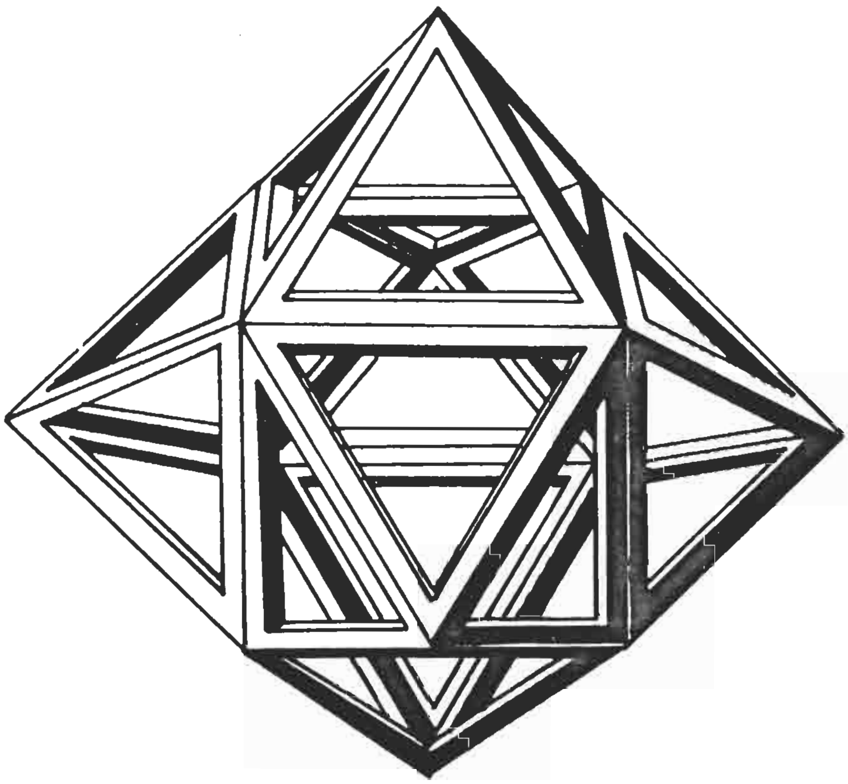
Arquímedes: el Método



Luís Vega Reñón.
Profesor de Filosofía de la Ciencia.
UNED.

La exposición de Arquímedes de un método para abordar cuestiones geométricas por medio de nociones y de consideraciones "mecánicas", *Perí tôn mekhanikón theoremáton pròs Eratosthénen éphodos*, ha venido a ocupar un lugar especial en el conjunto de su obra. A ello han contribuido en alguna medida circunstancias externas de diverso orden -la suerte misma del texto, hasta que cae en 1906 en manos responsables, no ha dejado de ser bastante accidentada-. Pero aquí sólo nos van a interesar otros motivos más sustanciales e internos que han hecho de este texto un documento histórico de singular importancia en el contexto de la matemática helenística de la época del siglo III a.n.e.[1]

---

[1] Seguiré el texto griego establecido por J.L. Heiberg (Archimedis opera omnia cum comm. Eutocii, Leipzig, 1913, II, pp. 426-507, Reimp. Sttugart, 1972), cotejado con la

La verdad es que, al cumplirse medio siglo desde el trabajo clásico de Dijksterhuis (1938-1943), no parecen cerradas todas las cuestiones de interpretación y reconstrucción a que dan lugar las contribuciones de Arquímedes y sus secuelas históricas; y el Método no es, desde luego, un texto anodino a este respecto[2].

Una de las cuestiones más llamativas y pertinaces tiene que ver precisamente con la índole y sentido del "método mecánico". Suele considerarse en el marco tradicional de la oposición entre **invención** y **justificación**, un legado renacentista que luego se ha ido beneficiando de nuevos renacimientos entre la gente dada a la filosofía de la ciencia. Lo que me propongo hacer en este seminario es una reconsideración del Método de Arquímedes con un doble propósito: 1) el de despejar algunos equívocos asociados al tópico de su significación **inventiva**; 2) el de situar esta comunicación de Arquímedes en una perspectiva más interesante y más próxima, creo, a su contexto original: la perspectiva abierta por las relaciones entre pruebas heurísticas y demostraciones dentro de la tradición de la matemática alejandrina del siglo III.

Voy a partir de una muestra concreta del "método mecánico", la proposición 1 de la comunicación de Arquímedes. Es un caso sencillo, ilustrativo y suscita de inmediato su comparación con el uso anterior de ese mismo método en Sobre la cuadratura de la parábola, 1-17. Luego pasaremos al problema de la significación del Método en los términos de la distinción o

---

edición de Ch. Mugler (Les oeuvres d'Archimede. Paris. 1971. III. pp. 81-127). Vid. mi edición española (Arquímedes: El Método. Madrid. 1986)

[2] Vid. la reciente reedición de E. J. Dijksterhuis (Archimedis. Princenton. 1987. con el suplemento de actualización bibliográfica de W.R. Knorr. pp. 419-451). Dos muestras significativas de la renovada discusión en torno a diversos aspectos de la obra de Arquímedes pueden ser: W.R.Knorr. Archimede and the Elements: Proposal for a revised chronological ordering of the Archimedean corpus. Archive for History of Exact Sciences. 19/3 (1978). pp. 211-290; y T. Sato. A reconstruction of The Method Proposition 17. and the development of Archimedes thought on quadrature. Historia Scientiarum. 31 (1986). 61-86 y 32 (1987). 75-142. Por otro lado. el voluminoso trabajo de M. Clagett (Archimedes in the Middle Ages. Philadelphia. 1964-1984) aún espera continuidad en el caso de los tiempos modernos. cuando la influencia un tanto "guadiana" de Arquímedes aflora decisivamente.

contraposición entre la vía mecánica de abordar una cuestión geométrica y la demostración efectiva de la proposición correspondiente. Será el momento de plantear este problema en las dos perspectivas: **invención** vs. **justificación** y **argumentación** (prueba) **plausible** vs. **demostración**, explícitamente señaladas por el propio Arquímedes. En su discusión, veremos las peculiaridades del método "mecánico" dentro del marco heurístico de la matemática griega -también es harto singular en el marco más general de la concepción griega de las pruebas, e.g. en términos de *semeîon*-, y debatiremos los motivos que podrían haber inducido a Arquímedes a declarar que un planteamiento conforme a ese método está lejos de constituir una demostración (*khorìs apodéxeos eînai...theorían*).

1. El Texto

El Método es una especie de memoria científica dirigida a Eratóstenes para dar a conocer en el medio alejandrino una vía de investigación geométrica un tanto peculiar. Voy a asumir las revisiones cronológicas de la obra de Arquímedes propuestas por Knorr (1978) y Sato (1986-87), que coinciden en situar el escrito en su última época de trabajo, justo al final del corpus arquimediano conocido -¿una especie de testamento imprevisto?-.

En el prefacio, Arquímedes señala tres aspectos de interés:

1. La diferencia entre una consideración de resultados geométricos por vía mecánica (*theoreín dià tôn mekhanikôn*) y una demostración geométrica (*apodeíknymi geometrikôs*).

2. Un orden cronológico entre ambos procedimientos que marca la anterioridad del hallazgo "mecánico" (*próteron moi*

phanénton mekhanikôs / hysteron geometrikôs apedeíkhthe) al menos por lo que se refiere a ciertas proposiciones expresas.

