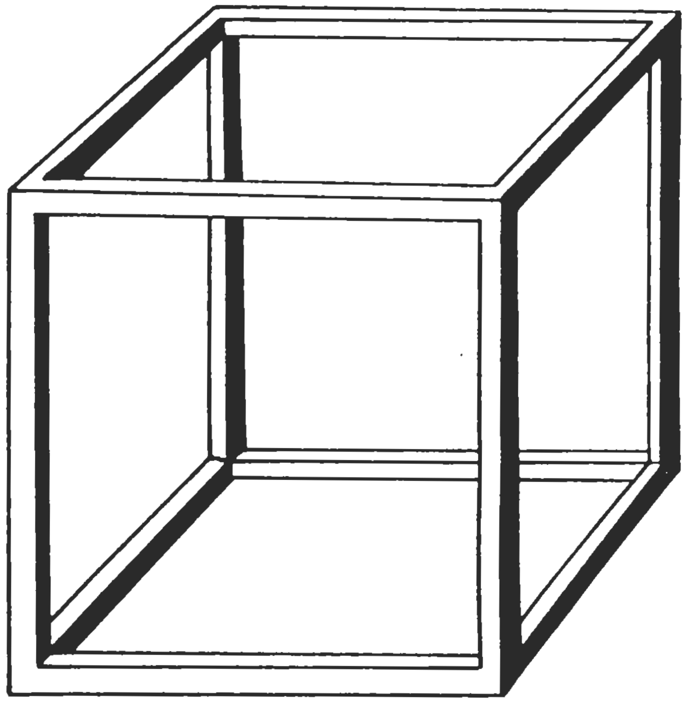
La Duplicación del Cubo

Los "Problemas Especiales".



José Barrios García.
Profesor del Dpto. de Análisis Matemático.
Universidad de la Laguna.

Ramón Prieto Rodríguez.
Profesor de Matemáticas.
I.B. Tacoronte.

Introducción

La duplicación del cubo, la cuadratura del círculo y la trisección del ángulo, constituyen los denominados problemas especiales de la matemática griega. Su resolución ocupó los esfuerzos de los matemáticos más importantes de la antigüedad, empleándose en ellos las técnicas geométricas más avanzadas de cada período. El éxito coronó con creces este esfuerzo, pues se obtuvieron más de veinte soluciones diferentes. El estudio de estas soluciones supone, por la cantidad y calidad de las fuentes respecto de otros aspectos de la matemática griega, un material privilegiado para conocer el desarrollo de las técnicas geométricas durante el periodo considerado[1]. El enunciado clásico de los tres problemas sería el siguiente:

---

[1] Para un estudio en profundidad del papel que jugaronlos problemas en el desarrollo de la geometría griega, ver (Knorr, 1986), quien dedica más de 400 páginas al tema, con muchísima información y notables puntos de vista.

Duplicación del cubo: dado un cubo cualquiera, construir un cubo de volumen doble que el anterior.

Cuadratura del círculo: dado un círculo cualquiera,construir un cuadrado que tenga su misma área.

Trisección del ángulo: dado un ángulo cualquiera, construir un ángulo que sea la tercera parte de aquel.

Aunque normalmente se entiende que estas construcciones debían hacerse sólo con regla y compás, Knorr (1986: 345- 346) sostiene que esta restricción no tiene una base documental real; prueba de ello serían las soluciones que estudiamos en este trabajo.

En cualquier caso, lo cierto es que la tradición matemática posterior ha entendido que estos problemas debían resolverse con regla y compás, por lo cual siguieron ocu pando la atención de los matemáticos hasta su completa resolución, en sentido negativo, a finales del siglo XIX: ninguno de los tres problemas es resoluble con dichas restric ciones[2].

Historia del Problema

El origen de estos problemas es diverso. Mientras que la cuadratura del círculo es un problema que aparece en va rias culturas -probablemente de forma independiente-, y había sido tratado ya, circa. 1500 aC, por los matemáticos egipcios en el Papiro Rhind (Gillings, 1982: 139-146), los otros dos parecen tener un origen propiamente heleno.

[2] Indicaciones detalladas de dicha imposibilidad pueden verse en (Courant-Robbins, 1981: 127-140) y (Dörrie, 1965: 128-137 y 170-177).

Las versiones recogidas por Eratóstenes de Cyrene (s. III aC), sobre los orígenes de nuestro problema -y en las que se basan los comentaristas posteriores- van desde el supuesto error cometido por el rey Minos al querer duplicar la tumba de su hijo Glauco, duplicando cada uno de sus lados -con lo cual se octuplica el volumen (figura 1)-, hasta la conocida anécdota (probablemente falsa) de los sacerdotes de Delos pidiendo a Platón que les ayudase a resolver el problema de la duplicación del altar, planteado por el oráculo. La cuestión habría interesado a los matemáticos de la época, siendo Hipócrates de Quíos (s. V aC) el primero en obtener algún resultado.

