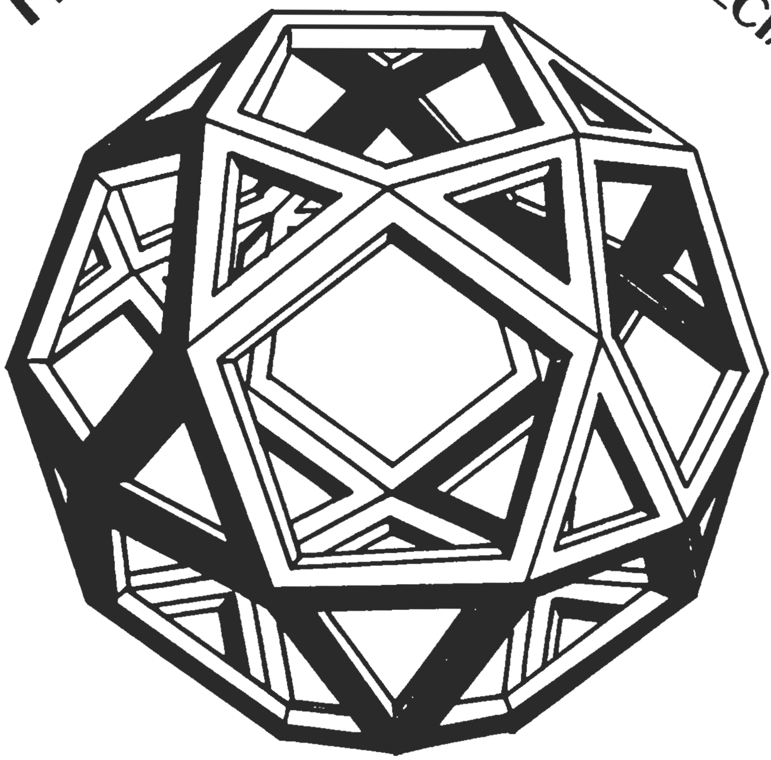
Aplicaciones Mecánicas de la Geometría.

Física y Geometría en Grecia



Miguel Hernándes González.
Profesor de Física.
I.B. la Orotava.

A fin de deshacer equívocos, convendría precisar cuales son las diferencias y las analogías que existen entre lo que podríamos catalogar como Física en Grecia y lo que ahora denominamos con ese nombre.

El carácter de la ciencia moderna puede definirse de un modo preciso y sin ambigüedades.

En lo que se refiere al método, por una interacción entre la inducción y la deducción, de las que forman parte sustancial el uso del experimento y del lenguaje especializado de la Matemática.

En lo que se refiere a su propósito, por una conjunción de comprensión y conquista de la Naturaleza que producen una simbiosis de conocimiento "desinteresado" y aplicación técnica.

En Grecia, en cambio, tanto el método como el propósito o los objetivos de la Ciencia tuvieron un carácter marcadamente distinto.

Los griegos no hicieron experimentos sistemáticos, de modo que la inducción se vió limitada a la observación y a la recolección de material tal como aparece en el mundo natural. Se trata pues de una inducción primitiva. Tampoco la deducción aparece, desde cánones modernos, muy desarrollada si se tiene en cuenta que carecía de lo que Kant consideraba esencial en cualquier ciencia verdadera:" *La matematización de sus conceptos fundamentales y la deducción de hechos a partir de leyes expresadas en términos de fórmulas matemáticas*".

Por otra parte, la ciencia griega no aspira al control y conquista de la Naturaleza y por ello no aparecen acentuados los aspectos manipulativos. Sólo la curiosidad intelectual espolea la investigación sobre el mundo natural, y su Física, de grandes preguntas y de osadas respuestas, no acierta a ser en la mayor parte de los casos otra cosa que Filosofía.

La tecnología no encuentra un lugar muy definido y no se produce esa sintesis de conocimiento puro y aplicación práctica que está en la base de la ciencia moderna.

Pese a ello el pensamiento científico griego nos resulta próximo, familiar, y a lo largo de su articulación y consolidación encontramos en mayor o menor medida:

a) Una explicación del mundo fenoménico desde el ámbito de lo natural. Se afianza el Logos frente al Mito.

b) La adopción de una perspectiva explicativa unificadora. La búsqueda de la sustancia primordial.

c) El uso de consideraciones de simetría.

d) El empleo de modelos mecánicos. La utilización de la analogía.

e) La reducción de las cualidades a cantidad.

f) Distinción entre materia y fuerza e introducción paulatina de una noción de causa cada vez más depurada.

Teorías físicas en Grecia

A fin de presentar una panorámica sintética, inevitablemente incompleta y simplista, sobre las características esenciales de la Ciencia Griega, vamos a señalar los rasgos más relevantes de dos teorías físicas que corrieron suerte diversa a lo largo de los tiempos,- el atomismo y la física aristotélica-, pero cuya influencia en ellos es innegable.