3. Dos servicios heurísticos del método mecánico. Uno, principal, es el abordaje de diversas cuestiones matemáticas como la determinación del área (volumen) de una figura curvilínea por relación al área (volumen) de una figura rectilínea -e.g., prop. 1-, o la determinación del volumen de una figura curvilínea por relación al volumen de otra figura curvilínea -e.g., 2- o, en fin, la determinación del centro de gravedad de un sólido curvilíneo -e.g., 6-. Las dos primeras tienen raigambre tradicional; la tercera responde, en cambio, a una investigación original y típicamente arquimediana. El otro servicio heurístico, más bien subsidiario, hace referencia a la demostración ulterior de los resultados, pues *"es más fácil construir la demostración después de haber adquirido por ese método cierto conocimiento del objeto de investigación (gnôsin tìna tôn dsetemáton) que buscarla sin una idea al respecto"* (Vid. El Método, edic. c, pp. 33-36).

Al prefacio siguen unas asunciones previas (**"prolambanómena"**, en expresión de Heiberg). Algunas están tomadas de Sobre el equilibrio de planos I, II (asunciones 2-6); de las otras, 1 y 7-10, no hay constancia en otra parte del corpus arquimediano[3]

A ellas se añade como lema el teorema 1 de Sobre conoides y esferoides, cuya transcripción más explícita podría ser la siguiente: Sean A_1, B_1, C_1, D_1...., A_2, B_2, C_2, D_2...., A_3, B_3, C_3, D_3...., A_4, B_4, C_4, D_4...cuatro series de magnitudes. Si $A_1 : B_1 :: A_2 : B_2$, $B_1 : C_1 :: B_2 : C_2$, $C_1 : D_1 :: C_2 : D_2$... -y así

[3] Cabe conjeturar que podrían hallarse en otras presuntas obras, hoy perdidas de Arquímedes, de las que hay menciones bajo los títulos de Isorropiai y Mekhaniká, pero nada sabemos acerca de su autoría efectiva y su contenido. Salvo indicación expresa, en las referencias al texto del Método me remito a la Edic. ya citada (Madrid, Alianza, 1986). A propósito de "prolambanómena" y de la informalidad con que Arquímedes alude a sus supuestos o asunciones básicas, vid. allí mismo la nota 1, pág. 37.

sucesivamente-, y $A_1 : A_3 :: A_2 : A_4$, $B_1 : B_3 :: B_2 : B_4$, $C_1 : C_3 :: C_2 : C_4$....-y así sucesivamente-, entonces $(A_1 + B_1 + C_1 + D_1 + ...) : (A_3 + B_3 + C_3 + D_3 +...) :: (A_2 + B_2 + C_2 + D_2 +...) : (A_4 + B_4 + C_4 + D_4 +...)$. Por lo demás, en el curso de su argumentación, Arquímedes también se sirve, naturalmente, de algunos otros resultados conocidos, propios o ajenos, con o sin referencia expresa.

Prop. 1: área de un segmento parabólico

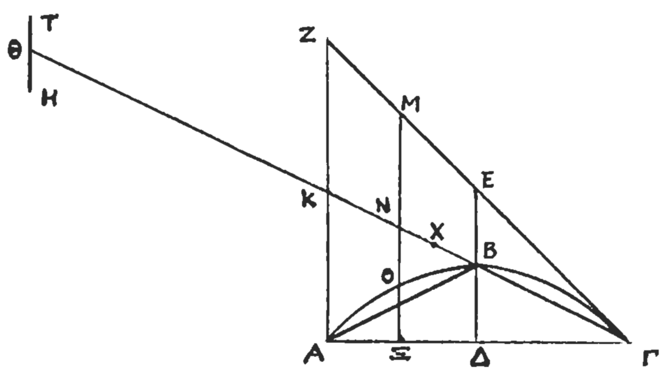
"Así pues, expongo en primer lugar el resultado que también fue el primero en manifestarse por vía mecánica, a saber: que todo segmento de una sección de cono rectángulo (orthogoníou kónou tomé) es cuatro tercios del triángulo que tiene la misma base e igual altura". Marcaré ciertos pasos característicos:

* [*ékthesis*: "Esto ABΓ..."]

Sea ABΓ el segmento comprendido entre la recta AΓ y la sección de cono rectángulo ABΓ ; divídase AΓ por la mitad en el punto Δ y trácese la recta Δ BE, paralela al diámetro, y las rectas convergentes AB y BΓ.

* [*diorismós*: "*Légo hóti epítriton estín tò ABΓ tmêma toû AB Γ trigónou*"]

Digo que el segmento ABΓ es cuatro tercios (uno y un tercio) del triángulo ABΓ.



* [*kataskeué*]

Trácese a partir de los puntos A y Γ la recta AZ, paralela a ΔBE, y la recta ΓZ, tangente a la sección; prolónguese ΓB hasta K; sea ΓK igual a KΘ Considérese ΓΘ una palanca (*noeístho* *dsygós ho* $\Gamma\Theta$) cuyo medio es K, siendo $M\Xi$ una recta cualquiera paralela a $E\Delta$.

[Fase geométrica] Dado que ΓBA es una [parábola] y ΓZ es tangente a ella y $\Gamma\Delta$ es una ordenada, EB es igual a $B\Delta$, pues se demuestra en los Elementos (sobre cónicas). Por esto mismo y porque ZA y $M\Xi$ son paralelas a $E\Delta$, MN es igual a $N\Xi$ y ZK es igual a KA [vid. Euclides, Elementos, VI.4, V.9]. Dado que $M\Xi$ es a ΞO como ΓA es a ΞA [según se demuestra en un lema -vid. Sobre la cuadratura de la parábola, 5; cfr. Euclides, Elem., V.18-], y ΓK es a KN como ΓA es $A\Xi$ [vid. Euclides, Elem., V.18], y ΓK es igual a $K\Theta$ [recuérdese esta condición inicial de la *kataskeué*], entonces $M\Xi$ es a ΞO como ΘK es a KN. (Supuestos tácitos: preservación de proporcionalidad (-Elem., V.12, 18-), transitividad de proporcionalidad y sustituibilidad de idénticos).

[Fase mecánica. Hipótesis de tipo H1]

Ahora bien, al ser el punto N el centro de gravedad de la recta $M\Xi$ (*kai epei N semeîon kéntron toû bárous tês MΞ eutheias estín*), justo porque MN es igual a $N\Xi$ [vid. asunción 4], si ponemos la recta TH, igual a ΞO, con el centro de gravedad en el punto Θ; de modo que $T\Theta$ sea igual a ΘH, entonces $T\Theta H$ equilibrará a $M\Xi$ mantenida en su sitio, por estar dividida ΘN en partes inversamente proporcionales (*antipeponthótos*) a los pesos TH y $M\Xi$ siendo $M\Xi$ a HT como ΘK a KN [vid. Sobre el equilibrio de planos, I.6-7]. Así pues, el punto K es el centro de gravedad de la suma de ambos pesos [i.e. $T\Theta H$ y $M\Xi$; asunción 3].