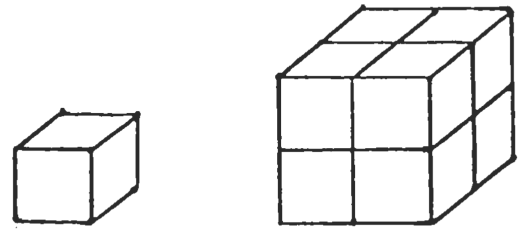


Fig. 1

A estas explicaciones de tipo externalista generalmente admitidas por los comentaristas, Knorr (1986: 17-24) contrapone un punto de vista alternativo (internalista), según el cual, el origen del problema estaría en las propias investigaciones -bien documentadas- de Hipócrates de Quíos sobre la media proporcional entre dos segmentos[3] (figura 2).

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \Rightarrow ab = x^2$$

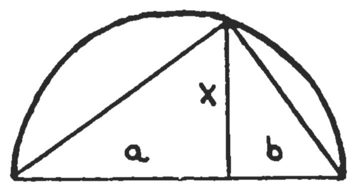


Fig. 2

Dar el paso hacia el estudio de las dos medias proporcionales habría conducido a Hipócrates a su descubrimiento de la equivalencia entre este problema y el de la duplicación del cubo.

Por nuestra parte, cabe destacar que, siendo el problema de la duplicación del cubo un caso particular del de la duplicación de un volumen cualquiera, su resolución presenta aplicaciones a la "duplicación" de catapultas, tal y como lo atestigua el propio

[3] Se dice que x es media proporcional en proporción continua entre dos segmentos rectos, a y b, si, a/x = x/b. En el caso b=2a, x resuelve la duplicación del cuadrado.

Eratóstenes. En este sentido, las soluciones conservadas pueden considerarse textos de alta tecnología militar.

La más completa relación de estas soluciones está contenida en los comentarios de Eutocio de Askalon (s. VI dC) a la obra de Arquímides "Sobre la Esfera y el Cilindro". En ellos Eutocio describe, con cierto detalle, las doce respuestas clásicas al problema.

Hipócrates de Quios (470-400)

E ratóstenes lo señala como el primer matemático en obtener resultados, si bien parciales, sobre la duplicación del cubo; atribuyéndole el descubrimiento de la equivalencia entre nuestro problema, y el de hallar dos medias en proporción continua entre dos segmentos rectos dados.

En efecto, dados dos segmentos rectos cualesquiera, a y b, se dice que dos segmentos, x e y, están en proporción continua entre a y b, si:

$a/x = x/y = y/b.$

De esta proporción es fácil deducir:

$$\left(\frac{a}{x}\right)^3 = \frac{a}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{b} = \frac{a}{b}$$

luego: $$\frac{a^3}{x^3} = \frac{a}{b} \Rightarrow x^3 = \left(\frac{b}{a}\right) \cdot a^3$$

Con lo cual, construyendo "x" podremos aumentar el volumen del cubo en la proporción k = b/a deseada, conservando su figura. En particular, cuando b=2a se obtiene la duplicación buscada[4].

[4] De ser así, Hipócrates habría empleado el llamado método de reducción (basado en la

Digamos ya que todas las soluciones que se conservan abordan el problema a través del enfoque de Hipócrates.

Arquitas de Tarento (430-365)

A rquitas de Tarento, militar y estadista, se ocupó de la mecánica teórica y práctica (autómatas), de la aritmética (progresiones y proporciones) y de la geometría. Es el autor de la primera solución conocida de la duplicación del cubo. Su método se basa en la construcción de tres superficies espaciales: un cilindro, un cono y un toro, cuya triple intersección proporciona el segmento buscado.

Esta sorprendente solución tridimensional se basa en una sencilla división del triángulo rectángulo en tres triángulos rectángulos semejantes cuyos lados se encuentran en la proporción buscada.

En efecto, sea APC un triángulo rectángulo en P. Sea M el pie de la perpendicular a AC que pasa por P (altura). Sea B el punto de AP donde la recta que pasa por M y es paralela a PC, corta a AP (figura 3). En estas condiciones, los triángulos APC, APM y ABM son semejantes, y se verifica:

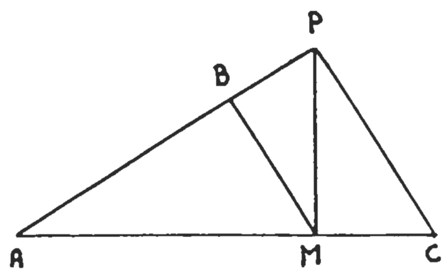


Fig. 3

AC/AP = AP/AM = AM/AB.

El problema se reduce, pues, a: dados dos segmentos cualesquiera, a y b, construir un triángulo rectángulo en las condiciones anteriores, tal que AC=a y AB=b.