Atomismo (Leucipo, Demócrito Epicuro y Lucrecio):

"Leucipo y su colega Demócrito dicen que lo pleno y lo vacío son elementos, y los llaman, respectivamente, 'ser' y 'no ser' lo pleno y sólido es el ser, lo vacío y raro el no ser. Por lo cual dicen también que lo que no es existe exactamente igual que lo que es, porque el vacío no existe tampoco en menor medida que el cuerpo. Estos son las causas materiales de las cosas, y, del mismo modo que los que afirman que la sustancia subyacente es una y que todo lo demás es resultado de sus afecciones, así también dicen ambos que las diferencias (de los átomos) son causas de todo lo demás. Estas diferencias, según ellos son tres: forma (o figura), orden (o disposición) y posición, ya que dicen que los seres difieren en "proporción", "contacto" y "trasposición"... Por ejemplo, la A difiere de la N por la forma;

AN de NA por el orden y Z de N por la posición". Aristóteles (Metafísica)

"Se diferencian por sus formas, pero su sustancia es una, como si cada uno fuese por separado una pepita de oro" Aristóteles (Del cielo)

"Nada puede ser creado de la nada, ni puede ser destruido y reducido a nada"
"Nada sucede por azar; todo ocurre de acuerdo a razón y por necesidad".
"Todas las cosas se generan por la unión y la combinación de las magnitudes primarias. En cierto modo esos pensadores están diciendo que todo cuanto existe son números o derivados de números". Aristóteles

"Están equivocados, y no aciertan a manifestar la necesidad causal, quienes dicen que las cosas han acontecido siempre así y piensan que esto explica su origen. Así, Demócrito de Abdera dice que no existe principio de lo infinito, que una causa es un origen y lo que es eterno es infinito; preguntar, en consecuencia, "¿por qué?" es semejante a buscarle un origen a lo infinito" Aristóteles (Física).

Las tesis fundamentales de esta doctrina serían por tanto:

1.- Sólo existen los átomos y el vacío.

2.- Los átomos están desde siempre en perpetuo movimiento en el vacío.

3.- Nada puede ser creado de la nada, ni puede ser destruido y reducido a nada.

4.- Todo ocurre de acuerdo a razón y por necesidad; nada sucede por azar.

Se subraya la idea de que la Naturaleza está sometida a la ley y que una de esas leyes es *"la ley de conservación de la materia".*

5.- Lo cualitativo (las propiedades macroscópicas de la materia) se explican en términos de lo cuantitativo.

6.- El número de átomos y la extensión (temporal y espacial) del Universo son infinitos.

En el atomismo aparece prefigurada una distinción entre el plenum material y el espacio desocupado e inactivo. La diversidad cualitativa no procede de él sino de las varias posiciones, formas y movimientos de la materia. La causalidad atomista es puramente mecánica.

Como señaló el mismo Aristóteles, el sustrato del atomismo es cuantificable, es decir, matematizable.

Sobre la Física aristotélica.

Ponencias anteriores dedicadas a este filósofo nos eximen de mayores precisiones sobre los temas que a continuación apuntamos.

-Sólo es posible desarrollar ciencia sobre universales.

-Aristóteles procede en sus trabajos a revalorizar la noción de empiria como fuente del conocimiento. Proceso de inducción que, desde enunciados particulares, llega a enunciados generales.

-Los enunciados generales se usan como premisas para obtener deducciones (Silogística).

-Elabora un incipiente, pero no por ello despreciable, sistema deductivo que va a influir poderosamente en Euclides entre otros.

-Se sabe, cuando se conoce la causa primera, cuando podemos dar cuenta de sus cómo y por qué.

-Desarrollo de la noción de causa. La causa final como causa esencial. Teleología y finalismo

-La Física se ocupa de seres que tienen una existencia separada pero no son inmutables; es decir, de "cuerpos naturales" que tienen en sí una fuente de movimiento o reposo. Se diferencia claramente de la Matemática y de la Ciencia primera o Metafísica.

-El movimiento es el tema central de la Física y para ello es necesario desarrollar una teoría sobre la sustancia, sobre los conceptos de Materia, Forma y privación de la Forma, así como perfilar la noción de potencialidad y actualidad.

En todo cambio, la materia permanece pero una cierta determinación de esta materia, que se halla realizada de un modo actual, va a perecer, mientras que una determinación contraria que no estaba sino en potencia, va a adquirir existencia actual.

"El movimiento es la actualización de lo potencial en tanto que potencial".

-El Cosmos aristotélico es un plenum, el vacío no existe.

-Un Cosmos activo: el espacio está estructurado y en él existen "lugares naturales".

-Hay una escisión entre lo supra y lo sublunar en un Cosmos finito.

-Hay una ligazón entre los cuerpos simples y los movimientos naturales (rectas y círculos).

-Movimientos naturales y movimientos violentos.

-La dinámica aristotélica: " Todo movimiento, local o no, necesita un motor. La materia, en potencia de una cierta forma, está privada de ella y la desea, pero no puede suministrársela ella misma; la debe recibir por la acción de otro ser donde una forma de la misma especie se encuentra ya en acto; este ser es el Motor".

Rasgos distintivos de la Matemática Griega

Conviene aquí reseñar los rasgos definitorios de la matemática griega para así poder abordar, más tarde, el tema central de nuestra ponencia: ¿qué se matematizó en la ciencia griega?.