Pero del mismo modo (*homoíos dè kaí*) cuantas paralelas a $E\Delta$ se tracen en el triángulo $ZA\Gamma$ equilibrarán, mantenidas en su sitio, a los segmentos intersecados sobre ellas por la sección y transportados al punto Θ de modo que el centro de gravedad de unas y otros sea el punto K. (Supuestos tácitos: isotropía y asunción 6 de Equilibrio de planos, i.e. invariancia bajo desplazamiento)

[Fase mecánica. Hipótesis de tipo H2]

Ahora bien, como el propio triángulo ΓZA está compuesto de (*ek...synésteken*) las rectas trazadas en el triángulo ΓZA y el segmento ABΓ está compuesto de los segmentos tomados en la sección del mismo modo que ΞO, entonces el triángulo ZAΓ, manteniéndose en su sitio, equilibrará respecto del punto K al segmento de la sección colocado con su centro de gravedad en Θ, de manera que el centro de gravedad de la suma de ambos sea el punto K. [Generalización de H1 por composición H2]

Divídase ahora ΓK por el punto X de modo que ΓK sea el triple de KX; entonces, el punto X será el centro de gravedad del triángulo AZΓ, según se ha demostrado en Sobre el equilibrio [I 15, II 5; cfr. asunción 5].

*[apódeixis: *"Epeì oûn..."*]

Así pues, como el triángulo ZAΓ, mantenido en su sitio, equilibra respecto del punto K al segmento BAΓ colocado con su centro de gravedad en Θ, y el centro de gravedad del triángulo AZΓ es el punto X, entonces la recta ΘK es a la recta XK como el triángulo AZΓ es al segmento ABΓ colocado con su centro de gravedad en Θ. Ahora bien, ΘK es el triple de KX [recuérdese ΓK= KΘ , ΓK = 3(KX)]. Por consiguiente, el triángulo AΓZ es también el triple del segmento ABΓ. Pero el triángulo AΓZ es así mismo el cuádruple del triángulo ABΓ, pues ZK es igual a KA y AΔ es igual a ΔΓ [según Elem. VI.4, ΔΓ : AΓ :: ΔB : AK; por ende, dado que ΔΓ = 1/2 (AΓ) resulta ΔB = 1/2 (AK) y dado que AK = 1/2 (AZ) resulta ΔB =1/4 (AZ)].

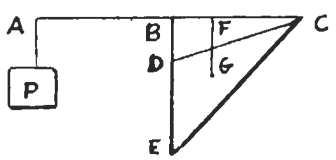
*[Sympérasma: *"epítriton ara estin to ABΓ tmêma toû ABΓ trigónou"*]

Por lo tanto, el segmento ABΓ es cuatro tercios del triángulo ABΓ.

Prop. 2 (inicio): *"Lo que hemos aducido no ha sido una demostración (ouk apodéiktai)...pero ha dado a la conclusión ciertos visos de ser verdad (émphasin tina...alethès eînai)". (*Vid. El método, edic. c., p. 43)

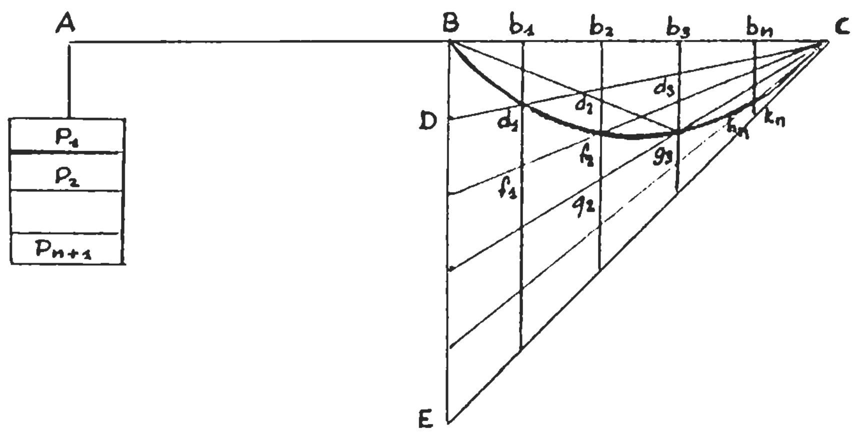
La marca distintiva de las proposiciones de este género consiste en la mediación de consideraciones estáticas o baricéntricas (tipo **H1**) y de extrapolaciones composicionales (tipo **H2**).

A efectos comparativos, no estará de más recordar -siquiera sucintamente- el tratamiento de esta proposición sobre el área del segmento parabólico en otra obra de Arquímedes, comúnmente atribuida a su primera época: Sobre la cuadratura de la parábola.



Proposiciones 6-7. Considérese la magnitud P suspendida de A y el triángulo CDE suspendido de B, C, con su centro de gravedad en G. P equilibra a CDE. La vertical de G se encuentra con BC en el punto F. Pues bien, como BF = 1/3 (BC), entonces CDE = 3 (P), o en otros términos P = 1/3 (CDE).

8-13. Constrúyanse ahora mediante las intersecciones de paralelas $b_1 \ldots b_n$, $d_1 \ldots d_n$, $f_1 \ldots$etc. sucesivos trapecios y un



triángulo en CBE, suspendidos de puntos de BC. Considérense también las magnitudes P_1 ... P_{n+1}, suspendidas de A, y sus condiciones de equilibrio con respecto a las figuras en CBE.

14. La suma de $P_1 + P_2 + \ldots P_{n+1}$ equilibra CBE.

15. $P_1 + P_2 \ldots + P_{n+1} = 1/3$ (CBE).

Dados el segmento parabólico Bg_3C; los trapecios d_1 b_2, f_2 b_3, g_3 b_n ..., y el triángulo h_nb_nC como figuras inscritas, de modo que $d_1b_2 + f_2b_3 + \ldots h_nb_nC = I_n$; los trapecios Db_1, f_1b_2, g_2b_3... y el triángulo k_nb_nC como figuras circunscritas, de modo que $Db_1 + f_1b_2 + \ldots + k_nb_nC = C_n$, resulta:

α) $\mathbf{I_n} < P_1 + P_2 + \ldots + P_n < \mathbf{C_n}$

β) $\mathbf{I_n} < 1/3$ (CBE) $< \mathbf{C_n}$

16. Supongamos que el segmento parabólico Bg_3C no es igual a 1/3 del triángulo CBE.

Entonces o es mayor o es menor (tricotomía).

Sea mayor: $Bg_3C > 1/3$ (CBE).

La diferencia entre C_n e I_n puede hacerse tan pequeña como se desee -en razón de Euclides: Elementos, X.1, o en virtud del lema "arquimediano" mencionado en el prefacio- de modo que resulte ($C_n - I_n <$ (Bg_3C - 1/3 (CBE).
Luego, (Bg_3C-I_n)< (Bg_3C-1/3 (CBE)), pues $Bg_3C < \mathbf{C_n}$. Y, en fin, $I_n > 1/3$ (CBE) -absurdo: contra β).

Sea menor: $Bg_3C < 1/3$ (CBE).

El mismo lema (Elem., X .1). Así que, (C_n-I_n) < (1/3 (CBE)-Bg_3C).
Luego, (C_n - Bg_3C) < (1/3 (CBE) - Bg_3C), pues $Bg_3C > I_n$. Y, en fin, $C_n < 1/3$ (CBE) -absurdo: contra β).

Por consiguiente, $Bg_3C = 1/3$ (CBE)

17. Considérese ahora el triángulo Bg_3C.

CBE = 4 triáng. Bg3C.

Por lo tanto, segm. Bg3C = 4/3 [1 1/3] triáng. Bg3C.

18-24. Demostración geométrica canónica.