Para construir este triángulo Arquitas considera una circunferencia ABC de diámetro a=AC, y cuerda b=AB. Sobre

reducción de un problema dado a otro equivalente que quizás sí sepamos resolver), un precursor del potente método del análisis-síntesis, que tan buenos resultados habría de proporcionar a la geometría de los siglos siguientes (Knorr. 1986: 23-24).

esta circunferencia construye las tres superficies de la siguiente manera:

El cilindro (recto) tiene por base dicha circunferencia.
El cono se construye haciendo girar la cuerda AB -prolongada- sobre el diámetro AC.

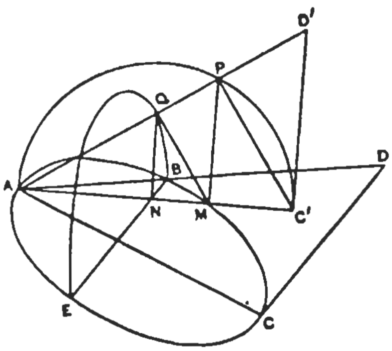


Fig. 4

Consideremos ahora una circunferencia perpendicular a la anterior y compartiendo con ella el diámetro AC, común a las dos. El toro -de diámetro interior nulo- se construye haciendo girar esta circunferencia sobre su recta tangente en el punto A.

Restringiéndonos al cuadrante adecuado, la solución deArquitas viene dada de la siguiente forma: la intersección del toro con el cilindro genera una cierta curva que corta al cono en un único punto P, que define la solución al problema[5] (figura 4).

Eudoxo de Cnido (400-347)

A Eudoxo de Cnido, ese gran matemático y astrónomo de la Academia de Platón, se le atribuye una segunda solución a este problema de la que sólo se conservan unas pocas indicaciones ambiguas, lo que viene provocando serias discrepancias entre los historiadores sobre su identidad.

Las indicaciones del propio Eudoxo y de Erastóstenes (recogidas por Eutocio), sólo refieren que fue hecha por medio de líneas curvas o de formas curvas. Pero en la versión que manejó Eutocio, no sólo no se utilizan esas líneas, sino que se confunde una proporción discreta con una proporción continua, cometiendo

[5] Para una posible reconstrucción del análisis de Arquitas, ver (Knorr, 1986: 51-52).

un error que invalida toda la demostración: es por ello que no proporciona más detalles en su relación de soluciones.

Dado que un matemático tan competente como Eudoxo no habría cometido semejante error, debemos pensar que Eutocio manejaba una versión alterada y defectuosa de la verdadera solución de Eudoxo. Pero ¿Qué solución era ésta?: los historiadores han señalado, al menos, cuatro posibles reconstrucciones distintas (Knorr, 1986: 52-61):

A) la primera parte del mismo análisis del triángulo rectángulo que llevaba a la construcción de Arquitas:

En efecto, todos los triángulos rectángulos de hipotenusa a=AC, se encuentran sobre la semicircunferencia de diámetro AC. Si consideramos en orden la secuencia de todos estos triángulos, trasladando su vértice superior P sobre la semicircunferencia desde C hasta A, los correspondientes puntos B de todos estos triángulos generarán una curva. El triángulo solución se obtiene cuando esta curva intersecta a la circunferencia de centro A y radio b (figura 5).

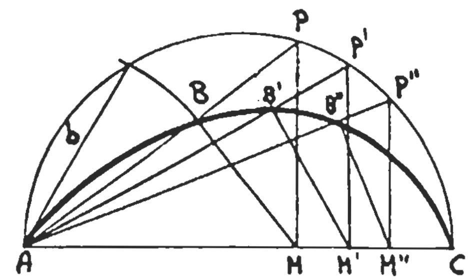


Fig. 5

B) En 1884, Tannery proporcionó otra reconstrucción, basada en la proyección de la curva de intersección del toro con el cono, sobre el plano horizontal de la construcción de Arquitas.

C) En 1979, R. C. Ridell propuso una tercera reconstrucción, basada en el modelo geométrico-astronómico de Eudoxo.

D) Por último, Knorr (1986: 57-61), después de analizar las tres propuestas anteriores, se inclina por considerar una cuarta posibilidad: que Eudoxo haya sido el verdadero descubridor de la configuración de triángulos rectángulos semejantes que da lugar a la solución falsamente atribuida a Platón, y hubiese creado una curva plana (ofiuride) que la resolviese. La veremos pues, en el siguiente apartado.

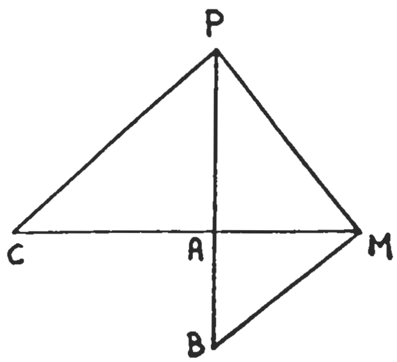


Fig. 6

Pseudo-Platón

La solución falsamente atribuida a Platón se basa en el descubrimiento de la siguiente disposición de triángulos semejantes, todos rectangulares: (Figura 6)

Que no es más que la concatenación de dos medias proporcionales simples, verificándose, por tanto:

AC/AP = AP/AM = AM/AB

La solución describe, pues, un aparato mecánico (también llamado "pie de zapatero") que permite, dados los segmentos a=AC y b=AB, dispuestos con el vértice A en común y perpendiculares uno a otro, terminar de construir la figura requerida.