-La matemática griega es fundamentalmente Geometría.

a) Predominio de lo visual.

b) La civilización griega está dominada por el ideal de belleza, por la noción de armonía. El imperio de la forma conduce al culto de la figura y más en concreto al culto de las figuras simples (una geometría de "regla y compás").

c) La geometría permite "obviar" el problema de los incomensurables.

-Se articula paulatinamente como sistema deductivo elaborando una, cada vez más sofisticada, técnica de la demostración. Desde lo visual al discurso axiomático-deductivo pasando por las demostraciones por reducción al absurdo. El canon euclídeo.

-La formalización de la aritmética es mínima.

a) Notación simbólica inadecuada (inexistencia del cero, notación no posicional,etc.)

b) Carácter logístico, práctico

c) El problema de los incomensurables.

-La noción de medida,- básica en ciencia-, se articula sobre la teoría de las proporciones de Eudoxo que sólo contempla la razón entre magnitudes homogéneas, de modo que sólo puede aprehenderse matemáticamente lo estático, lo "fijo".

La Matematización del Mundo Físico

El recorrido anterior por la física y la matemática griegas nos permite abordar ahora el complejo problema de las relaciones entre ambas y entender, quizás, los obstáculos que impidieron su interfecundación.

El nivel de desarrollo de la matemática griega aparece mediatizado:

a) Por el concepto de razón, proporción, entre magnitudes homogéneas y por la indefinición de producto de magnitudes.

b) Por su carácter eminentemente formal (geométrico) y su ausencia de simbolismo aritmético.

Estos dos factores condujeron respectivamente a:

a) Imposibilidad de "captar" lo móvil.

b) Olvido de lo material que no es aprehendido como cúmulo de propiedades cuantificables a las que puede adscribírseles un número sobre una escala

Por otra parte, la visión dominante de la física griega (el Aristotelismo) aparece lastrada por la teleología (paradigma biológico).

Esta influencia generó:

a) Una preponderancia de las causas finales frente a las causas eficientes como factor explicativo de un fenómeno (¿por qué? versus ¿cómo?).

b) Rechazo de la manipulación de la Naturaleza, resistencia a descomponer un todo en sus partes porque así se desvirtúa ese todo.

c) Minusvaloración de lo mecánico frente a lo natural (papel subsidiario de la tecnología).

A estos factores conviene añadir la reflexión que ya hicimos en nuestra ponencia anterior y que aquí resumimos:

El espacio matemático que subyace en la Geometría de los Elementos de Euclides se desprende de sus postulados: *"La continuidad del espacio está implícita en el primer postulado, que requiere la posibilidad de trazar una línea recta entre dos puntos cualesquiera; la carencia de límites está implícita en el segundo postulado, según el cual siempre es posible extender todo segmento recto; el tercero, que elimina toda restricción sobre el tamaño del círculo, requiere tanto la continuidad como la infinitud del espacio, mientras que el cuarto, afirmando la igualdad de todos los ángulos rectos es una consecuencia del principio de la invariabilidad de las figuras, que de nuevo equivale a la homogeneidad del espacio. El quinto, y más famoso, postulado puede ser sustituido por su equivalente lógico que admite la posibilidad de construir figuras similares en cualquier escala de magnitud"*. La homogeneidad así como la infinitud son rasgos sustanciales del espacio de Euclides.

El espacio físico griego no es único: homogéneo e infinito para los atomistas y heterogéneo y finito para Aristóteles.

Una matematización completa del mundo físico,- usando el aparato linguístico euclídeo-, exige al espacio físico características similares a las que el espacio matemático soporte de ese aparato linguístico posee: homogeneidad e infinitud. De ahí que el mundo físico de Aristóteles sea difícilmente matematizable en su conjunto usando, hasta sus últimas consecuencias, el lenguaje de la Geometría de Euclídes. Tal matematización del mundo físico sólo será posible en el espacio newtoniano que redescubre el concepto de receptáculo infinito e inactivo de los atomistas.

No es cierto, sin embargo, que no existieran en la Ciencia Griega intentos de matematizar parcelas del mundo natural y que no podamos hablar, en cierto sentido, de Matemática Aplicada. Todo un conjunto de hechos así lo prueba. No obstante esta Matemática tiene, incluso cuando se refiere a movimientos (en Astronomía), un carácter eminentemente estático.

Estos intentos son perceptibles sobre todo durante la época helenística que se extiende desde la muerte de Alejandro (323 a.C) hasta el fin oficial del Imperio de Occidente en el año 476 con el que termina la Antiguedad.

Pese a las convulsiones económicas, sociales y culturales del período, la actividad científica se caracterizó por una serie de notas permanentes que le aseguraron continuidad y coherencia. Entre ellas cabe distinguir, por su relevancia, la existencia de una sede central, Alejandría, desde la que se continuó ejerciendo una actividad y una influencia científica continuada.

El Museo, una especie de Instituto académico de investigación, se convirtió en una cantera de hombres de ciencia y estimuló la creación de otros centros en los demás reinos helenísticos: Pela (Macedonia), Antioquía (Siria), Pérgamo (Asia Menor), etc.