*Interés de **23**: muestra de una suma posiblemente infinita con resultado finito. Sea una serie de magnitudes A, B, Γ,...., Δ tales que A, B=1/4 (A), Γ=1/4 (B),...[i.e.: 1, 1/4, $(1/4)^2$...]. Entonces, A + B + ...+ Δ + 1/3 (Δ) = 4/3 (A).

Supongamos Z=1/3 (B), H=1/3 (Γ), ...,Θ =1/3 (Δ), de manera que B+Z = 1/3 (A), Γ+H = 1/3 (B), ...,Δ + Θ= 1/3 (Γ'). Luego, B+Γ+ ...+Δ+Z+H+...+Θ = 1/3 (A+B+Γ...). Luego, Z+H...= 1/3 (B+Γ...) y B+Γ+...+Δ+Θ = 1/3 (A). En suma: A+B+...+Γ+Θ = A+1/3 (A) = 4/3 (A) [4]

Algunos rasgos relevantes del proceder "mecánico" de Arquímedes en Sobre la cuadratura... son: a/ El reconocimiento de la necesidad de una convalidación demostrativa. b/ La ausencia de consideraciones composicionales (hipótesis de tipo **H2**). c/ La introducción de un procedimiento de prueba mixto, baricéntrico y geométrico (técnicas de exhausción) en **15-17**.

Un detalle un tanto curioso de la demostración ulterior es la utilización en **20** de Elem. X 1 y del procedimiento euclídeo de aproximación, en vez del lema recordado en el prefacio (dadas dos áreas desiguales, el exceso de la mayor sobre la menor, por

[4] La teoría estándar (euclidiana) de la proporción podría permitirse un tratamiento parejo de sumas y, por cierto, mediante un procedimiento de prueba más elegante. Discurriría conforme al patrón de Elem., IX 35, donde se establece para una serie finita de tantos enteros cuantos se quiera A, B, Γ, Δ, en proporción continua, que como el exceso del segundo es al primero, así será el exceso del último a todos (a la suma de) los anteriores. Esto es, (B−A) : A :: (Δ−A) : (A+B+Γ). La prueba descansa en el uso de la separación [Elem., VII 11,13] y en la preservación de proporción para las sumas de antecedentes y consecuentes [VII 12: como uno de los antecedentes es a uno de los consecuentes]. El resultado se puede generalizar a las magnitudes en progresión geométrica creciente o decreciente apelando a V 17 para justificar la proporción por separación, y a V 12 para establecer la proporción de las sumas.

pequeño que sea, puede, añadido continuamente a sí mismo, llegar a exceder a la mayor), y de la técnica exhaustiva de "compresión" antes empleada en **16**. Puede que Arquímedes opte por acentuar la ortodoxia de **18-24**. (El lema citado parece justificarse a los ojos de Arquímedes de modo similar a como lo haría hoy el axioma de elección, i.e. por su rendimiento demostrativo en manos de geómetras anteriores[5] y en las suyas propias -cfr. la asunción 5 de Sobre la esfera y el cilindro-)

2. El Problema de la Significación del Método

Como ya había indicado al principio, esta comunicación de Arquímedes a Eratóstenes recoge expresamente dos dimensiones del método "mecánico": una referida a la **invención**, la otra relativa a su calidad de **argumentación (prueba) plausible** -de la primera hay constancia en el prefacio; de la segunda, allí también y en el párrafo inicial de la prop. 2-. Creo que las dos son solidarias del propósito principal de Arquímedes en esta especie de memoria científica confiada a Eratóstenes. Este propósito es, a mi juicio, el de dar a conocer a colegas competentes un procedimiento de investigación un tanto singular, pero recomendable; y ésto no sólo por sus virtudes heurísticas de hecho -e.g. por el provecho que de él ha sacado en efecto el propio Arquímedes-, sino porque se trata de un método de uso público y razonable, al menos en la medida en que depara al resultado

[5] No faltan otros indicios indirectos de este uso anterior (e.g. por parte de Eudoxo) en algún pasaje de Aristóteles. Vid. L. Vega: La trama de la demostración. Madrid. 1990; pp. 286-7.

obtenido cierta verosimilitud. Veamos algunas de las cuestiones suscitadas por el procedimiento "mecánico" en una y otra dimensión

2.1. Invención versus justificación

A. Preliminares: Lo que no es el Método de Arquímedes.

1. Este escrito no es, para empezar, una confidencia personal o un relato biográfico sobre cómo se produce un descubrimiento (cfr., como pieza de contraste, Poincaré, 1908, La invención matemática). Las únicas pistas que Arquímedes daría en esta perspectiva serían la precedencia cronológica de los hallazgos "mecánicos", alguna muestra de olfato heurístico -e.g. al final de 2, cuando alude a la relación entre la superficie y el volumen de la esfera- y, en definitiva, claros signos de una imaginación entrenada en el dominio de la tradición matemática y el cultivo de campos fronterizos como los de la geometría y la estática.

2. Tampoco es la revelación de una clave secreta de éxito teórico (e.g. con la aureola de "arcana methodus"). Según es bien sabido, más allá del reducido ámbito de un algoritmo -como el *anthyphaireîn* euclídeo para la determinación de la medida común máxima entre dos enteros cualesquiera que no sean primos relativos (VII 2-3)-, no cabe esperar claves heurísticas de este género.

3. Es, desde luego, la presentación de una vía de investigación. Más aún, constituye -creo- la primera declaración expresa de la disociación tradicional en matemáticas entre un ***ars inveniendi*** y un ***ars disserendi***. (Es obvio, por lo demás, que la demostración geométrica del Método, prop. 15, no guarda relación con el procedimiento heurístico seguido por la vía mecánica, 12-14. Lo mismo cabe apreciar con respecto a la Cuadratura..., 1-17 y 18-24). Pero esto no significa, en fin, una especie de esquema o plan general de directrices heurísticas para la solución de problemas[6]. Aquí se trata más bien de un proceder heurístico concreto.

B. Dos rasgos relevantes de la investigación.

1. Un supuesto básico: Hay propiedades inherentes de suyo, i.e. por naturaleza (*physei*), a las figuras geométricas. Remitiéndose precisamente a la relación entre la superficie y el volumen de la esfera, dice Arquímedes en el prefacio de Sobre la esfera... dirigido a Dositeo: *"Estas propiedades ya eran por naturaleza inherentes a las figuras en cuestión, pero no eran conocidas por aquellos que antes de nosotros se habían dedicado a la geometría porque ninguno de ellos había caído en la cuenta de la simetría (symetría, i.e. correspondencia métrica) existente entre estas figuras".*

Este supuesto presupone el mantenimiento de la perspectiva tradicional (e.g. euclídea) centrada en la consideración de los objetos geométricos y sus propiedades o relaciones, antes que en una idea general abstracta del espacio geométrico -o en lo que hoy podríamos entender como "modelo" de una teoría axiomática[7]

Pero el supuesto también depara una guía objetiva de la investigación de nuevos resultados a partir de otros ya establecidos, y da lugar a una especie de subproducto heurístico de la demostración misma. *"En vista de esto, a saber: que toda esfera es el cuádruple del cono que tiene como base el círculo máximo y una altura igual al radio de la esfera, se me ocurrió la idea (he énnoia egéneto) de que la superficie de toda esfera es el cuádruple*

---

[6] Estoy pensando en las "guidelines" propuestas por Pólya (1945, 1957²): 1a, comprender el problema; 2a, trazarse un plan; 3a, ejecución del plan; 4a, revisión del proceso en su conjunto ("understanding the problem, devising a plan, carrying out the plan, looking back", How to solve it, Harmondsworth, 1990 reimp.)