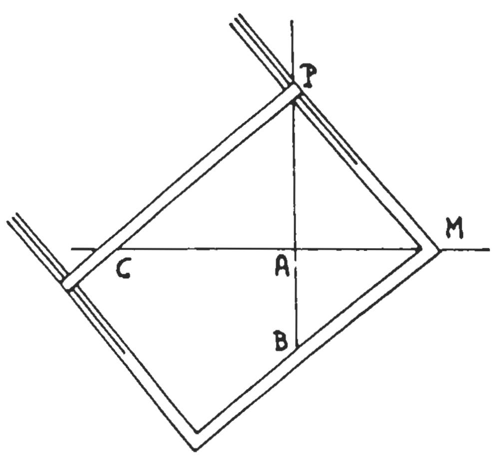


Fig. 7

El aparato está formado por cuatro varillas iguales dos a dos, dispuestas en forma de rectángulo. Mientras tres de ellas permanecen fijas, la cuarta puede deslizarse sobre los dos lados contiguos, siempre paralelamente al lado puesto.

Pivotando uno de los lados adecuadamente sobre B, de forma que un vértice descanse sobre AM (prolongado), y otro vértice sobre AP (prolongado), podemos ir encontrando los puntos correspondientes sobre el segmento AC (prolongado), hasta dar con la solución "exacta" (figura 7).

Se han barajado distintas hipótesis sobre quien fue el verdadero descubridor de esta disposición de triángulos. Para Heath (1981: 255-256), esta solución estaría basada en la de Menecmo (ver más adelante). Para Knorr, el descubridor habría sido el propio Eudoxo, quien habría resuelto la configuración deseada trazando, punto a punto, la curva (ofiuride) que define el vértice superior de todas las configuraciones definidas por B y C (figura 8).

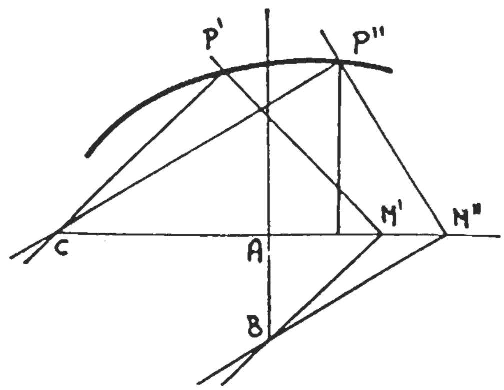


Fig. 8

Menecmo (374-325)

Eutocio describe dos soluciones de Menecmo, hermano de Dinostrato (cuadratrix) y discípulo de Eudoxo, basadas en el uso de las secciones cónicas.

En efecto, de:

$$b/x = x/y = y/a$$

se deduce:

$$x^2 = by \qquad (1)$$

$$y^2 = ax \qquad (2)$$

$$xy = ab \qquad (3)$$

que son las ecuaciones de dos parábolas referidas a sus ejes, y de una hipérbola rectangular referida a sus asíntotas, respectivamente.

Desde luego, la intersección de dos cualesquiera de estas curvas proporcionará la solución buscada.

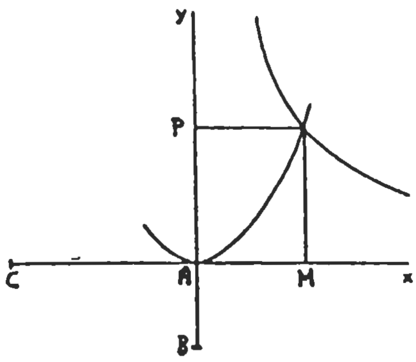


Fig. 9

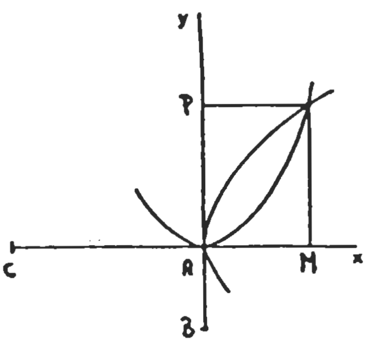


Fig. 10

En su primera solución, Menecmo intersecta (1) y (3). (Figura 9)

En la segunda, intersecta (1) y (2). (Figura 10)

Ahora bien, admitir esta demostración significa admitir que Menecmo conocía o descubrió las propiedades básicas de las secciones del cono. Sin embargo, ni la crítica textual ni el contexto histórico apoyan mucho esta idea.

