Apolonio de Perga. Las Secciones Cónicas

José Manuel González Rodríguez.
Profesor del Dpto. de Análisis Matemático.
Universidad de la Laguna.

1. Introdución. Consideraciones sobre la Matemática Griega. Los Métodos

Sintéticos y las Aportaciones de Apolonio.

Con la muerte de Alejandro Magno (323 a. C.) el Periodo Helénico de la historia de Grecia llegó a su fin y los siglos siguientes, en los cuales la cultura griega mantuvo su predominio en todo el Oriente Próximo (a pesar de que Grecia misma se hizo insignificante), se conocen como periodo Helenístico. El imperio conquistado por Alejandro Magno no pudo mantenerse unido bajo la dirección de un único jefe, y, tras su muerte, se dividió en varios dominios cada uno de ellos regidos por un diádoco o sucesor. Egipto quedó bajo el mandato de Tolomeo, quien inició una dinastía de monarcas que hubieron de colaborar notablemente en un nuevo florecimiento de la Matemática.

Alejandría, capital del nuevo Egipto, supo recoger la antorcha de la cultura griega y en su entorno se desarrollaron un buen número de progesos científicos que ocasionaron una nueva edad de oro de la cultura helénica.

En un siglo de existencia Alejandría conoció varios sucesores al trono de su fundador, todos los cuales se revelaron como hombres de estado competentes y liberales. En particular, estos estadistas supieron rodearse de grandes hombres de ciencia que contribuyeron a alcanzar un nuevo auge de los conocimientos científicos. Estos conocimientos se enseñaban y contrastaban en la Biblioteca y el Museo de una ciudad que, en su apogeo, albergó a casi un millón de habitantes.

En torno a los centros de Alejandría se formaron y trabajaron pensadores como Euclides, Arquímedes, Eratóstenes, Apolonio, y muchos otros matemáticos de las postreras centurias del último milenio antes de Jesucristo. No resulta extraño pues que, con su concurso, resplandeciera de nuevo el pensamiento griego ocasionando un potencial de sabiduría teórica (y también práctica), que con el tiempo redundaría en alentar la admiración hacia la ciencia de los griegos. En particular, en Matemáticas las aportaciones más originales y los métodos más significativos se desarrollaron en esta etapa alejandrina.

Con todo, debemos sopesar con cuidado la aportación real del pensamiento griego al desarrollo de la cultura occidental y calibrar su trascendencia, quizá muchas veces magnificada. De este modo podremos valorar con justeza los trabajos de matemáticos como Apolonio de Perga de quien tratamos en estas líneas.

Aclaremos de antemano que la ciencia griega no se produjo de forma aislada, por "generación espontánea", sino que, por el contrario, se nos muestra heredera de una larga tradición cultural de procedencia oriental. Según Bell, pag. 62:

Mientras no se trace la ruta del este al Oeste, no sabremos concretamente lo que los matemáticos griegos debieron a sus *predecesores. Sin denigrar en modo alguno la contribución griega, podemos creer sin temor a equivocarnos que el milagro máximo de la generación espontánea no se dio en Grecia.*

El autor acude a una explicación antropológica que conjuga dos visiones diferenciadas del florecimiento de las culturas y de las teorías. En la primera se establece que culturas muy similares se desarrollan espontáneamente en ambientes similares por muy separadas que estén. Según la segunda, toda civilización se propaga partiendo de focos de cultura, que a su vez fueron civilizados desde focos remotos. Sea como fuere, los griegos, comerciantes y viajeros incansables, hubieron de aprovechar los conocimientos de las culturas de Oriente, y entremezclándolas construyeron un corpus de conocimientos y técnicas que configuraron su particular aportación al desarrollo de la ciencia universal.

Habremos de destacar los avances de la ciencia griega y sus innovaciones que se refieren a la introducción del pensamiento hipotético-deductivo y el método racional de demostración; al uso de técnicas sintéticas en los razonamientos geométricos, a la investigación científica en las ciencias de la naturaleza, y a muchas otras aportaciones indiscutibles; mas no todo fue éxito y evolución, y, en concreto, la Matemática de los griegos desembocó en una especie de estancamiento, reconocido, con mayor o menor énfasis por todos los especialistas en su historia. Según Heath, pag. 197: *..hablando generalmente, los mejores progresos de geometría en líneas generales fueron prácticamente estorbados por las restricciones del método y la forma en la cual fueron inseparables de la geometría clásica griega... los griegos no pudieron avanzar muy lejos... en ausencia de algún sistema de coordenadas y sin medios más libres de manipulación tales como los que son suministrados por el álgebra moderna.*

De modo más radical, Bell, pag. 91, opina que:

Los modos limitados del pensamiento griego no son los nuestros. Al madurar el álgebra elemental en los siglos XVI y XVII de nuestra era, y al introducir los métodos analíticos en el siglo XVII, la Matemática volviendo al número se acercó más a Babilonia, Egipto y la India de lo que nunca estuvo Grecia después de la caída de Alejandría. Excepto por la insistencia en la demostración, nuestras preferencias en Matemática, como en religión, son más orientales que griegas.

Aunque sea duro de decir, parece cierto que, vista de lejos, la geometría griega era en parte un gran error de táctica. Nada obligaba a Tales, Pitágoras, Euclides y Apolonio y sus discípulos a desarrollar el método sintético exclusivamente. Cuando iniciaban su arduo viaje matemático, sus predecesores orientales indicaron bien claramente a los griegos los dos posibles caminos. Bien fuera por una peregrinación consciente, o por una irónica jugada de la fortuna, todos siguieron el mismo rumbo y se abrieron camino a través de todos los obstáculos, llegando a un callejón sin salida. La geometría sintética de las cónicas señala el fin del viaje.

En ambas citas encontramos indicios de una carencia de innovaciones revolucionarias que imposibilitó a la Matemática griega enfrentar la renovación científica que hemos conocido en los siglos XVII y XVIII. Cabe preguntarse cuál fue el origen de tales limitaciones; y entonces aparecen múltiples factores que delatan esta debilidad de la ciencia helénica. De todos ellos, y por su naturaleza eminentemente matemática, queremos destacar dos.