[7] Vid. el ya citado La trama de la demostración, IV & 3.3, pp. 368-80. En ese "concretismo" de Arquímedes, en su atenerse a las propiedades específicas de figuras, ha visto Bourbaki una diferencia sustancial con el nivel de abstracción que comportan el estudio de la "integral" subyacente y el desarrollo de este cálculo, vid. (1969): Elementos de historia de las matemáticas, Madrid, 1976, 2a edic. corregida y aumentada, p 232

del círculo máximo de la esfera; pues, en efecto, como todo círculo es igual a un triángulo que tiene por base la circunferencia del círculo y una altura igual al radio del círculo, supuse (hypólepsis gar hên) así mismo que toda esfera es igual a un cono que tiene por base la superficie y por altura el radio de la esfera"(Método. 2, edic. c. pp. 47-8)[8]

2. La mediación de la comunidad matemática. No faltan testimonios de la comunicación de resultados avanzados en el seno de lo que se podría calificar de "colegio invisible" alejandrino del s. III a.n.e. (e.g.: Arquímedes se dirige a Conón, Dositeo, Eratóstenes; Apolonio, a Eudemo de Pérgamo, Attalo). Esta comunicación tiene, en el caso de Arquímedes, dos fases principales: una consiste en la propuesta informal o previa de enunciados sin pruebas, bien a efectos de examen, bien como una especie de reto o de estímulo para la demostración subsiguiente; la otra consiste en la exposición formal de una demostración a fin de que el resultado probado se integre efectivamente en el cuerpo del conocimiento establecido (hasta el punto de que resultados que podrían parecer increíbles, *oúk eúpista*, a los profanos serán dignos de crédito por demostración, *pistá dià tán apódeixin*, para los entendidos[9]). En todo caso, se atribuye a la comunidad la capacidad de examinar (*episképsasthai*) tanto los enunciados como las pruebas (e.g.Sobre la esfera..., pref.), y la autoridad de juzgar (*krínein*, e.g. Apolonio: Cónicas, pref. de I, IV).

[8] Sean los resultados acerca de la relación esfera-círculo máximo, a, la superficie esférica, b, el círculo, c, y la relación esfera-superficie esférica, d. Entonces, la vía heurística discurre en la dirección : c. → d y, conocido a, → b. En cambio, la vía demostrativa sienta c en Sobre la medida del círculo, b y a (en este orden en Sobre la esfera..., 33 y 34). En Pappo (Collect. V 40-41), la demostración de d tiene, a través de b, como corolario a.

[9] Aristóteles alude a una situación parecida a propósito de la inconmensurabilidad (Metaphys., 983b15-21). Un ejemplo más cercano a nosotros podría ser el teorema Tarski-Banach (1924): si se divide una esfera compacta en partes -cinco al menos-, es posible obtener de ellas dos esferas del mismo tamaño que la primera e igualmente compactas (la prueba no es constructiva, desde luego, y supone el axioma de elección)

Según esto, la invención de posibles proposiciones no es un mero ejercicio imaginativo (en plan "neurona libre"), sino que se enmarca en ciertas líneas de investigación y parece asumir ciertas exigencias críticas (interés del problema, verosimilitud de la propuesta). Supone un fondo común (en parte, tácito) de conocimientos y de patrones de reconocimiento. Y la comunidad está legitimada para pronunciarse no sólo sobre los productos de elaboración demostrativa, sino sobre los resultados intuidos o alcanzados por la vía inventiva -cuya suerte es, en principio, provisional-. Por ejemplo, en el prefacio de Sobre espirales, dirigido también a Dositeo, Arquímedes dice haber enviado con anterioridad a Conón unos resultados cuyas pruebas remite ahora a Dositeo tras haberlas comunicado a otros colegas competentes; allí mismo confiesa que dos de los enunciados que había aventurado entonces, se han revelado falsos a la luz de otros resultados obtenidos en ese intervalo de tiempo. Pues bien, esta forma de presentar enunciados y pruebas no parece diferente de la seguida en la exposición del método "mecánico". A los ojos de Arquímedes también se trataría de una contribución posible al desarrollo del conocimiento: *"estoy convencido de que puede representar una contribución no poco provechosa a la investigación matemática. Pues supongo que algunos de mis contemporáneos o sucesores llegarán a encontrar por el método expuesto otros teoremas que a mí no se me han ocurrido"* (El Método, ed. c., pp.35-6).

C. El método "mecánico" en el marco heurístico antiguo.

La matemática griega, antes de Arquímedes, ya llevaba tiempo familiarizada con diversos procedimientos de invención. El empleo de un "método de hipótesis" para la obtención de *diorismoí* (i.e.:condiciones necesarias de la solubilidad de un problema, o para la reducción al absurdo de la solución propuesta), o la reducción de un problema por analogía con otro más sencillo y anteriormente resuelto, eran, entre otros, procedimientos practicados en la segunda mitad del s. V y las primeras décadas del s. IV. En este contexto de la solución de problemas también se fue perfilando una estrategia heurística que luego se generalizó a la investigación de los teoremas y se redondeó con una prueba deductiva complementaria, hasta ganarse el título de "método de análisis-síntesis"[10]. Como a veces se ha pensado que el método "mecánico" de Arquímedes es una suerte de "análisis", este procedimiento merece cierta atención.

Del par "análisis-síntesis" tenemos varias descripciones, ninguna de ellas exenta de equívocos[11]. En sustancia, envuelve un objeto de investigación o búsqueda (*tò dsetoúmenon*), algún dato o supuesto comúnmente admitido (*tà homologoúmenon*), y una línea inferencial (*tà akóloutha*) entre ellos (la mayor parte de los problemas de interpretación giran en torno al tipo de inferencia involucrado; a mi juicio, envuelve nexos pragmáticos de implicación). Cuando la línea inferencial parte de la suposición de lo que se busca como si ya hubiera sido efectivamente hallado y discurre en términos de unas condiciones necesarias hasta los supuestos o principios precisos para lograrlo, el proceso se denomina "análisis". Cuando toma el camino inverso y parte de estos supuestos o principios como condiciones determinantes (no sólo necesarios sino suficientes) hasta concluir en el resultado pretendido, se denomina "síntesis". El valor heurístico de la estrategia analítica se confirma o se convalida mediante esta conversión sintética, consistente en la deducción canónica de la

[10] Una analogía reductiva permitió, al parecer, a Hipócrates de Quíos plantear el problema de la duplicación del cubo como si se tratara de hallar dos medias proporcionales en proporción continua -por analogía con la duplicación del cuadrado, reducida al hallazgo de una media proporcional. Del "método de hipótesis" hay indicios en Platón: Menón, 862-87 a. Por otro lado, según Filodemo (Academ. Index. Y 15), en tiempos de Eudoxo y de sus coetáneos aparecieron el análisis y la teoría de los diorismos. De las relaciones entre el análisis y su conversión sintética se ocuparon Menecmo y Anfínomo (Proclo: In I Euc. Comm., 255.12-26) y da fe Aristóteles (e.g. Apo. 78a6-13).