Para explicar esta aparente contradicción, Knorr (1986:61-66) ha propuesto una vía alternativa para el descubrimiento de Menecmo (figuras 11 y 12), basada en la misma disposición de triángulos que estaría en la base de los métodos de Eudoxo y pseudo-Platón. Sólo más tarde se habrían identificado las curvas planas descubiertas por Menecmo, con las secciones del cono.

Eratóstenes de Cyrene (276-195)

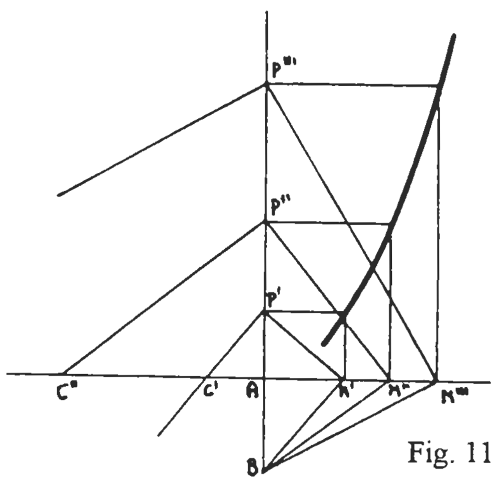


Fig. 11

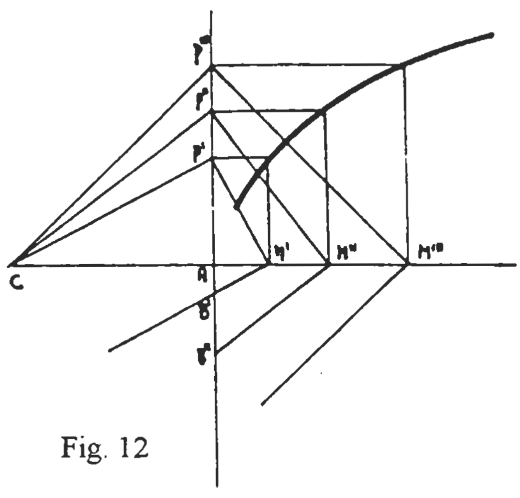


Fig. 12

E ratóstenes es el autor de una solución mecánica basada en la siguiente configuración de triángulos:

Donde es fácil ver que:

AE/BF = AK/BK = FK/GK = BF/CG = BK/CK = GK/HK = CG/DH

Luego:

AE/BF = BF/CG = CG/DH.

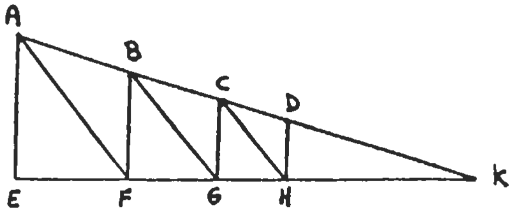


Fig. 13

Eratóstenes propone, pues, un aparato formado por tres triángulos rectángulos iguales (AMF, MNG y NQH) que se deslizan horizontalmente sobre un rectángulo (AEXY), pudiendo superponerse unos sobre otros (figura 14).

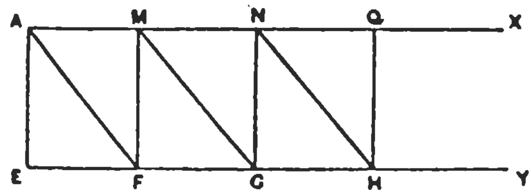


Fig. 14

Después de manipularlos adecuadamente podremos conseguir la configuración deseada, resolviéndose el problema (figura 15).

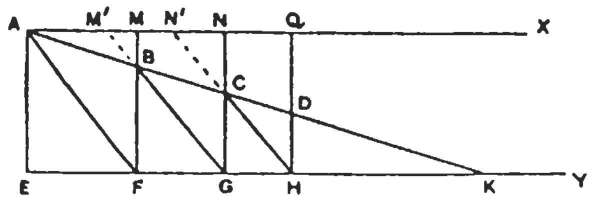


Fig. 15

Bibliografía

BOYER, CARL B. 1968 A History of Mathematics. New York: John Wiley & Sons, pp:xvii + 717.

COLLETTE, JEAN-PAUL 1985 Historia de las Matemáticas (vol. 1). Madrid: Siglo XXI,pp: x + 349 (Ciencia y Técnica).

COURANT, RICHARD ; ROBBINS, HERBERT 1981 What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and

Methods. New York: Oxford University Press, pp: [21] + 521. (Reimpresión de la 4ª ed, 1947).

DÖRRIE, HEINRICH 1965 100 Great Problems of Elementary Mathematics. Their History and Solutions. Translated by David Antin. New York: Dover, pp: x + 403. (Traducción de la 5ª ed., 1958).