En primer lugar debemos recordar que los griegos no supieron recoger el legado mesopotámico, y el sistema de numeración babilónico, que ya conocía el cero y el principio de posición, no fue copiado por aquellos. Los griegos se contentaron con el uso de un sistema alfabético, aditivo, en que cada número se simbolizaba con una letra de su alfabeto (curiosamente el más desarrollado de la Antigüedad); que se mostraba totalmente inoperante tanto en el cálculo matemático como en la representación simbólica. Bell, pags. 60-61 ridiculiza el sistema numérico griego en los siguientes crudos términos:

En la logística (el cálculo) los griegos no hicieron nada que no merezca el olvido matemático. Su mejor tentativa para simbolizar los números fue una niñería poco mejor que la yuxtaposición de las letras iniciales de los nombres de los números... El interés que ofrece aquí es insignificante, porque por fortuna para las matemáticas, la numeración griega desapareció rápidamente. Uno de sus muchos defectos era su incapacidad para representar concisamente números incluso moderamente grandes. Arquímedes superó este inconveniente en el siglo III a. C. en su sistema de contar por potencias octavas de diez. Pero, como tampoco concibió el sistema de numeración basado en el lugar ocupado por el signo, su idea ingeniosa pereció también.

El otro factor que debió incidir en la poca operatividad y creatividad de la Matemática griega se fundamenta en la propia estructura social de los griegos. En una sociedad esclavista fácilmente se asentaron prejuicios y despropósitos que, a la larga, se convirtieron en lacras en el desarrollo armonioso de la cultura helénica. En particular, y según Boyer, pag. 169:

En la antigüedad griega se hacía una distinción clara no sólo entre la teoría y sus aplicaciones prácticas, sino también entre el cálculo rutinario y el estudio teórico de las propiedades de los números: al primero de estos dos aspectos, por el que se dice que los sabios griegos mostraron generalmente desprecio, se le dio el nombre de logística, mientras que se sobrentendía que la aritmética, ocupación filosófica honorable hacía referencia sólamente al segundo aspecto. Se ha dicho incluso que esta actitud clásica con respecto al cálculo rutinario venía a reflejar la estructura social de la Antigüedad, en la que los cálculos numéricos quedaban relegados a los esclavos.

Visto lo precedente, podemos afrontar la figura del matemático que nos ocupa Apolonio de Perga y valorar entonces, en su justa medida, sus aportaciones científicas.

Conocido en la Antigüedad como el **Gran Geómetra,** Apolonio estableció un corpus completo de conocimientos geométricos recogidos en más de veinte libros, entre los cuales sobresalen los ocho correspondientes al estudio de las propiedades de las cónicas. Su influencia en la Matemática medieval y del Renacimiento fue notable, equiparable a la reconocida a Euclides o a Arquímedes. Puede considerarse como el iniciador de la Geometría Proyectiva, desarrollada en los siglos XVIII y XIX, y sus descubrimientos en Geometría Métrica nos lo presentan como el maestro supremo del método **sintético.** En palabras de Leibniz: *Todo aquel que entienda a Arquímedes y a Apolonio se verá inclinado a admirar menos a los hombres más eminentes de las épocas posteriores.*

Fue Apolonio, como la mayoría de los matemáticos griegos (con la excepción quizá de Arquímedes) un matemático eminentemente teórico. Así nos lo confirma él mismo en el libro IV de la Cónicas, cuando afirma, refutando a los que se preguntaban por la utilidad de sus resultados, que: *Merecen ser aceptados a causa de sus propias demostraciones, de la misma manera que aceptamos muchas otras cosas en la Matemática por esta misma razón y no por ninguna otra.* Sin embargo de sus demostraciones teóricas se han extraído numerosas aplicaciones científicas tales como la proyección estereográfica utlizada por Hiparco y Tolomeo en cartografía, el estudio de las trayectorias descritas por los proyectiles, realizado por Galileo; o el análisis preciso de los mavimientos de los planetas, iniciado por Kepler. La belleza de sus teoremas y la influencia ejercida en matemáticos posteriores nos servirían de justificación suficiente en el momento de valorar los trabajos de Apolonio; mas, en la línea de lo que analizábamos más arriba, siempre nos queda la duda del aprecio justo de la trascendencia de su obra.

Desde una perspectiva histórica, que quiere ser imparcial, el trabajo de Apolonio en Geometría Métrica nos recuerda los estudios en Geometría Proyectiva. Ambos recogen portentosos artificios de imaginación, pero que se agotan en sí mismos, y con el paso del tiempo se vuelven obsoletos. El método sintético permite demostraciones elegantes y precisas, pero queda oscurecido por la falta de aplicabilidad en otras técnicas y por su inoperatividad intrínseca. Los razonamientos sofisticados de Apolonio se convierten en sencillos ejercicios de cálculo cuando contamos con la ayuda del álgebra que hemos heredado de los árabes.

2. Las Secciones Cónicas en la Actualidad. Métodos Analíticos.

Daremos una breve descripción de las cónicas tal como se estudian en nuestros días y nos detendremos en dos demostraciones realizadas con la ayuda de métodos analíticos, que nos sirvan de contraste con los métodos sintéticos de la geometría métrica griega.

Admitimos que una ecuación general de segundo grado en la forma:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (1)$$

representa una curva en el plano que llamaremos **Cónica.** Mediante apropiados cambios de variables de las coordenadas (x,y) podemos simplificar la ecuación (1) hasta obtener lo que se denomina **ecuación reducida** de dicha cónica. En esencia, y obviando los casos de cónicas imaginarias o degeneradas, analizando estas ecuaciones reducidas aparecen tres tipos de cónicas:

Elipse

Viene determinada por la ecuación reducida:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{2}$$

donde a y b son dos constantes cuyo significado quedará aclarado a continuación.

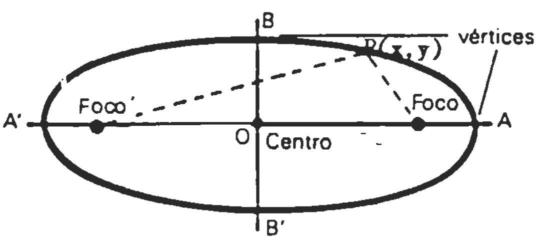

Figura 1

Entendida como lugar geométrico, la elipse es una curva cuyos puntos verifican que la suma de distancias a dos puntos fijos F y F', llamados focos, es constante. Así, según indica la figura 1., un punto P de la elipse cumple que: PF + PF' = 2a (3)

En las figuras 1. y 2. se nos muestran los elementos notables de la elipse. Estos son:

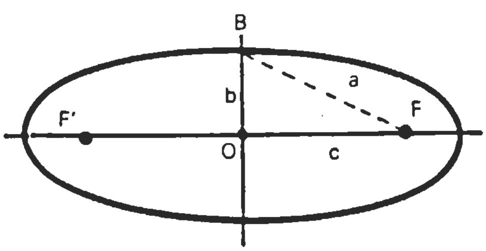

Figura 2.

