vacío y X tiene máximo, que es n/m=A/B; si A y B son inconmensurables, entonces [A/B] es vacío y X no tiene máximo. La fundamentación de los números reales sobre la base de los números racionales puso de manifiesto que tampoco era plenamente satisfactoria la teoría sobre estos números, lo que suponía que tampoco los números naturales tenían un claro y riguroso fundamento. Fue también Dedekind quien en 1888 presentó un sistema de axiomas para los números naturales, expuesto en (Dedekind 1968), que es reproducido tres años más tarde por Giuseppe Peano (1857-1932) en su obra (Peano 1979) y que es conocido como axiomas de Peano.

Los avances producidos en el estudio de los números reales pusieron en claro el papel esencial de su estructura de orden. Estas ideas culminaron en la teoría de cuerpos ordenados (1927) de Emil Artin (1898-1962) y Otto Schreier. Aunque no entremos en excesivos detalles técnicos, digamos al menos que los números reales constituyen, salvo isomorfismos, el único cuerpo ordenado que es completo, lo que significa que es sucesionalmente completo (toda sucesión de Cauchy es convergente) y arquimediano. La diferencia entre los números racionales y los números reales, que geométricamente consiste en que los primeros «dejan huecos» en la recta y los segundos la «llenan», se puede ahora expresar diciendo que los números racionales constituyen un cuerpo ordenado que no es sucesionalmente completo, mientras que los números reales constituyen un cuerpo ordenado que sí es sucesionalmente completo, aunque ambos son arquimedianos.

Bibliografía

S. Bochner (1991): El papel de la matemática en el desarrollo de la ciencia. Alianza, Madrid.

N. Bourbaki (1972): Elementos de historia de las matemáticas. Alianza, Madrid.

C. B. Boyer (1986): Historia de la matemática. Alianza, Madrid.

M. Caveing (1984): "Algunas observaciones sobre el trato que recibe el continuo en los Elementos de Euclides y en la Física de Aritstóteles". En: Pensar la matemática; Tusquets, Barcelona.

N. Cuesta (1981) : La sinfonía del infinito. Ediciones Universidad de Salamanca, Salamanca.

R. Dedekind (1963): Essays on the theory of numbers. Dover, New York.

R. Descartes (1954): The geometry. Dover, New York.

J. Dieudonné (1978) (director): Abregé d'histoire des mathématiques. 1700-1900. 2 Vols. Hermann, París,

J. Dieudonné (1989): En honor del espíritu humano. Las matemáticas hoy. Alianza, Madrid.

J.-L. Gardies (1988): L'héritage épistémologique d'Eudoxe de Cnide. J. Vrin, Paris.

A. Frajese (1977): Attraverso la storia della matematica. Lemonnier, Firenze.

T. L. Heath (1956) (translated with introduction and commentary by): The thirteen books of Euclide's Elements. 3 Vols. Dover, New York.

T. L. Heath (1965): A history of greek mathematics. 2 Vols. Oxford University Press, Oxford.

M. Kline (1985): Matemáticas: la pérdida de la certidumbre. Siglo XXI, Madrid.

J. R. Newman (1980): Sigma. El mundo de las matemáticas. 6 Vols. Grijalbo, Barcelona.

J. Peano (1979): Los principios de la aritmética. Pentalfa, Oviedo.

M. L. Puertas (1991) (traducción y notas de): Euclides.Elementos. Libros I-IV. Gredos, Madrid.

R. Taton (1971) (director): Historia general de las ciencias. 5 Vols. Destino, Barcelona.

H. W. Turnbull (1968): Los grandes matemáticos. Gredsa, Barcelona.

L. Vega (1990): La trama de la demostración. Alianza, Madrid.

F. Vera (1970) (recopilación, estudio preliminar, preámbulos y notas de): ientíficos griegos. Aguilar, Madrid.

NOTA FINAL. Una vez expuesta y redactada esta ponencia, el autor ha conocido el artículo de H. Stein, titulado "Eudoxos and Dedekind: on the ancient greek theory of ratios and its relation to modern mathematics", publicado en las revista Synthese, vol. 84 (1990), págs. 163-211, parte de cuyo contenido está muy relacionado con algunos de los temas de esta ponencia.