EUCLIDES 1956 The Thirteen Books of The Elements. Translated from theText of Heiberg with Introduction and Commentary by Sir Thomas L. Heath (2nd. ed., revised with additions). 3 vols. New York: Dover, pp: xi + 432 + 436 + 546. (Reimpresión de la 2ª ed., 1925)

GILLINGS, RICHARD J. 1982 Mathematics in the Time of the Pharaohs. New York: Dover,pp: xiv + 286. (Reimpresión corregida de la 1ª ed., 1972)

HEATH, THOMAS L. 1981 A History of Greek Mathematics (From Thales to Diophantus). 2 vols. New York: Dover, pp: xv + 446 + xi + 586. (Reimpresión corregida de la 1ª ed, 1921).

KNORR, WILBUR RICHARD 1986 The Ancient Tradition of Geometric Problems. Boston-Basel-Stuttgart: Birkhäuser, pp: ix + 411.

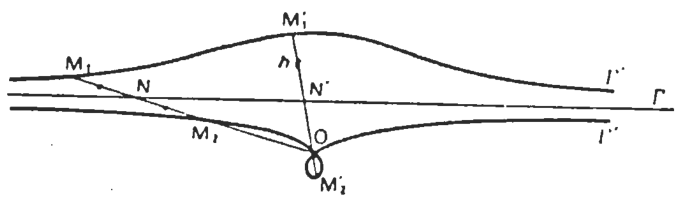
SANCHEZ PEREZ, JOSE A. 1947 La Aritmética en Grecia. Madrid: Patronato "Alfonso el Sabio" - Instituto Jorge Juan (CSIC), pp: 260.

Nicomedes (s. III a.c)

L a solución al problema dada por Nicomedes se encuentra en su libro "Sobre concoides", y según Eutocio, es extraordinariamente brillante y superior a la solución de Eratóstenes, a la que descalifica por impracticable y poco geométrica.

Nicomedes resuelve el problema por medio de una curva conocida como "Concoide de una recta" o "Concoide de Nicomedes", definida de la siguiente manera:

Sea r una recta, O un punto, y hO una distancia dada (todo en un plano). LLamamos concoide de esta recta, al lugar geométrico de los puntos N, alineados con O y con M, tales que MN=h, cuando N recorre la recta.



Concoide de recta (de Nicomedes)

Fig. 1

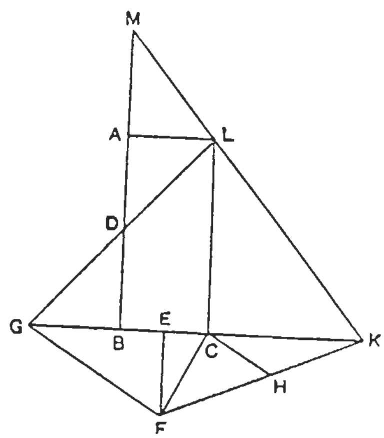


Fig. 2

Pappus y Eutocio comentan la solución de Nicomedes con ligeras variantes. Una exposición detallada del método es como sigue:

Sean AB y BC dos segmentos perpendiculares dados (figura 2), completamos el paralelogramo ABCL. Sean D y E los puntos medios de AB y BC, respectivamente. Trazamos una recta que pasa por L y D, cortando a la prolongación de BC, en G. Dibujamos la perpendicular a BC por E, y sobre ella se elige el punto F, tal que CF=AD. Se traza el segmento GF, y la paralela a él por C. Del haz de rectas que pasan por F, se elige aquella que determine con las rectas BC y la paralela a GF por C, un segmento de longitud igual a AD. Sea este segmento HK=AD=CF (es decir, se dibuja la concoide de polo F, como directriz la paralela a GF por C, y distancia AD).

La recta que pasa por K y L, corta a AB en el punto M. Se demuestra a continuación que AM y CK son las medias proporcionales buscadas:

De la figura 2 se observa que:

$$BK\ CK = EK^2 - EC^2 \quad y \quad MA\ MB = MD^2 - AD^2 \qquad (2)$$

Pues BK CK = (EK+EC) (EK-EC) y MA MB = (MD+AD) (MD-AD).

Por otra parte, por semejanza de los triángulos MAL y LCK, se tiene:

$$\frac{MA}{AB} = \frac{ML}{LK} = \frac{BC}{CK}$$

Y, teniendo en cuenta que AB=2AD y GC=2BC, obtendremos

$$\frac{MA}{AB} = \frac{BC}{CK}, \qquad \text{lo que implica} \qquad \frac{2MA}{AB} = \frac{2BC}{CK}$$

esto es: $\frac{MA}{AD} = \frac{GC}{CK}$

y, por semejanza: $\frac{GC}{CK} = \frac{FH}{HK}$ de donde: $\frac{MA}{AC} = \frac{FH}{HK}$

Pero HK=AD implica FH=MA, y por tanto, FH+HK = MA+AD, es decir, MD=FK.

De (2) se deduce: $MD^2 = MA\ MB + AD^2$, y de la figura 2: $FK^2 = EK^2 + EF^2 = EK^2 + (CF^2 - EC^2) = BK\ CK + AD^2$

Como MD=FK, resulta BK CK=MA MB,

de donde: $$\frac{CK}{AM}=\frac{MB}{BK}=\frac{AB}{CK}=\frac{AM}{BC}$$

y, por tanto: $$\frac{AB}{CK}=\frac{CK}{AM}=\frac{AM}{BC}$$

Con lo que queda demostrado que CK y AM son las medias proporcionales buscadas.