-**Centro**, que representa el centro de simetría de la figura

-**Diámetros**, que son cuerdas que pasan por el centro

-**Ejes,** son los diámetros mayor, de longitud a y menor, de longitud b

- **Focos** F y F' y **Distancia Focal:** FF' = 2c

-**Excentricidad**: $e=\frac{c}{a}$ es un parámetro que mide el mayor o menor grado de "achatamiento" de la elipse. Cuando e = 0, dicha curva se convierte en una circunferencia.

La ecuación de una elipse que tenga su centro de simetría en un punto distinto del origen de coordenadas, por ejemplo en (α, β) será:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$

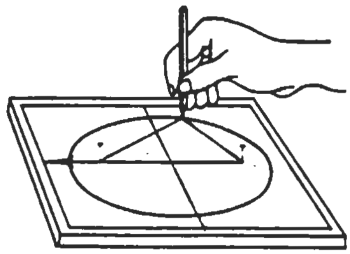

Figura 3

Para trazar una elipse basta fijar los extremos de una cuerda en cada uno de los focos y tensar ésta con un lápiz, con lo que se describirá la deseada curva cuando deslicemos éste a lo largo de la cuerda

La propiedad focal de la elipse establece que cualquier rayo emergente de uno de los focos se refleja pasando por el otro. En esta propiedad se basan las diferentes aplicaciones de los espejos elípticos así como de las bóvedas elípticas.

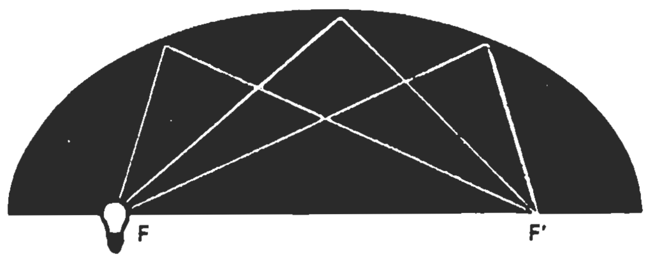

Figura 4.

Parábola

La parábola es una curva cuyos puntos equidistan de una recta, llamada **directriz** y de un punto fijo llamado foco. En la figura 5. se muestran los elementos notables de una parábola:

Llamando p a la distancia que separa el foco F del vértice V encontramos la ecuación analítica de la parábola de vértice el punto V(p,0) y directriz el eje de ordenadas OY como:

$$y^2 = 2px \qquad (4)$$

También representan parábolas las ecuaciones generales de la forma: $x = ay^2 + by$

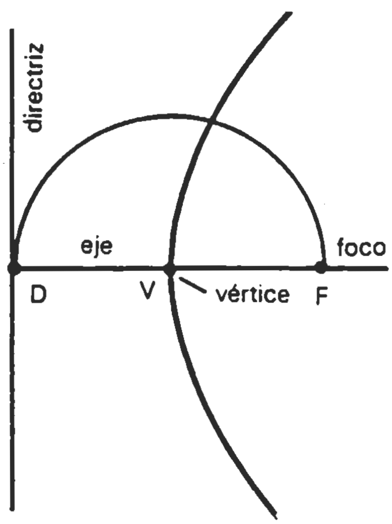

Figura 5.

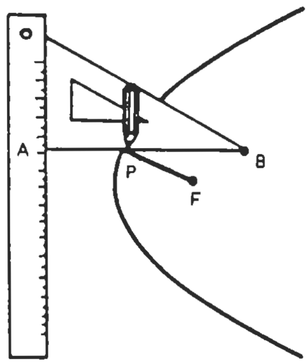

Figura 6.

+ c ó y = ax^2 + bx + c; donde a,b y c son números cualesquiera.

Para construir una parábola, podemos fijar una cuerda entre el foco y el vértice de un cartabón. El lápiz tensa la cuerda a la vez que desplaza al cartabón pegado a la regla guía (directriz). Obtendremos entonces una parábola.

La propiedad focal de la parábola establece que los rayos que emergen de su foco "rebotan" en élla, reflejándose paralelos a su eje. Esta propiedad se aplica en múltiples aparatos y artilugios, como en las antenas parabólicas, los faros de los automóviles, en los espejos parabólicos, etc.

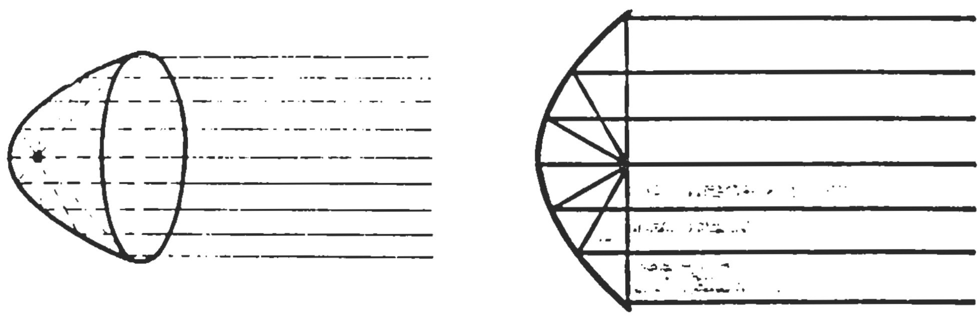

Figura 7.

Podemos demostrar esta propiedad focal de la parábola utilizando métodos analíticos. Consideremos la parábola de ecuación $y^2 = 2px$ representada en la figura 8.:

Derivando en la ecuación $y^2 = 2px$ nos queda:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$$

Mas, teniendo en cuenta que dicha derivada nos da la pendiente (o inclinación) de la recta tangente a la curva en el punto (x,y), esto es el valor de tag, Φ tendremos que:

$$tag\Phi = \frac{p}{y}$$

Por otra parte, de la figura se extrae fácilmente que:

$$tag\gamma = \frac{y}{x - \frac{p}{2}}$$

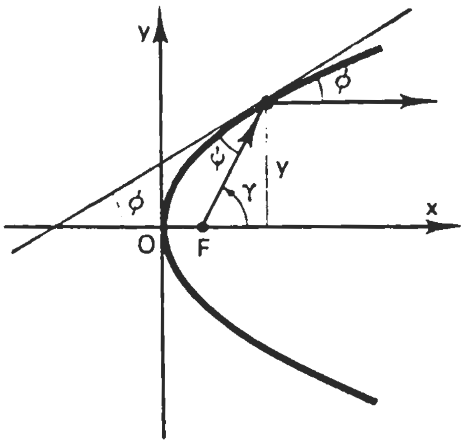

Figura 8.