Se consolidó así una comunidad científica que, bajo la influencia de la concepción peripatética, cultivó las diferentes disciplinas en las que Aristóteles había clasificado las ciencias y acentuó los aspectos observacionales y concretos de cada fenómeno en detrimento de las especulaciones globalizadoras. Se parceló el conocimiento y el estudio ganó en profundidad.

La fusión de la Matemática con las Ciencias de la Naturaleza durante este periodo es, como no podía ser de otro modo, incompleta, asistemática.

A las razones internas que ya hemos mencionado en relación con el movimiento se añaden las que provienen de los propios valores de la sociedad griega: el menosprecio por el trabajo manual, por la técnica, queda perfectamente ejemplificado en un fragmento del diálogo platónico Gorgias *"... Pero tú lo desprecias (al técnico) y a su arte, y lo llamarías enseguida constructor de máquinas y no querrías dar tu hija para su hijo, ni desearías tomar la suya para tu hijo".*

El trabajo del técnico no poseía reconocimiento social por una doble razón. Por un lado, su actividad,- la construcción de máquinas-, era conceptuada como contraria a la Naturaleza (la palabra Mecánica proviene del griego *mechanaomai* que viene a significar "urdo una treta") y, por otro, su función de aligeradora del trabajo humano o de aumento de la productividad poseía una importancia menor en una sociedad esclavista como la griega en la que el número de esclavos superaba ampliamente a la población libre. La utilidad de la máquina era así, "discutible" e incluso "desestabilizadora".

Este menosprecio por la técnica impregna la propia autoestima de algunos de los más grandes ingenieros de la antiguedad y así Plutarco nos dice que Arquímedes consideraba sus trabajos técnicos como *" subproductos de una geometría infantil"* y que conceptuaba *"la construcción de instrumentos y, en general, toda aquella actividad que se dirige a fines prácticos, como baja y plebeya".*

Cuando se habla de la "nueva Física", aquella que iba a dotar de textura a la Revolución Científica, suele acudirse a un texto de Galileo quien en "Il Saggiatore" afirma: *" La filosofía está escrita en ese grandísimo libro que tenemos abierto ante los ojos, quiero decir, el Universo, pero no se puede entender si antes no se aprende a entender la lengua, a conocer los caracteres en los que* *está escrito. Está escrito en lenguaje matemático y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es imposible entender ni una palabra; sin ellos es como girar vanamente en un oscuro laberinto".*

Morris Kline, de un modo sintético, afirma que las formas geométricas,- aquellas que el filósofo griego Aristipo consideraba como *"trazas de civilización"* -, son sugeridas al hombre por el mundo material que lo rodea, por los objetos físicos y que los griegos, a diferencia de los egipcios y babilonios, fueron capaces de abstraerlas, de idealizarlas considerándolas como el más preciado objeto de estudio.

¿Qué dificultó la reinversión desde el estudio de las formas a su utilización para entender el mundo natural? ¿por qué no se produjo el reencuentro de la matemática con el mundo físico en la Grecia Clásica?.

Ya hemos apuntado más arriba algunas de las razones que a nuestro juicio pueden permitirnos atisbar una respuesta.

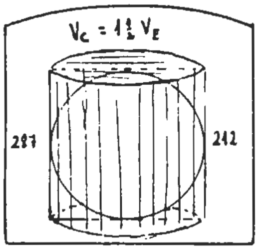
A ellas añadiremos que el reencuentro entre el mundo natural y la matemática exige una nueva visión de la naturaleza a la que debe observarse no como un organismo que no debe manipularse.

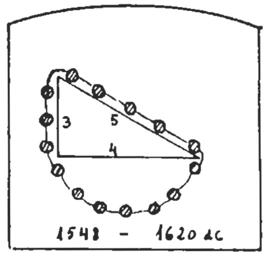
Ese reencuentro no es posible entenderlo sin el celestinaje de la técnica, del artificio, de la manipulación de la naturaleza. A ello se opusieron los griegos con vehemencia.

Resulta bastante ilustrativo, para conocer la mentalidad humana, leer en las lápidas del cementerio los epitafios allí grabados. Perpetúan aquello por lo que nos gustaría ser recordados por nuestros deudos o por la posteridad (a veces también resumen nuestro sentido del humor o nuestro talante melodramático).

Arquímedes y Stevin ordenaron grabar lo que, de su obra, merecía ser recordado por la comunidad científica.

Para el primero la belleza que sintetiza la relación geométrica existente entre el volumen del cilindro y el de la esfera inscrita.





El segundo, hijo de un tiempo más "práctico", exalta el principio que explica la acción de una de las máquinas denominadas "grandes" desde la Antiguedad: la tracción de los tres pesos colgantes equilibra la de los cinco que se apoyan sobre el plano inclinado.