Apolonio, Herón y Filón de Bizancio

Las soluciones al problema dadas por Filón de Bizancio (fl. -250 aC), Apolonio de Pérgamo (-262, -180) y Herón de Alejandría (h. 150 dC) son básicamente la misma, y únicamente presentan ligeras variantes en el modo de dibujar la figura que conduce a la solución (figura 3).

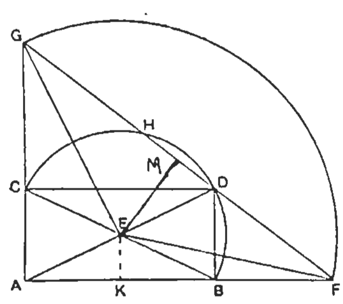


Fig. 3

Dados los segmentos AB y AC, se sitúan sobre dos rectas perpendiculares y se completa el rectángulo ABDC. Al dibujar las diagonales, se cortarán en el punto E. Con centro en E, dibujamos una circunferencia que pase por B, C y D. Sea K el punto medio de AB. El siguiente paso en la construcción es el que difiere en estas tres soluciones:

-Apolonio construye la figura dibujando una circunferencia con centro en E, y un radio apropiado de modo que los puntos de corte de esa circunferencia con las prolongaciones de AB y AC, estén alineados con el punto D (vértice del rectángulo).

-Herón la construye colocando una regla que pasa por D, y moviéndola hasta lograr que los puntos de corte de dicha regla con las rectas AB y AC, determinen los puntos G y F, equidistantes del punto E.

-Filón sitúa una regla que pasa por D y la mueve hasta lograr que sean iguales los segmentos DF y HG de la figura.

Las tres construcciones proporcionan los mismos puntos y la misma figura. Los métodos de Apolonio y de Herón son prácticamente iguales, y en cuanto a la construcción de Filón, se tiene que la mediatriz de HD será también mediatriz de GF, y los triángulos GME y FME tienen catetos iguales, y por tanto, tendrán iguales sus hipotenusas EF y EG, con lo cual se ha llegado a la construcción de Apolonio y Herón.

Demostremos que CG y BF son las medias proporcionales buscadas:

Dado que F y G equidistan de E, se verifica AF·BF=GC·AG (Euclides, III, 35).

De donde: $\dfrac{AF}{AG}=\dfrac{GC}{BF}$

Y, por semejanza de triángulos: $\dfrac{GC}{BF}=\dfrac{AF}{AG}=\dfrac{AB}{GC}=\dfrac{BF}{AC}$

De donde: $\dfrac{AB}{CG}=\dfrac{CG}{BF}=\dfrac{BF}{AC}$

Con lo que queda resuelto el problema.

Diocles

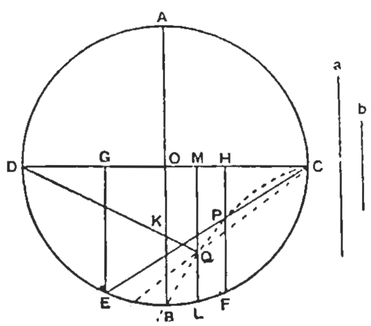


Fig. 4

D iocles (ifl. -190) proporciona una solución al problema mediante una curva por él construída, y que se conoce como la "Cisoide de Diocles".

Sean AB y DC dos diámetros perpendiculares de una circunferencia (figura 4)

En los arcos BD y BC tomamos los puntos E y F, de modo que los arcos BE y BF sean iguales. Dibujamos EG y FH, perpendiculares a DC. Trazamos CE, y sea P el punto de corte de CE y FH. Se define la cisoide como el lugar geométrico de los puntos P que corresponden a las distintas posiciones de E en el arco BD y F en el arco BC, de modo que BE=BF.

Por semejanza de triángulos se tiene: $\frac{GC}{GE}=\frac{HC}{HP}$; $\frac{HD}{HF}=\frac{HF}{HC}$

Pero, GC=HD y GE=HF, luego: $\frac{HD}{HF}=\frac{HF}{HC}=\frac{HC}{HP}$

relación válida para cualquier punto P de la cisoide.

Si se quiere hallar las dos medias proporcionales entre dos segmentos dados, a y b, se procede como sigue:

Sobre OB se elige K, de modo que: $\frac{OD}{OK}=\frac{a}{b}$

La recta DK corta a la cisoide en el punto Q, que a su vez determinará el punto M sobre DC, y el punto L sobre la circunferencia.

Se tiene: $\frac{a}{DM}=\frac{b}{MQ}$ de donde: $\frac{a}{b}=\frac{OD}{OK}=\frac{DM}{MQ}$ y por la propiedad de la cisoide:

$$\frac{DM}{ML}=\frac{ML}{MC}=\frac{MC}{MQ} \qquad (3)$$

con lo cual ML y MC son las dos medias proporcionales entre MD y MQ.