Pero: $$tag2\Phi = \frac{2tag\Phi}{1 - tag^2\Phi}$$

según la conocida fórmula trigonométrica.

Entonces: $$tag2\Phi = \frac{2\frac{p}{y}}{1 - \frac{p^2}{y^2}} = \frac{2py}{y^2 - p^2} = \frac{2py}{2px - p^2} = \frac{y}{x - \frac{p}{2}}$$

Es decir: $tag2\Phi = tag\gamma$, o bien $2\Phi = \gamma$

Y como $\gamma = \Phi + \phi$, se deduce que $\phi = \Phi$.

Por tanto, y en virtud de la ley de la reflexión (ángulo de incidencia es igual a ángulo de reflexión), un rayo de luz que emerja del foco F y que se refleje en la parábola, partirá con una dirección paralela a su eje de simetría.

Hipérbola

Los puntos de una hipérbola cumplen la condición de que la diferencia de sus distancias a los focos F y F' es el valor constante 2a; esto es:

$$PF - PF' = 2a$$

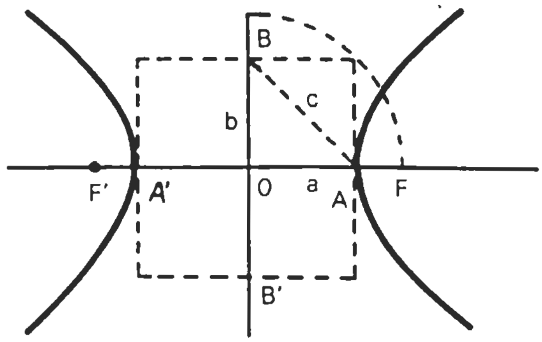

Figura 9.

Los elementos notables en una hipérbola son:

-El segmento AA' cuya longitud se designa por 2a y que se denomina **eje real**

-La **distancia focal** es la distancia entre los focos, y se designa por 2c.

-Los **vértices** B y B', que se obtienen dibujando sobre OA el triángulo rectángulo en O de hipotenusa c, al segmento de longitud 2b se denomina **eje imaginario.**

-Para medir la mayor o menor abertura de las dos ramas de la hipérbola se utiliza la noción de **excentricidad**: $e = \frac{c}{a}$,que es siempre mayor que 1.

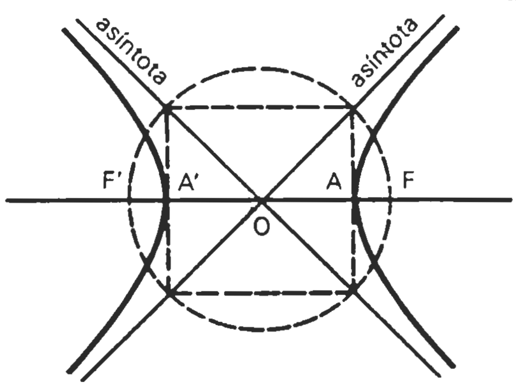

Figura 10.

-Las **asíntotas** son dos rectas que pasan por el centro O y hacia las cuales se aproximan indefinidamente las ramas de la hipérbola, sin llegar nunca a tocarlas. Coinciden con las diagonales del rectángulo de dimensiones 2a y 2b.

Basándonos en la propiedad que determina a la hipérbola como lugar geométrico, su construcción se hace posible mediante una cuerda al fijar uno de sus extremos en un foco y el otro en el extremo de una regla; el lápiz tensando la cuerda hace girar la regla que tiene el otro extremo fijo en el segundo foco, de forma que se logra entonces el trazado de la curva. (Figura 11)

La propiedad focal de una hipérbola establece que un punto luminoso colocado en uno de los focos, al emitir rayos sobre ella éstos se reflejan de forma divergente como si procedieran del otro foco. (Figura 12.)

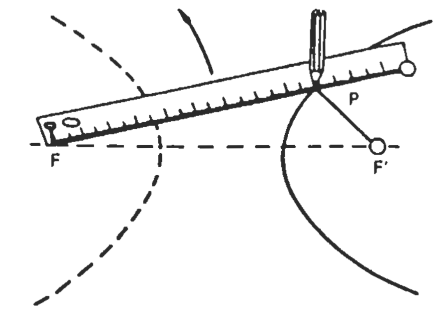

Figura 11.

En coordenadas cartesianas la ecuación de una hipérbola con centro en el origen O(0,0) es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (5)$$

y con centro en otro punto de coordenadas (α,β) será:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

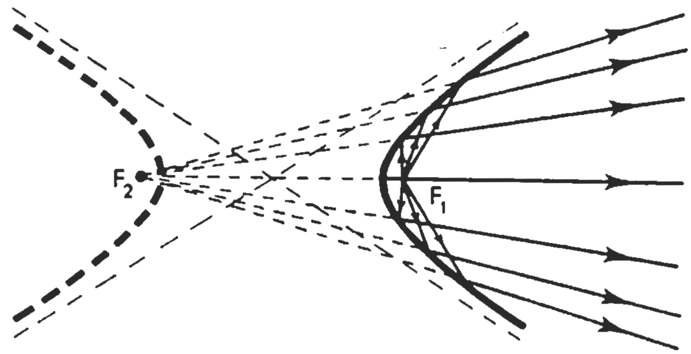

Figura 12.

3. Las Cónicas de Apolonio. Métodos Sintéticos.

Habiendo descrito sucintamente las cónicas tal como las estudiamos en la actualidad, retomemos la historia para analizar los conceptos clásicos sobre estas curvas que nos legó Apolonio.

Se conoce poco de la vida de Apolonio, excepto que nació en Perga, Panfilia, en Asia menor; estudió en Alejandría con discípulos de Euclides durante el reinado de Tolomeo Evergetes (247-222 a. C.) y se estableció en Pérgamo, bajo el reinado de Eudemo, ciudad en la que redactó la mayor parte de su obra.