Entre un epitafio y otro media una profunda y radical mutación en el modo de **ver el mundo.**

Mecánica

Los filósofos de la Antiguedad llamaban "las cinco grandes" a las máquinas simples siguientes: **el plano inclinado, la cuña, el tornillo, la palanca y la rueda.**

El primero que, al parecer, inició la sistematización de esas máquinas simples fue Arquímedes. Herón, en un libro titulado "Mecánica", estudia exhaustivamente el plano inclinado y trata de fundamentar esas máquinas simples en el principio de la palanca, apareciendo también un antecedente de lo que ahora denominamos Principio de los Trabajos virtuales.

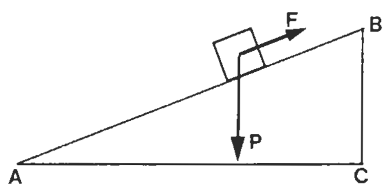
Estos matemáticos, físicos e ingenieros aplicaron la Geometría a una rama de la Física,- la Mecánica-, y mostraron que en todas esas máquinas subyacen principios comunes. Podría pues afirmarse que nos encontramos ante uno de los primeros casos de unificación explicativa de fenómenos aparentemente diversos mediante una misma formulación matemática.

Arquímedes parece ser también el inventor de la polea compuesta (polipasto),- *"un aparato para aumentar la fuerza de* *tracción o elevación"* -, y en cuya base está, al igual que en las otras máquinas simples, lo que más tarde se denominará Regla de Oro de la Mecánica que enseña que *" es posible reducir a voluntad el esfuerzo que debe aplicarse para mover un peso dado siempre que uno se tome la molestia de incrementar proporcionalmente la distancia a través de la cual se ejerce ese esfuerzo"*.

Es justamente este principio el que dota a la Mecánica de su carácter aparentemente antinatural y el que permite conceptuarla como *"uso de una treta"*.

Ilustraremos lo dicho, analizando el fundamento de estas máquinas simples.

El plano inclinado

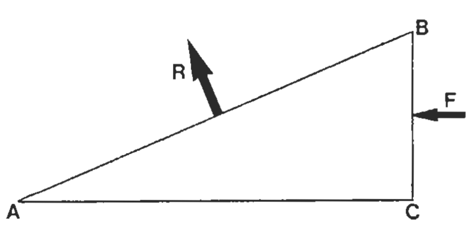


Desde tiempo inmemorial se sabe que la utilización de un plano inclinado reduce el esfuerzo (la fuerza) necesario para elevar objetos: un ejemplo espectacular lo encontramos en el proceso de construcción de las pirámides.

El trabajo realizado por F (fuerza que compensa exactamente a la componente de P a lo largo del plano inclinado) en el recorrido AB se utiliza en elevar la resistencia P la altura BC. Se verificará por tanto:

$$F : P = BC : AB$$

La cuña



Múltiples son también las aplicaciones de la cuña como elemento cortante en cuchillos, hachas, tijeras, llaves y cerraduras o en arados.

En este dispositivo el esfuerzo aplicado linealmente se transforma en otro lateral de mayor intensidad que permite separar dos superficies.

Suponiendo un tipo simple de cuña, como el que indica la figura, que podríamos imaginar como un plano inclinado móvil puede obtenerse con facilidad la expresión idealizada siguiente:

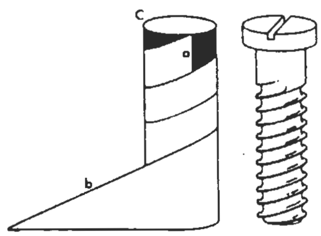
$$F:R = BC:AB$$

Sin más que imponer la igualdad entre Trabajo de penetración y de separación.

$$F x AC = R_{BC} x BC$$

El tornillo

El tornillo puede conceptuarse como un plano inclinado arrollado en un cilindro y su acción, explicarse en términos similares a los de la cuña: como un plano inclinado móvil que convierte la energía de desplazamiento del plano inclinado (un giro en este caso) en energía de elevación o compresión.



Su uso en las prensas de aceite y vino viene atestiguado por las descripciones de Herón.

La relación que se cumpliría en este caso sería:

$$F : R = h : 2\pi r$$

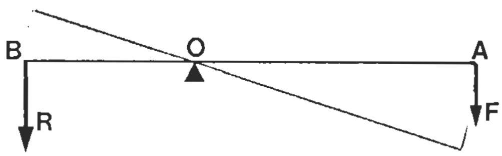
siendo h el paso de rosca y r el radio del tornillo

La palanca

Múltiples son los dispositivos conocidos desde tiempo inmemorial que hacen uso de palancas de uno u otro género: balanzas, tijeras, el cigoñal egipcio para extraer agua de un pozo, prensas etc.

La "ventaja mecánica" de la palanca fue demostrada por Arquímedes utilizando consideraciones de equilibrio (esa demostración la damos posteriormente al analizar su tratado sobre Estática).

Hay otro análisis atribuido erróneamente a Aristóteles en el que se utilizan consideraciones que en cierto sentido prefiguran el Principio de los Trabajos virtuales.