[11] En La trama de la demostración, o.c., pp. 90-92, pueden verse referencias a esos textos y a su discusión contemporánea. De la vasta literatura que han generado me gustaría destacar M. S. Mahoney: Another look at Greek geometrical analysis, Archive for History of Exact Sciences, 5 (1968), pp. 318-48; E. Berti: L'analisi geometrica della tradizione euclidea e l'analitica di Aristotele. En G. Giannantoni, M. Vegetti, eds. : La scienza ellenistica, Napoli, 1984, pp. 95-127; W. R. Knorr: The Ancient Tradition of Geometric Problems, Boston/Basel/Stuttgart, 1986, pp. 339-81 en particular.

solución o de la proposición considerada -de ahí el relieve de la determinación de diorismos, al habérselas con problemas, o de la disponibilidad de definiciones, al tratar con teoremas. Aunque esta caracterización es un tanto genérica basta, creo, para poner en claro algunas diferencias que separan al método de Arquímedes del "análisis" ordinario. El método "mecánico":

1, no supone una proposición, sino que trata de hallarla;

2, no sirve para determinar condiciones efectivas, y menos aún convertibles, de la prueba o la convalidación sintética del resultado propuesto -no guarda ninguna relación, en principio, con la demostración canónica correspondiente; también carece de la virtud reductiva que a veces acompaña al intento de análisis;

3, emplea ciertos supuestos o hipótesis características (H1, H2), ajenas al cuerpo estándar de conocimientos geométricos.

Sin embargo, los dos métodos tienen un propósito heurístico, cuentan -como el "de hipótesis"- con un aire de "experimentación mental" y, en fin, pretenden suministrar unas pruebas plausibles. Pasemos a esta segunda dimensión del método "mecánico".

2.2. Prueba plausible versus demostración.

Los Elementos de Euclides muestran la existencia de un patrón de prueba matemática. Este patrón remite, en principio, a un orden más o menos sistemático de deducción en el que se distinguen unas proposiciones o asunciones primordiales, no sujetas a demostración, y un cuerpo de proposiciones derivadas o demostradas, de modo riguroso pero informal, directa o indirectamente a partir de las primeras. Este patrón incluye además una pauta relativamente característica de argumentación en la prueba concreta de una proposición.

Esta pauta o estructura externa comprende, según Proclo (In I Euc. Comm., 203.1 ss.) los pasos:

Prótasis: proposición o enunciado del objeto de prueba.

Ékthesis: exposición o presentación de un caso determinado sobre el que va a discurrir la prueba. Señales: introducción por medio de "**Sea (esto)...**"; letras -abreviaturas de designación.

Diorismós: delimitación o especificación del objeto de la prueba por referencia al caso expuesto. Señales: introducción por medio de "**Digo que (*légo hóti*)...**", en el caso de teoremas, o de "**Se debe construir (*deî dê systésasthai*)...**", en problemas (Este sentido de *diorismós* difiere del antes mencionado).

Katasteué: preparación o disposición de las construcciones o de las relaciones pertinentes para el desarrollo de la prueba.

Apódeixis: proceso demostrativo propiamente dicho, i.e. deducción de consecuencias sobre la base de la *kastaskeué* y de otros conocimientos previos, sean asunciones primordiales o sean resultados anteriormente establecidos.

Sympérasma: conclusión o aserción de la proposición probada. Señales: marca ilativa fuerte: "**Por lo tanto (*ára*)...**"; remates: Q.E.D. (*hóper édei deîxai*), en el caso de teoremas, y Q.E.F. (*hóper édei poîesthai*) en el caso de problemas.

Una ejemplificación cabal de esta pauta puede verse en la prop. 1 del libro I de los Elementos[12]. Pero no faltan indicios de su existencia antes de Euclides. Por ejemplo, Aristóteles no sólo testificaba ya el uso de letras-abreviatura en geometría (EN, 1132b5-9), sino que en ocasiones parecía atenerse a algunos de estos pasos -prótasis, ékthesis, apódeixis y remate final ("phanerón oûn <estí> hóti...")- en las pruebas de reducción de modos silogísticos (APO. , I, cc. 5-6, passim) y en el estudio de silogismos modales (Ibd., cc. 9-11, passim). Pero más ilustrativo

[12] Vid. Euclides: Elementos. I-IV. Madrid, 1991; pp. 201-2. En La trama..., IV & 3.1, pp. 344-55, se examinan ésta y otras muestras euclideas más complejas.

es el caso de Autólico de Pitania, un autor algo más joven que Euclides. En la prop. 1 de Sobre la esfera en movimiento, sin ir más lejos, sigue la pauta indicada sin mayor variación que la de fundir los pasos de kataskeué y apódeixis; en esta misma obra -el primer tratado matemático grirgo que hoy se conserva-, comparecen otras claúsulas formularias típicas del lenguaje matemático, e.g. en la referencia a proposiciones -pruebas- parejas (*"Del mismo modo demostraríamos -Homoios dè deixomen..."*) o en la reducción al absurdo *("Pues sea que no, si fuera posible....; lo cual es absurdo -mè gar, all'ei dynatón...; hóper <estín> átopon")*[13].

Según esto, las "proposiciones mecánicas" del Método se avienen, al menos externamente, a ciertos patrones convencionales de la prueba matemática. Arquímedes declara ciertas asunciones previas y, como ya he ido señalando en el curso de la proposición 1 sobre el área del segmento parabólico, también parece seguir la pauta ordinaria de argumentación. Entonces, ¿por qué carecen estas proposiciones del Método, de valor o de fuerza demostrativa?

Obviamente, porque su estructura interna acusa la intromisión de dos tipos principales de consideraciones o hipótesis:

H1. Hipótesis mecánicas propiamente dichas, "baricéntricas" en términos de Dijksterhuis, i.e. consistentes en nociones y proposiciones de estática acerca de centros de gravedad, palancas y condiciones de equilibrio.

H2. Hipótesis composicionales, "de indivisibles" en términos de Dijksterhuis, que envuelven la composición de áreas por cuerdas o líneas paralelas a una línea dada, y la de volúmenes por planos o secciones paralelas a una dada.

---

[13] Autolycos de Pitane: La sphère en mouvement. Levers et couchers héliaques. Testimonia. Edic. de G. Aujac. Paris, 1979.

En el Método, según se puede apreciar en la proposición que hemos visto al principio, el uso de **H2** parece integrarse de modo natural en el marco de **H1**, siendo la introducción de esta clase de consideraciones la que vendría marcada (*noeístho...*).

Los modernos comentadores y analistas del método de Arquímedes no sólo distinguen ambos tipos de carga "mecánica", sino que suelen considerarse obligados a un reparto de responsabilidades entre ellas. Veamos tres opciones características.