Se dice que era de 25 a 40 años más joven que Arquímedes, y que fue tesorero de Tolomeo Filadelfo, por lo que se establece su nacimiento alrededor del 262 a. C. y su muerte en torno al 190 a. C..

Gran parte de la obra de Apolonio desapareció, mas, sin embargo, conocemos los títulos de muchas de sus obras (más de veinte) gracias a los comentarios posteriores que realizó Papus y a la presencia de seis de sus trabajos en una recopilación de las Matemáticas alejandrinas, conocida como el *Tesoro del Análisis.* Entre sus obras destacan especialmente los ocho libros dedicados al estudio de las cónicas, conocidos como *Las Cónicas.* Dicho tratado fue considerado como el corpus más completo que recogía los conocimientos sobre tales curvas de toda la Antigüedad. Papus escribió varios lemas sobre él, Sereno realizó un comentario, al igual que Hypatias, y Eutocio preparó una edición de los primeros cuatro libros en el siglo VI d. C. y redactó un comentario sobre éllos.

Con posteridad el rastro de los ocho libros de *Las Cónicas* de Apolonio se perdió, de tal modo que su legado ha llegado hasta nosotros de diversas formas. Sólo los cuatro libros primeros se conservan en griego. El octavo desapareció en su totalidad, pero, gracias a la traducción al árabe de los libros V al VII que realizara Thabit ibn Qurra, se conservaron los siete primeros. Todos ellos fueron traducidos al latín en los siglos XVI y XVII por Johanms Baptista Memus en 1537 y Abraham Echellensis y Giacomo Alfonso Borelli en 1661.

Estos libros contienen 387 teoremas bien demostrados, algunos conocidos por matemáticos anteriores a Apolonio, pero la mayoría de ellos inéditos. En cuanto a la elaboración de *Las Cónicas* sabemos que, residiendo en Alejandría, Apolonio fue visitado por un geómetra llamado Naucrates, y, a petición de este último, escribió un apresurado borrador de *Las Cónicas* en ocho libros. Más tarde, ya en Pérgamo, perfeccionó y pulió el contenido de su primera obra. El propio Apolonio nos describe en la introducción de su primer libro el contenido del resto. Nos dice el autor que:

De los ocho libros los cuatro primeros forman una introducción elemental. El primero contiene los modos de construir las tres secciones y sus ramas opuestas, y las propiedades fundamentales que se dan en éllas; trabajando de manera más general y completa que en los escritos de otros. El segundo libro contiene las propiedades de los diámetros y de los ejes de las secciones así como las de las asíntotas, con otras cosas que se usan para determinar "límites de posibilidad (διοπισμοι)"; y lo que yo entiendo por diámetro y ejes respectivamente lo aprenderán en este libro. El libro tercero contiene muchos teoremas destacados, útiles para la síntesis de los ***lugares sólidos*** *y para los "diorismos"; la mayor parte de estos teoremas son nuevos, y fue su descubrimiento lo que me indicó que Euclides no trabajó en la síntesis del lugar comprendido entre tres y cuatro líneas, sino sólo en una porción de ello, y no con éxito, pues no es posible que dicha síntesis pudiese ser completada sin la ayuda de teoremas adicionales descubiertos por mí. El cuarto libro muestra de cuántas maneras las secciones de conos pueden interceptar a otra y a la circunferencia de un círculo; contiene otras cosas, ninguna de las cuales han sido discutidas por anteriores escritores...*

El resto de los libros deben de entenderse destinados a especialistas: uno de éllos trata enteramente de mínimos y máximos; otro de secciones similares e iguales de conos; otro de teoremas de la naturaleza de determinación de límites y el último de determinados problemas cónicos...

En pocas palabras éstos son los contenidos de los ocho libros de *Las Cónicas* que pasamos a detallar con mayor cuidado.

Comencemos repasando los conocimientos anteriores a Apolonio sobre las secciones cónicas. Según recoge Gémino, los antiguos definían el cono como la superficie descrita por la revolución de un triángulo rectángulo alrededor de uno de los lados que contiene el ángulo recto. Entre los conos distinguían tres clases, en relación a que el ángulo vertical fuera menor, igual o más grande que un recto; cada uno de estos eran denominado cono agudo, cono rectángulo o cono obtuso, respectivamente. Entonces, cortando estos tres tipos de conos por un plano perpendicular a una de sus líneas generatrices aparecían las tres secciones cónicas conocidas por los nombres de **oxitoma** (sección de un cono agudo), **ortotoma** (de un cono rectángulo) o **amblitoma** (de un cono obtuso).

Parece ser que fue Meneacmo quien descubrió estas secciones cónicas con motivo de su resolucion del problema de duplicación del cubo (año 360 ó 350 a. C.). Aristeo publica más tarde un tratado sobre los **lugares sólidos**, que en esencia se ocupaba de las secciones cónicas. El término Lugar Sólido con el que se identificaba a las cónicas tiene que ver con la forma en que los griegos clasificaban las curvas planas. Según recogemos de Boyer, pag. 197:

*Los geómetras griegos clasificaban las curvas en tres categorías: la primera, conocida con el nombre de **lugares planos,** contenía a todas las líneas rectas y circunferencias; la segunda, conocida como la de los **lugares sólidos**, estaba constituida por todas las secciones cónicas; y la tercera categoría, conocida como la de los **lugares lineales**, agrupaba a todas las curvas restantes. El nombre dado a la segunda clase venía sugerido sin duda por el hecho de que las cónicas no se definían como lugares geométricos de puntos del plano que satisfacen una condición determinada,... sino que se describían de una manera estereométrica como secciones de una figura tridimensional por un plano.*

Euclides también se ocupó de las cónicas en cuatro libros que recogen la mayor parte del material estudiado por Apolonio en sus primeros tres libros. Arquímedes en su *Phaenomena* se interesa en las cónicas e introduce alguna terminología nueva como son el nombre de parábola o el de diámetro.

Comenzando entonces con la descripción del contenido de *Las Cónicas* de Apolonio; en su primer libro encontramos en primer término la definición del cono circular recto tal como la conocemos en la actualidad. Esto es:

Si una línea recta de longitud indefinida y que pasa siempre por un punto fijo se hace mover sobre la circunferencia de un círculo que no está en el mismo plano que el punto dado, de tal manera que pase sucesivamente por todos los puntos de dicha circunferencia, entonces la recta móvil describirá la superficie de un cono doble.