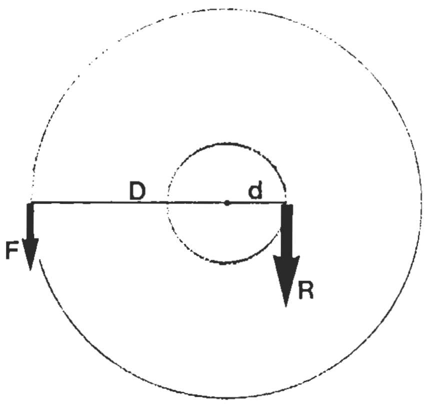
Si imaginamos la acción de F en A y la resistencia R en B, el trabajo realizado por F al rotar el punto A en torno al fulcro O se utiliza en elevar la resistencia, es decir, uno se convierte en el otro.

Se cumplirá pues, para desplazamientos pequeños:

$$F : R = OB : OA$$

La rueda

El impacto que la rueda ha tenido sobre el curso de la civilización ha sido enfatizado en multitud de ocasiones y en numerosos trabajos y ensayos.



Su conceptuación como palanca de un sólo brazo es, como tantas otras cosas, fruto de la agudeza intelectual de los griegos. Un ejemplo claro de la actuación de la rueda como palanca lo encontramos en la cabria, dispositivo mediante el cual la fuerza aplicada a la rueda (parte externa) se multiplica en el eje.

Las ruedas hidráulicas de los molinos hacen uso de estos principios multiplicadores del esfuerzo.

Al igual que en los casos anteriores, el trabajo ejercido sobre la parte externa de la rueda se utiliza en la rotación del eje de forma que se verificará:

$$F{:}R = D{:}d$$

Sobre el equilibrio: Estática

La relación establecida por Arquímedes entre Matemáticas y Física es especialmente significativa en el campo de la Estática, del equilibrio, así como enormemente fructífera tanto para ésta ciencia como para aquella (¡recordemos el uso que, del concepto de equilibrio, hace en el Método!).

En el tratado que nos ocupa, establece los principios fundamentales de la Estática por medio de métodos geométricos en su más estricto sentido.

Su estructura es ortodoxa e incluye, en el Libro I, 7 Postulados a partir de los cuales deduce 15 Proposiciones entre las que destacan la 6ª y la 7ª donde se demuestra que: " *Dos magnitudes, comensurables o nó, están en equilibrio a distancias recíprocamente proporcionales a los pesos* ".

Postulados:

1.- Pesos iguales a distancias iguales están en equilibrio, en tanto que pesos iguales a distancial desiguales no lo están, desnivelándose hacia el peso que está a mayor distancia.

2.- Si, cuando pesos a unas ciertas distancias están en equilibrio, se añade algo a uno de ellos, dejan de estar en equilibrio desnivelándose hacia el peso al que se ha añadido algo.

3.- Si, de modo similar, se quita algo de uno de los pesos, el equilibrio no subsiste desnivelándose hacia el peso al que no se le ha quitado nada.

4.- Cuando se hacen coincidir figuras similares e iguales, sus centros de gravedad coinciden.

5.- En figuras similares desiguales, los centros de gravedad están "situados similarmente".

6.- Si magnitudes a ciertas distancias están en equilibrio, otras magnitudes iguales a ellas también estarán en equilibrio a las mismas distancias.

7.- En cualquier figura cuyo perímetro sea cóncavo en la misma dirección, el centro de gravedad debe estar dentro de la figura.

La idea que guía el contenido de estos postulados es la de simetría.

Proposición VI

"Magnitudes comensurables están en equilibrio a distancias reciprocamente proporcionales a los pesos".

Esta proposición no es otra cosa que el Principio de la Palanca basado en el cual se le atribuye a Arquímedes la famosa frase: *" Dadme un punto de apoyo y moveré la Tierra".*

Sean las magnitudes comensurables A y B y una distancia dada ED en la que puede encontrarse un punto G que verifica:

$$DG:GE = A:B$$

Hay que probar que G es el centro de gravedad de la magnitud compuesta de A y B. (Ser el centro de gravedad implica que apoyada la palanca en G estará en equilibrio).

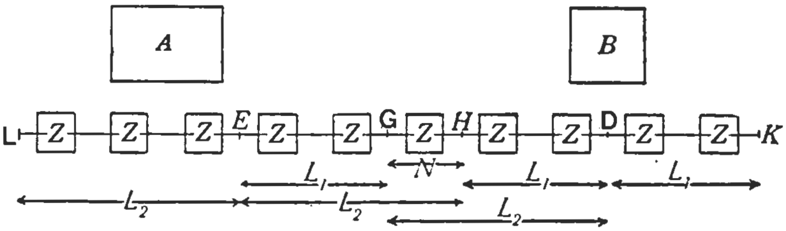
Como A y B son comensurables también lo serán DG y GE. Sea N una medida común de estas distancias (DG = n'N y GE = m'N).

Hacemos DH = DK = EG

y EL = DG

$$EH=EG+GH = DH+HG = DG$$
$$HL=HE+EL = DG+DG = 2DG$$
$$HK=HD+DK = 2EG \qquad A:B = HL:HK$$

$$HL=nN \text{ y } HK=mN$$
$$A=nZ \text{ y } B=mZ$$
m y n son pares



Sea ahora la magnitud Z tal que está contenida en A tantas veces como N está contenida en HL y tantas veces en B como N lo está en HK.