A. Opción Dijksterhuis -muy popular en la literatura secundaria.

Carga las tintas sobre **H2**. Aduce a su favor: **H1** podría estar avalada por la teoría estática del propio Arquímedes, en particular por Sobre el equilibrio de planos y/o sus tratados perdidos; por contra, la referencia a indivisibles toca un punto sensible y controvertido en la matemática griega[14], desde que las aporías de Zenón habían tenido una "intervención espectacular" en la evolución del pensamiento matemático hasta el punto de representar, quizás, el motivo más poderoso de "la famosa crisis de principios" (edic. c.., pp. 319-20); la idea de los indivisibles pese a ser una referencia desterrada del ámbito clásico de las publicaciones matemáticas griegas, no dejó de inspirar el trabajo efectivo de los matemáticos griegos como luego ocurrirá con frecuencia en tiempos posteriores. En definitiva, el caso de Arquímedes, indiferente al hecho de que **H2** sea "racionalmente insostenible", sería un ejemplo de la fecundidad de "modos

[14] I. Schneider, por su parte, sugiere cierta conexión entre lo "mecánico" y lo "material"; en el sentido de lo primero haría referencia a la constitución atomista de los cuerpos (o figuras), que sostienen algunas cosmologías o físicas coetáneas de Arquímedes, vid. Archimedes: Ingenieur, Naturwissenschafter und Mathematiker, Darmstadt, 1979, pp. 114-6. Un caso podría ser la concepción epicúrea, a la que algunos han llegado a atribuir, con harto entusiasmo, una especie de geometría "no-euclídea" fundada en un supuesto de no continuidad o no bisecabilidad indefinida.

irracionales de pensar incluso en la más racional de las ciencias" (p. 321).

No puedo discutir aquí algunos extremos de esta interpretación, más especultativos y "retroproyectivos" que documentados. Baste recordar que en Sobre la cuadratura..., 1-17, Arquímedes no empleaba supuestos composicionales del tipo **H2** y, sin embargo, ya marcaba la distinción entre una investigación mecánica y la convalidación ulterior por medio de la demostración geométrica.

B. Opción Knorr. La responsabilidad recae más bien sobre **H1**, aun cuando **H2** forma parte también del método "mecánico". Aduce en su favor: el recurso a **H1** viola la prioridad metódica reconocida de la geometría sobre la mecánica; el uso de **H2** puede considerarse como una simplificación sugerida precisamente por las técnicas geométricas de exhausción[15] -propuesta ligada a la cronología de Knorr del corpus arquimediano: las pruebas geométricas preceden a las licencias "mecánicas"; de ahí, por ejemplo, la separación entre las proposiciones 18-24 de Sobre la cuadratura... y 1-17, éstas últimas obra de un Arquímedes más autónomo y maduro.

Obran en contra de esta última sugerencia y de la cronología asociada las reiteradas declaraciones del propio Arquímedes sobre la anterioridad del hallazgo mecánico con respecto a la demostración -la secuencia *próteron/hysteron* tiene un sentido temporal que no se reduce a una mera convención del orden de exposición.

C. Opción Sato: La responsabilidad cae únicamente sobre **H1**[16]. Aduce en favor suyo: **H2** es una prueba puramente

[15] Knorr (1978), art. c., pp. 244-5, donde plantea la prueba se Sobre el equilibrio de planos, I, 9, como una muestra de la posible fuente de inspiración geométrica de la composición infinitesimal. Este recurso informal vendría a soslayar el uso de la habitual prueba indirecta por reducción al absurdo y habría sido sugerido por la subdivisión del paralelogramo considerado en paralelogramos congruentes.

geométrica y, por ende, considerada correcta (en todo caso, Arquímedes nunca dice que sea incorrecta cuando descalifica el método "mecánico"); por otro lado, en el Método, prop. 14, Arquímedes emplea la partícula inferencial "*oûn*" para introducir la idea de la composición, uso sintomático de su confianza en la corrección de la prueba; esta misma prop. 14, al ser de carácter puramente geométrico, no se corresponde con un proceder mecánico sino, más bien, con una suerte de simplificación de la demostración formal ofrecida en la prop. 15 -e.g. en una línea similar a la sugerida por Knorr-. En cambio, la incorrección de **H1** es obvia, dada su calidad de atentado a la prioridad de la geometría; no obstante, también podría fundarse en experimentos mecánicos llevados realmente a cabo por Arquímedes, teorizados en Sobre el equilibrio... y algún otro tratado mecánico hoy perdido (e.g.: *Tà mekhaniká*, del que probablemente también formaría parte *Isorropíai*).

Algunas referencias de Sato no son muy convincentes. Por un lado, Arquímedes tampoco asegura que la idea de la composición sea efectivamente correcta; en realidad, distingue entre la vía concluyente de la demostración y la vía plausible del método "mecánico", pero no marca una distinción entre dos posibles tipos de ingredientes **H1** y **H2**. Por otro lado, en el mismo Método, prop. 1, la cláusula *"Epeì oûn..."* introduce la apódeixis mecánica; la prop. 3 se remata con la abreviatura *"oi"*, i.e. "Q.E.D."; en fin, como ya hemos visto, la estructura externa de la argumentación mecánica viene a reproducir la pauta familiar demostrativa; pero nada de ésto se debe interpretar -al menos, a falta de mejores elementos de juicio- como una revisión incoherente de la idea que el propio Arquímedes había adelantado sobre el valor de prueba, solamente plausible, de su método

En mi opinión, los motivos que podrían concurrir -bien en Arquímedes mismo, bien por lo menos en su entorno- para atribuir

[16] Vid. su (1986-1987), art. c.; e.g., pp. 70-71.

una mera plausibilidad a las pruebas "mecánicas", son de diverso orden y se concretarían en los siguientes:

a) Motivos de orden conceptual. En particular, la referencia a una composición posiblemente infinitesimal de figuras y sólidos. Aparte de su corrección o incorrección -sobre las que no hay un pronunciamiento específico por parte de Arquímedes-, aparte de la discusión tradicional en torno a los indivisibles -cuyo influjo en la concepción arquimediana no tiene apoyo documental expreso-, aparte de su origen heurístico -puede tratarse de una inspiración puramente geométrica, como sugiere Knorr, pero a mi juicio se trataría más bien de una inspiración mixta, geométrica y mecánica, a la luz de la misma prop. 9 de Sobre el equilibrio del planos, I, o de su integración sin cesura en la argumentación del Método, lo cierto es que carece de cobertura, elaboración o justificación teórica en el corpus arquimediano conocido -a diferencia de las hipótesis baricéntricas, **H1**-. Así pues, tiene todos los visos de una extrapolación informal.

b) Motivos de orden metódico institucional. Se trata de un procedimiento que discurre sustancialmente, por su estructura interna, al margen del patrón alejandrino de prueba matemática. En este marco institucional helenístico, la geometría es:

1. Una "ciencia" autónoma y autosuficiente, caracterizada por un género o un dominio de objetos propio. La introducción de otras consideraciones ajenas (esp. **H1**) en sus pruebas supone atentar contra la homogeneidad y congruencia de sus demostraciones[17].

2. Una disciplina básica, en el amplio campo de las matemáticas griegas, y prioritaria con respecto a la mecánica[18].

[17] Vid. las condiciones aristotélicas de distinción de una "ciencia" por su género propio, APo. 87a38-87b1, y de congruencia demostrativa, APo. 75b38-76a25, 87b1-4.

[18] Recuérdese, por ejemplo, la idea tradicional -al menos desde Aristóteles- de que la geometría sólo considera la magnitud mientras que la mecánica ha de considerar tanto la magnitud como el peso. Ésta es, por ende, una disciplina aplicada o

3. El paradigma de la "ciencia" demostrativa conforme al modelo euclídeo[19]. Según esto, las violaciones de los puntos 1. y 2. violarían, en último término, la idea misma de demostración rigurosa. (Ésta ha de ser una explicación que hace saber de modo concluyente y por razones intrínsecas -no una simple manera de dar con una creencia acertada o una proposición verdadera.)

c) Motivos de orden lógico y metodológico.

c1. En el caso de **H1**, riesgo de circularidad en la prueba a la luz de la consideración de la geometría como disciplina básica y la mecánica como disciplina subordinada, y en razón de los usos establecidos en la teorización mecánica sobre bases geométricas.

c2. En el caso de **H2**, cierto aire de "experimentación mental", geométrico-mecánica, tal vez en la línea sugerida por Heath de concebir las líneas como bandas indefinidamente estrechas y los planos como láminas indefinidamente finas[20].