A continuación procede a enumerar una serie de definiciones que recogen conceptos tales como: diámetro, vértice, diámetros conjugados y ejes. Apolonio, posiblemente siguiendo una sugerencia de Arquímedes, fue el primer matemático que introduce los nombres de elipse, parábola e hipérbola en conexión con las secciones de un cono cortado por un plano. Boyer explica con detalle la génesis de estos términos (Boyer, pag. 195):

Las palabras elipse, parábola e hipérbola no eran nuevas en absoluto y acuñadas para la ocasión, sino que fueron adaptadas a partir de un uso anterior, debido quizá a los pitagóricos en la solución de ecuaciones cuadráticas por el método de aplicación de áreas. ***Ellipsis****, que significa una deficiencia, se utilizaba cuando un rectángulo dado debía de aplicarse a un segmento dado y resultaba escaso en un cuadrado. Mientras que la palabra* ***Hyperbola*** *(de avanzar más allá) se adoptó para el caso en que el área excedía del segmento dado, y por último la palabra* ***Parábola*** *(de colocar al lado o comparar) indicaba que no había ni deficiencia ni exceso*

La explicación del uso que realiza Apolonio de estos nombres la podemos detallar en términos modernos como sigue.

Teniendo en cuenta la ecuación de una parábola de vértice el origen y eje el de abcisas: $y^2 = 2px$, dicha curva presenta la propiedad de que para todo punto P(x,y) tomado sobre élla, el cuadrado construido sobre su ordenada y^2 es exactamente igual al rectángulo construido sobre la abcisa y de altura el parámetro 2p = l, llamado **latus rectum.** En lo que se refiere a la ecuación de la elipse (y de la hipérbola) de centro en uno de sus vértices, tendremos:

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \left(ó \ \frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$$

es decir:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - (x-a)^2\right) \quad \left(ó \ y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left((x+a)^2 - a^2\right)\right)$$

o también:

$$y^2 = 1x + \frac{b^2}{a^2}x^2 \quad \left(ó \ y^2 = 1x - \frac{b^2}{a^2}x^2\right)$$

siendo $1 = \frac{2b^2}{a^2}$

Es decir, en un caso y^2 es menor que lx (elipse) y en el otro mayor (hipérbola). De esta forma quedan justificados los nombres asignados a dichas secciones cónicas.

Apolonio obtiene las cónicas al igual que sus predecesores intersectando un cono dado con planos apropiados. Mas fue el primero en observar que variando la inclinación de estos planos, de un único cono (de cualquiera de los tres tipos descritos antes) aparecen las tres cónicas básicas. Al propio tiempo intentó (y consiguió) prescindir del cono lo más rápidamente posible. Es decir, intuyó que cada una de estas curvas admite una caracterización particular que las identifica como lugar plano totalmente. En lenguaje actual, Apolonio pensaba las cónicas como el lugar geométrico determinado por una colección de puntos. Entonces, a partir del cono dedujo una propiedad plana fundamental o **síntoma** de la sección, que viene a dar una condición necesaria y suficiente para que un punto esté situado sobre la curva, y desde ese momento abandonó ya el cono y procedió a estudiar dicha curva por métodos planimétricos exclusivamente. Intentemos explicar lo anterior para el caso de una elipse.

Sabemos que una elipse aparece cuando cortamos un cono por una sección plana que interseque a todas sus generatrices. Sea entonces ABC una sección triangular de un cono circular oblicuo y sea P un punto cualquiera de una sección plana HPK que corta a todas las generatrices del cono;

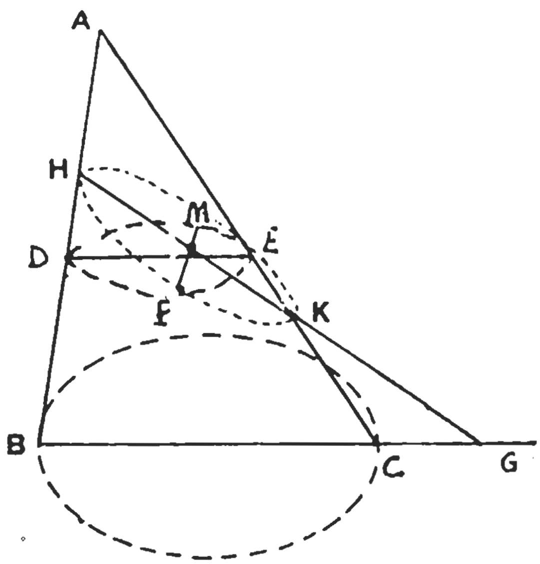

Figura 13

prolonguemos HK hasta que corte a la recta BC en G, y tracemos por P un plano paralelo a la base, que cortará al cono en la circunferencia DPE y al plano HPK según la recta PM. Sea DME el diámetro de esta circunferencia perpendicular a PM; entonces, por semejanza de los triángulos HDM y HBG tenemos:

$$\frac{DM}{HM} = \frac{BG}{HG}$$

y de la semejanza de los triángulos MEK y KCG, obtendremos:

$$\frac{ME}{MK} = \frac{CG}{KG}$$

En la circunferencia DPE, podemos destacar la conocida propiedad según la cual:

$$PM^2 = DM.ME$$

por lo tanto:

$$PM^2 = \frac{HM \cdot BG}{HG} \cdot \frac{MK \cdot CG}{KG}$$

Entonces, si llamamos PM = y y HK = 2a, la propiedad que expresa la igualdad anterior se traduce en la ecuación:

$$y^2 = kx(2a - x)$$

que representa una elipse de vértice H y eje mayor HK.

Una aportación relevante que Apolonio introduce en su primer libro se refiere a la teoría de los diámetros conjugados, pues el autor los utiliza a modo de sistema no ortogonal de coordenadas. En palabras de A. Malet, p. 58:

Los diámetros de las secciones cónicas,que Apolonio define como las rectas que dividen en partes iguales a familias de cuerdas paralelas, y las cuerdas por el punto medio de las cuales pasa un diámetro, que Apolonio llama "rectas trazadas de forma ordenada al diámetro", se imponen casi por la fuerza como ejes de referencia para la sección cónica estudiada. Apolonio utiliza a fondo estos recursos, estableciendo muchos resultados en función de la "distancia de un punto al diámetro según una cuerda ordenada" y de la "distancia al vértice de la sección cónica del punto de corte de la cuerda ordenada con el diámetro", o sea de lo que hoy llamaríamos, respectivamente, ordenada y abscisa referidas a unos ejes centrados en el vértice.