Dividamos HL y HK en partes iguales N y A y B en partes iguales Z. Coloquemos sobre cada segmento lineal N una magnitud Z de foma que en cada caso el centro de gravedad de Z esté sobre el punto medio de N; en estas condiciones, el centro de gravedad de todas las magnitudes Z colocadas sobre la parte HL estarán en E, mientras que las ubicadas sobre la parte HK lo tendrán en D. Ello implica que A estará en E y B en D y como hay un conjunto de magnitudes iguales sobre una línea recta cuyos centros de gravedad son equidistantes y en número par, es obvio que el punto medio de la línea recta limitada por las magnitudes centrales será el centro de gravedad de la magnitud compuesta: es decir el punto G.

Por tanto, si A está en E y B en D, estarán en equilibrio en torno a G.

Hidrostática: sobre el equilibrio de cuerpos flotantes.

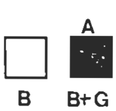
En este tratado, que consta de dos libros y cuyo texto griego sólo se conoció a partir de 1899, Arquímedes establece los principios fundamentales de la ciencia de la Hidrostática (libro I) y analiza las condiciones de estabilidad de un segmento de paraboloide recto de revolución, para distintas relaciones entre altura y parámetro principal de la parábola generatriz, que flota en fluidos de diferentes densidades.

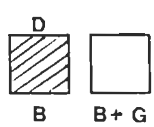
Libro I

Se inicia con un postulado cuya formulación es la que sigue: " *Admitamos que un fluido es de naturaleza tal que de las partes que están al mismo nivel y son adyacentes, aquella que es presionada menos es apartada por la que es presionada más; y que cada una de sus partes es presionada por el fluido que está en la vertical sobre él, siempre que el fluido no esté encerrado y presionado por algo más* ".

Consta además de 9 proposiciones entre las que destaca la proposición 7 en la que se establece que " *Los sólidos más pesados que el fluido se hunden hasta el fondo y su peso resulta ser más ligero (que en el aire) en una cantidad igual al peso del fluido desalojado* ".

Esta proposición se demuestra después de haber probado otras 5 en las que se concluye que: la superficie de cualquier fluido en equilibrio tiene forma esférica con centro en el centro de la Tierra (Prop.2); los sólidos de igual peso que el fluido se sumergirán hasta que la superficie de ambos quede al mismo nivel (Prop.3); los de menor peso, en cambio, no lo harán totalmente, de tal modo que la porción sumergida es tal que el volumen de fluido desplazado tiene un peso igual al del sólido completo (Props.4 y 5); si se sumerge totalmente un sólido más ligero que el fluido aparece sobre él una fuerza neta hacia arriba igual a la diferencia de pesos entre el volumen de fluido desplazado y el peso del sólido (Prop. 6).





Sea A el sólido dado, cuyo peso es B+G.

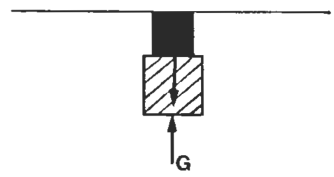
Un volumen de fluido similar a A tiene un peso B.

Consideremos ahora otro sólido D cuyo peso sea B, de forma que un volumen igual de fluido tenga un peso B+G y combinemos A y D en un solo sólido de peso (B+G) + B = 2B+G.

Un volumen igual de fluido pesará también B + (B+G) = 2B+G.

A y D permanecerán suspendidos juntos en equilibrio en el interior del fluido.

D por sí solo se vería sometido a una fuerza hacia arriba igual a G (**Proposición 6**). G será por tanto la fuerza que empuja a A hacia abajo, es decir, el peso de A en el fluido.



A es por tanto más ligero en el fluido que fuera de él, en una cantidad B que es el peso del fluido desplazado por el volumen de A.

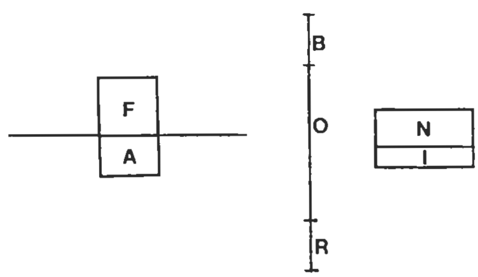
Libro II

Este libro suscita admiración por el alto nivel de los resultados obtenidos y, en palabras de Heath *"constituye un tour de force que sólo puede apreciarse si se lee en su integridad".*

La argumentación se desarrolla a lo largo de 10 proposiciones y su contenido aparece conectado, sin ninguna duda, con la ciencia náutica.

Utiliza dos teoremas fundamentales. El primero de ellos presentado como postulado después de la Proposición VII del libro I: *"Cualquier cuerpo que sufra un empuje hacia arriba en un fluido, lo experimenta a lo largo de la vertical que pasa por el centro de gravedad de la porción de sólido inmerso en el fluido".* El segundo es la Proposición I del libro II: *"Si un sólido más ligero que un fluido flota en éste, su peso es al peso del fluido como el peso de la porción sumergida es al peso total del sólido"*

Sea un sólido de volumen A+F. A es la porción sumergida.