Para simplificar, llamemos α a la razón $\alpha=\frac{a}{DM}=\frac{b}{MQ}$

Las proporciones en (3), podemos escribirlas como sigue:

$$\frac{\alpha DM}{\alpha ML}=\frac{\alpha ML}{\alpha MC}=\frac{\alpha MC}{\alpha MQ}$$

ahora bien, α DM = a, y α MQ = b, es decir:

$$\frac{a}{\alpha ML} = \frac{\alpha ML}{\alpha MC} = \frac{\alpha MC}{b}$$

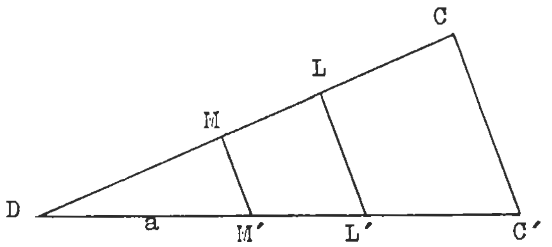


Fig. 5

Para tener resuelto el problema basta determinar los segmentos M'L' y M'C' de la figura 5, que serán las medias proporcionales buscadas entre a y b, esto es:

$$\frac{a}{M'L'} = \frac{M'L'}{M'C'} = \frac{M'C'}{b}$$

Sporus y Pappus

L as soluciones atribuídas a Sporus de Nicea (S. II dC) y Pappus (280-340) son prácticamente iguales a las de Diocles, con la diferencia de que en lugar de utilizar la cisoide, usa una regla que pasando por un punto, determine cierta pareja de segmentos iguales.

La figura 6 muestra la construcción de Sporus, y añadiendo los segmentos punteados se obtiene la de Pappus.

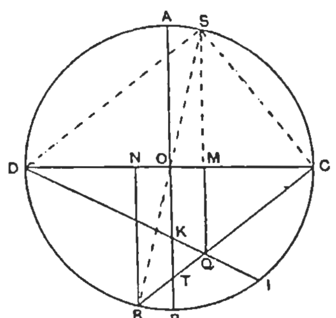


Fig. 6

Dados los segmentos DO y OK se dibuja la circunferencia de radio OD, y sobre el diámetro perpendicular a OD se sitúa OK. Se traza la cuerda DI pasando por K. Se sitúa una regla que pase por C, de modo que al cortar a DI, AB y la circunferencia determine tres puntos Q, T y R, tales que QT=TR. Por Q y R se trazan perpendiculares a DC, que determinarán los puntos M y N. Por construcción OM=ON, ya que QT=TR (el punto Q pertenecería a la cisoide de Diocles).

Por semejanza de los triángulos CNR, SMC y CMQ, se tiene:

$$\frac{CN}{RN}=\frac{SM}{MC}=\frac{MC}{MQ}$$

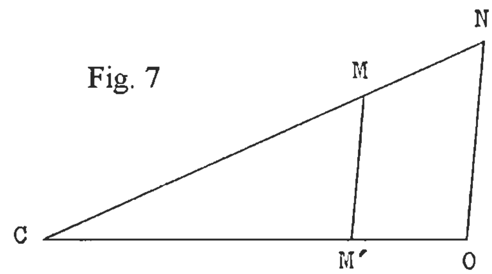
como SM=RN, resulta: $$\frac{CN}{RN}=\frac{RN}{MC}=\frac{MC}{MQ} \qquad (4)$$

Es decir, RN y MC son las medias proporcionales entre CN y MQ; ahora bien, el problema consiste en hallar las medias proporcionales entre OD y OK.

Por la semejanza de los triángulos CNR y COT, por un lado, y DOK, DMQ, por otro, se tiene:

$$\frac{RN}{OT}=\frac{CN}{OC}=\frac{DM}{OD}=\frac{MQ}{OK}$$

Fig. 7



Llamemos α a la razón: $\alpha=\frac{RN}{OT}$

con lo que resulta: CN=α OC

RN=α OT

MQ=α OK

De (4) resulta (figura 7): $$\frac{\alpha OC}{\alpha OT}=\frac{\alpha OT}{\alpha M'C}=\frac{\alpha M'C}{\alpha OK}$$

esto es: $$\frac{OC}{OT}=\frac{OT}{M'C}=\frac{M'C}{OK}$$

Por tanto, OT y M'C son las medias proporcionales buscadas.

Bibliografía

BOYER, CARL B. 1986 Historia de la Matemática [1968]. Madrid: Alianza Editorial.

HEATH, THOMAS L. 1981 A History of Greek Mathematics I. From Thales to Euclid [1921]. New York: Dover.

REY PASTOR, JULIO ; BABINI, JOSE 1984 Historia de la Matemática (vol. 1). Barcelona: GEDISA.