En el libro II se continúa el estudio de los diámetros conjugados y de las tangentes; y, en particular, Apolonio se ocupa en él del trazado de tangentes a las cónicas utilizando propiedades de carácter estático, propias de los métodos sintéticos (en contraposición de los métodos dinámicos usados por Arquímides en el trazado de tangentes a la espiral (Boyer , pags. 57-59). Basándose en las aplicaciones de la división armónica de un segmento Apolonio traza una tangente a una elipse en el punto Q en la forma que describimos:

Apolonio dibuja la perpendicular QN al eje AA‘, y halla el conjugado armónico T de N con respecto a A y A‘, es decir, el punto T de la recta AA‘que verifica que:

$\frac{AT}{A'T} = \frac{AN}{NA'}$, o bien, el punto T que divide externamente al segmento AA‘ en la misma razón en que N divide internamente a AA‘. Entonces se demuestra que la recta que pasa por T y Q será tangente a la elipse.

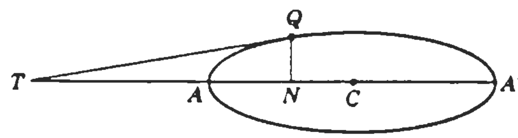

Figura 14

La demostración la podemos encontrar fácilmente con la ayuda de los métodos analíticos del Cálculo Infinitesimal como sigue:

La ecuación de la recta tangente a la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto Q (α, ß) será:

$$y - \beta = y'(\alpha, \beta).(x - \alpha)$$

y, siendo la derivada: $y'(\alpha, \beta) = -\frac{b^2}{a^2}\frac{\alpha}{\beta}$

sustituyendo en la ecuación, encontraremos: $y - \beta = \frac{b^2\alpha}{a^2\beta}(x - \alpha)$

Por otra parte, las coordenadas de los puntos señalados en la figura son: A‘(a,0), A(-a,0), N (α ,0) y T(d,0), donde:

d se obtiene igualando y a 0 en la ecuación hallada de la recta tangente, esto es: $d = \frac{a^2\beta^2}{b^2\alpha} + \alpha = a^2 \cdot (\frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\alpha^2}{a^2})\frac{1}{\alpha} = \frac{a^2}{\alpha}$

Entonces, tendremos:

$$\frac{NA'}{NA} = \frac{a - \alpha}{a + \alpha}$$

$$\text{y:} \quad \frac{TA}{TA'} = \frac{a^2/\alpha - a}{a^2/\alpha + a} = \frac{a^2 - a\alpha}{a^2 + a\alpha}$$

con lo cual comprobamos la verdad del aserto de Apolonio

En el libro II se establecen una serie de proposiciones acerca de la igualdad de ciertas áreas evaluadas en las cónicas. En particular se recoge el conocido teorema de Apolonio utilizado en Geometría Proyectiva (Marcos de Lanuza, pag. 241).

El libro IV trata sobre la intersección de cónicas y no tiene especial relevancia. No ocurre lo mismo con el libro V que en opinión de Heath (pag. 159) *es un auténtico tour de force geométrico.* En él Apolonio estudia las normales a las cónicas y las considera como máximos y mínimos de segmentos rectilíneos trazados desde puntos de la curva. Obtiene igualmente, con la ayuda de métodos geométricos, las ecuaciones de las evolutas a dichas curvas; y, en último término, describe métodos precisos para trazar normales a las cónicas desde un punto dado.

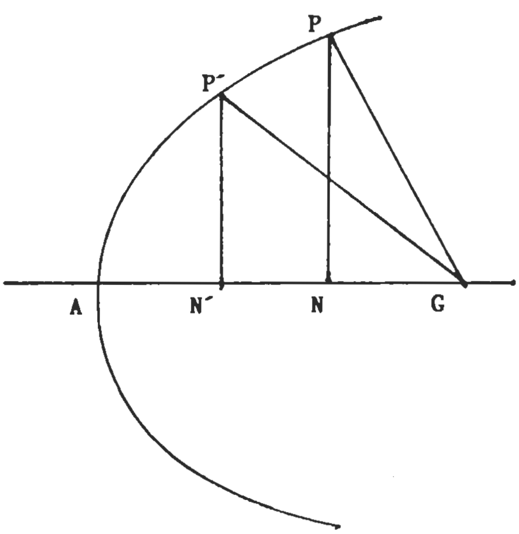

Figura 15

En el caso de la parábola el estudio de la normal se sigue de la forma que detallamos a continuación:

Si A es el vértice de la parábola $y^2 = px$ y si G es un punto situado sobre su eje tal que AG > p, y si N es un punto entre A y G tal que NG = p y si NP es la perpendicular al eje por N, que corta a la parábola en P, entonces el segmento PG es el mínimo que va desde G a un punto de la curva, y por lo tanto es normal a la parábola.

La demostración que hace Apolonio es una demostración siguiendo el método indirecto: lo que se demuestra es que si P' es otro punto cualquiera de la curva, entonces P'G aumenta según P' se mueve sobre élla, alejándose de P en cualquier dirección que lo haga. Demostremos el teorema de Apolonio:

Sean N'y P'dos puntos trazados a la manera de N y P, pero a una distancia de A más pequeña. Se trata de determinar la distancia P'G, entonces, se tiene:

$$P'N'^2 = 2\,AN'.\,p =$$

$$= 2\,AN'.\,NG \text{ y:}$$

$$N'G^2 = (NN' + NG)^2 = NN'^2 + NG^2 + 2\,NG.\,NN'$$

Entonces:

$$P'G^2 = P'N'^2 + N'G^2 =$$

$$= 2\,AN'.\,NG + N'N^2 + NG^2 + 2\,NG\,.\,NN' =$$

$$= 2\,AN\,.\,NG + N'N^2 + NG^2 =$$

$$= PN^2 + N'N^2 + NG^2 =$$

$$= PG^2 + N'N^2$$

Es decir, se ha demostrado que la distancia P'G siempre es mayor que la que elegimos en primer lugar PG.