Contemplada con ojos de hoy, la argumentación "mecánica" de Arquímedes podría tener alguna otra virtud y algún otro defecto quizás no sospechados por su autor. Por ejemplo, en los tiempos modernos habituados a la teorización físico-matemática, carecen de relieve la distinción y la jerarquización antiguas entre geometría y mecánica; de modo que la contribución de **H1** puede ser rigorizable[21] -mediante la explicitación cabal de los supuestos de una mecánica arquimediana- y puede no desvirtuar, en nuestro medio, el valor o la fuerza demostrativa de una prueba. Dicho de

---

subordinada cuyo desarrollo se funda -en parte al menos- sobre la primera.

[19] Pueden verse detalles al respecto en el ya citado La trama de la demostración, IV & 4.1, pp. 386-393.

[20] Vid. e.g. T.L. Heath (1921): A History of Greek Mathematics, New York, 1981; II, p. 30.

[21] Dada una prueba de corte deductivo, entiendo que es rigorizable si hay una demostración correlativa capaz de explicar su valor real o virtual como prueba, bien en el sentido de mostrar o refinar su estructura lógica, bien en el sentido de explicitar o articular su estrategia teórica, bien en todos estos sentidos. Un precedente de esta idea puede verse en Ph. Kitcher: The Nature of Mathematical Knowledge, New York/Oxford, 1983, pp. 213 ss.

otro modo, una argumentación mecánica en términos de **H1** (como en la desarrollada en Sobre la cuadratura..., 1-17) no diferiría esencialmente, en punto a rigor informal, de la argumentación canónica desarrollada en tratados como los que versan Sobre el equilibrio de los planos, o Sobre los cuerpos flotantes[22].

El caso de **H2** es más complicado. Apurando las cosas, cabe suponer que el medio geométrico griego no sería parejamente rigorizable (al modo de **H1**). Por un lado, podemos considerar que la asunción 5 de Arquímedes en Sobre la esfera... extiende el criterio euclídeo de razón entre magnitudes (Elem. V, def. 4) postulando que si dos magnitudes guardan entre sí una razón conforme a ese criterio, su diferencia también guardará una razón en el mismo sentido con cualquier otra magnitud homogénea[23]

Pero ésto puede entenderse de manera que la diferencia entre dos líneas sea siempre una línea y no un punto, la diferencia entre dos superficies sea siempre una superficie y no una línea, la diferencia entre dos sólidos sea siempre un sólido y no una superficie. Por otro lado, no hay datos de que los griegos llegaran a disponer de una geometría alternativa de indivisibles o "infinitésimos". En fin, alguna de las intuiciones en este sentido también podía prestarse a error (como mostró Cavalieri o como

[22] A pesar de su empeño sistemático y de su ortodoxia metodológica, Sobre el equilibrio... I se muestra hoy como un tratado axiomáticamente deficiente en nociones y operaciones básicas como el centro de gravedad y la medición conjunta de pesos y distancias. Vid. P. Suppes: Limitations of the axiomatic method in ancient Greek mathematical sciences, en J. Hintikka et al., eds.: Pisa Conference Proceedings, Dordrecht/Boston, 1980; I , pp. 197-213. Por otra parte, en Sobre cuerpos flotantes, I y II, no menos ortodoxo en el ámbito matemático griego, Arquímedes adopta indiferentemente supuestos de la dinámica aristotélica (en I) y de su propia cinemática geométrica (en II), no fácilmente conciliables. Podría ser un signo más de la irrelevancia que algunas de las discusiones filosóficas tenían en medios matemáticos.

[23] Según la asunción 5 de Arquímedes: "de líneas desiguales, superficies desiguales y sólidos desiguales, el mayor excede al menor por una magnitud que, añadida a sí misma, puede exceder a cualquier otra dada del mismo género". Según la def. 4 del libro V de los Elementos, "se dice que guardan una razón entre sí las magnitudes que, al ser multiplicadas, una de ellas puede exceder a la otra".

cabría mostrar al traducirla en términos de intervalos de números reales).

Sin embargo, otras de esas intuiciones no sólo fueron luego susceptibles de desarrollo en los términos del cálculo infinitesimal, sino que actualmente han hallado una justificación -o una rigorización- lógica en el llamado "análisis no estándar". Pero todo esto ya no sería El Método de Arquímedes sino otra historia.

En todo caso, a despecho de algunos maníacos de la racionalidad o de la irracionalidad de la ciencia, creo que Arquímedes se habría llevado una sorpresa si alguien le hubiera dicho que su método "mecánico" era un invento enteramente gratuito y, para colmo, irracional. De haber sido así, no lo habría expuesto ni recomendado. En realidad, venía a ser un fruto casi "natural" de ese peculiar talante investigador de Arquímedes que luego le ha valido el pasar por "antecesor" de la física matemática clásica.

Contexto &4.2 - 9.3.89

ARQUÍMEDES

ORDEN CRONOLÓGICO

Heiberg, Zeuthen, Heath.....	Knorr (178)
Equilibrio de planos I	A. *Medida del círculo*
Cuadratura de la parábola	*Arenario*
Equilibrio de planos II	*Cuad. parábola, 18-24*
Método	*Equil. planos I, II*
Esfera y cilindro I, II	B. *Cuad. parábola, 4-17*
Espirales	*Esfera y cilindro I, II*
Conoides y esferoides	*Espirales*
Cuerpos flotantes I, II	*Conoides y esferoides*

Medida del círculo	*(¿Equlibrios -perdido?)*
Arenario	*Cuerpos flotantes I, II*
Frag. -miscel. problemas (?)	*Método*

Sato (187) : A/ Medida....., Arenario, Cuadratura... (1-24)
C/ *Cuerpos flotantes I, II, Método*
B/ *Restantes.*

Proposiciones del Método

Determinaciones de:	Correspondencias:
(Asunciones previas	Equilibrios planos I,4,5,8,10,14; II, 2,5. Con. y esf., 1.)
1. Área de segm. parabólico	*Cuad. par..* 1-15 mét.mecánico/ 16-17 + exh./ 18-24 dem. geom.
2. Volumen de la esfera	*Esfera y cilindro I, 34.*
3. Volumen de esferoide	*Conoides y esferoides*, 27.
4. Vol. segm. de parabolide	*Conoides y esferoides* 21
5. Centro de grav. segm. parabol.	No hay. (Asumido en CF II,2)
6. Centro grav. hemisferio	No hay.
7. Vol. segm. esférico	*Esfera y cilindro II*, 2.
8* Vol. segm. de esferoide	*Conoides y esferoides, 29,31.*
9. Centro grav. segm. esférico	No hay
10*Centro grav. segm. esferoide	No hay
11*Vol. segm. de hiperboloide Centro grav. segm hiperb.	*Conoides y esferoides*, 25. No hay
12-15. Volumen de un segmento del cilindro	Resultado anunciado en Prefac. 12-14 m. mecán./ dem. geom.
(¿En los casos 5,6,9,10*,11*	los presuntos Ισορροπίαι o τὰ Μηχανικά?)