Para trazar la normal a una parábola Apolonio se vale de una hipérbola auxiliar en el modo que sigue:

Sea Q un punto exterior a la parábola de ecuación $y^2 = 2px$ que no esté situado sobre su eje, para trazar la normal a dicha curva que pase por Q se dibuja la perpendicular QM al eje AK, se toma en sentido opuesto a la parábola MH = p y se levanta la perpendicular HR a HA, a continuación se traza la hipérbola

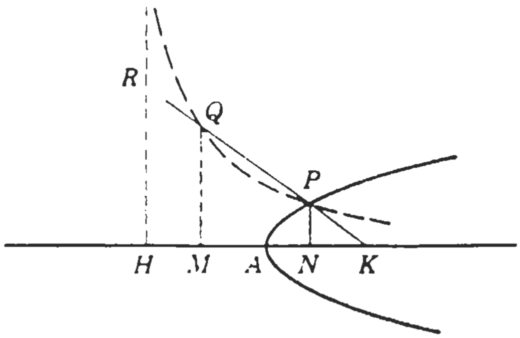

Figura 16

equilátera que pasa por Q y que tiene por asíntotas HA y HR, la cual cortará a la parábola en un punto P. Entonces la recta QP es la normal buscada, ya que NK = HM = p.

Los restantes libros de *Las Cónicas* tienen menos interés y descuidamos la descripción de sus resultados. Con todo, lo visto hasta ahora nos muestra con claridad la perspicacia de las investigaciones de Apolonio y la elegancia de sus demostraciones que sólo pueden quedar deslucidas por la poca operatividad de sus métodos, manifiesta cuando se los contrapone con los razonamientos analitícos actuales.

4. Otros Trabajos de Apolonio.

Aunque Apolonio es reconocido por sus ocho libros que componen Las Cónicas, produjo más de una veintena de obras, la mayoría perdidas como ya anotábamos. De los comentarios a estas obras que recopiló Papus extraemos información sobre éllas que nos permiten analizar al menos las más significaticas.

Se conservan dos libros conocidos por *Secciones en una razón dada* que tratan de los diversos casos de un problema general: dadas dos rectas y un punto sobre cada una de ellas, trazar por un tercer punto dado una recta que corta a las anteriores en segmentos (medidos sobre ellas desde los respectivos puntos dados) que estén en una razón dada.

En el tratado sobre *Las Tangencias* se plantea el conocido **Problema de Apolonio,** que en su formulación original establece que:

Dados tres cosas, cada una de las cuales puede ser bien un punto, una línea recta o un círculo, dibujar un círculo que pase a través de cada uno de los puntos dados o que toque las líneas rectas o círculos

Los dos casos más fáciles habían aparecido ya en los *Elementos* de Euclides en conexión con las circunferencias circunscrita e inscrita a un triángulo; otros seis casos relativos se estudian en el libro I de *Las Tangencias*, y los casos relativos a dos rectas y una circunferencia así como a tres circunferencias ocupaban todo el libro II. El último problema interesó posteriormente a muchos geómetras distinguidos. Así, Vieta se lo propuso a Adriano Romano, quien lo resolvió con la ayuda de una hipérbola. No satisfecho con su demostración, Vieta retoma el problema y en su obra Apollonius Gallus, (1600) lo resuelve mediante métodos planos. Una solución de la misma clase la obtuvo Newton en la *Arithmetica Universalis.*

Del resto de sus trabajos debemos destacar sus obras dedicadas a la Astronomía, pues Apolonio también se distinguió como astrónomo. Aunque se conoce que Heráclides de Ponto fue el primero en exponer la teoría de los epiciclos en la descripción de los movimientos aparentes de los planetas, se debe a Apolonio la popularización de esta teoría. En lugar de las esferas concéntricas que había utilizado Eudoxio, Apolonio propuso dos sistemas alternativos para explicar dicho movimiento. Uno de ellos a base de movimientos epicíclicos y el otro a partir de movimientos excéntricos. En el primer esquema se supone que un planeta P se mueve uniformemente describiendo una circunferencia menor o epiciclo, cuyo centro C gira a su vez uniformemente siguiendo la circunferencia de un círculo mayor, con centro en la Tierra. En el esquema excéntrico el planeta

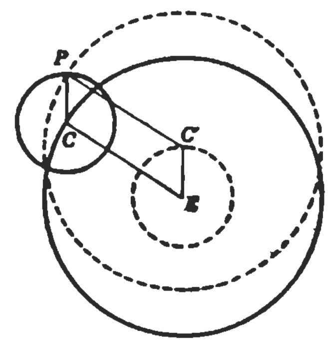

Figura 17

P se mueve uniformemente siguiendo la circunferencia de un círculo mayor cuyo centro C' se mueve a su vez de igual forma a lo largo de la circunferencia de un círculo menor con centro en E.

Cuando los diámetros de los dos círculos menores coinciden los dos esquemas geométricos resultan equivalentes, cosa que evidentemente conocía Apolonio.

Visto lo anterior, sólo nos quedaría anotar que Apolonio fue un representante genuino de la Matemática griega: preciso y riguroso, mas poco innovador y, quizá, cultivador de unos métodos que, con el paso del tiempo, se han convertido en simples ingenios de la razón.

Bibliografía.

Aleksandrov, A. D. y otros (1980) *La Matemática: su contenido, métodos y significado*, Alianza Universidad, Madrid.

Bell, E. T. (1985) *Historia de las Matemáticas*, Fondo de Cultura Económica, México Distrito Federal.

Bochner, S. (1991) *El papel de la matemática en el desarrollo de la ciencia*, Alianza Universidad, Madrid

Boyer, C. B. (1986) *Historia de la Matemática*, Alianza Universidad Textos, Madrid.

Boyer , C. B. (1959) *The history of the Calculus and its conceptual development*, Dover Publications, New York.

Farrington, B. (1986) *Ciencia y Filosofía en la Antigüedad*, Ed. Ariel, Barcelona.

Heath, Th. (1981) *A History of Greek Mathematics*, Dover Publications, New York.

Maracchia, S. (1972) *Apollonio nello sviluppo della Matematica*, Firenze.

Malet, A. (1989) *Apolonio de Pérgamo*. El Algebra en el período renacentista. La recuperación de los clásico griegos, PPU, Barcelona

Marcos de Lanuza, F. (1963) *Geometría Analítica,* Editorial Gredos, Madrid.

Neugebauer, O. (1969) *The Exact Sciences in Antiquity,* Dover Publications, New York.