Consideremos una cierta cantidad de fluido cuyo volumen es N+I tal que N = F e I = A (1).

Sean B (Peso del sólido), O (peso del fluido N) y R (peso del fluido I).

Entonces: Peso de (F+A): Peso de (N+I) = B:(O+R)

Por la Prop 5, R=B

Peso(F+A):Peso(N+I) = R:(O+R)

R:(O+R)=I:(N+I) por referirse a peso y volumen del fluido

I:(N+I)=A:(F+A) por (1).

A:(F+A)=Peso de A:Peso de (A+F)

Para finalizar con la hidrostática veamos la demostración, a la manera de Arquímedes, de una de las proposiciones sobre equilibrio de paraboloides de revolución.

Proposición 2

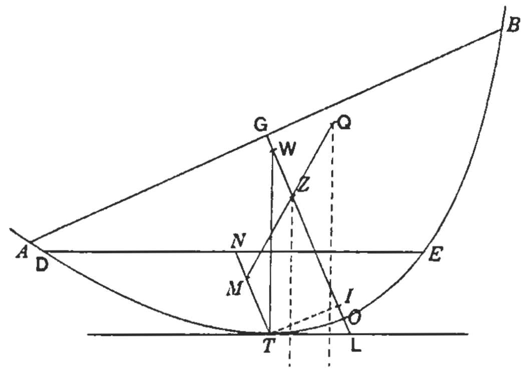
" Si un segmento recto de un ortoconoide tiene un eje h que no es mayor que una y un medio veces la línea tan alejada como el eje (distancia entre foco y vértice) y se coloca en el fluido de modo que su base no toque la superficie del fluido, no permanecerá, si se inclina, en esta posición inclinada sino retornará a la posición vertical cualesquiera que sea la razón de su gravedad a la del fluido".

Sea la cuerda DE coincidente con la superficie del fluido. La línea que pasa por T y es paralela al eje pasa por el punto medio de DE. Los centros de gravedad Z y M vienen determinados **(Prop.8 Sobre equilibrio de planos II)** por las relaciones:

OZ = 3ZG/2 TM =3MN/2

El centro de gravedad Q de la porción del sólido que está sin sumergir yace sobre la prolongación de MZ.

A fin de que el sólido tienda a recuperar la posición de equilibrio M debe estar a la izquierda de Z y para ello basta que lo esté T.



Para que se cumpla esta última condición basta que OW >OZ y para ello es suficiente que IW >OZ

De acuerdo con las condiciones del enunciado tenemos:

$5OZ/3 = OG < 3/2(p/2) \Rightarrow OZ \quad p/2$

Como IW = p/2 (Propiedad de la subnormal de una parábola) se cumplirá: OZ < IW < OW

^ZTL es agudo

La perpendicular por Z a la recta tangente en T la corta en un punto entre T y L.

Si imaginamos también las perpendiculares trazadas por M y Q se verificará:

La porción de sólido sin sumergir será presionada hacia abajo a lo largo de la vertical en Q ya que cualquier sólido pesado se ve impelido hacia abajo por una fuerza aplicada en su centro de gravedad. La porción en el fluido, al ser más ligera que éste, se verá impelida hacia arriba a lo largo de la vertical que pasa por M. Como las porciones del sólido no son empujadas a lo largo de la misma vertical, el sólido no mantiene esta posición sino que la porción del lado A será impelida hacia arriba en tanto que la porción B lo será hacia abajo hasta que el sólido haya adquirido la posición vertical.

El resto del libro explora el equilibrio para condiciones menos restrictivas entre h y p. Interviene entonces la razón entre pesos específicos de fluido y sólido.

Optica

Resulta repetitivo volver a señalar la importancia que el mundo griego concede al concepto de simetría y su relación estrecha con la belleza, la proporción y la armonía.

No resulta pues extraño que los fenómenos de la reflexión especular, tan intimamente conectados con aquella, suscitaran la atención de los filósofos a lo largo de toda la historia griega y que estos intentaran encontrar las leyes que rigen la formación de imágenes. La fascinación que, por otra parte, ejerce la luz, su íntima relación con el proceso de la visión, por medio del que nos relacionamos con el mundo exterior, le otorgaron un lugar de privilegio y su conceptuación como uno de los contrarios básicos de la filosofía presocrática.

Su estudio estuvo así en el centro de la reflexión que los griegos hicieron sobre mundo fenoménico porque difícilmente podremos entender lo que vemos si no somos capaces de conocer cómo vemos. La importancia que para el conocimiento poseen los sentidos (y en especial el de la vista) no hace sino enfatizar el caracter primordial de este estudio.

Conviene pues mencionar, aunque sólo sea brevemente, qué tipo de concepciones sobre la luz y el proceso de visión, se manejaron en Grecia durante este período.

Teorías sobre la luz y la visión

Las ideas griegas sobre la luz y la visión son, hasta Aristóteles, esencialmente emanacionistas ("algo" va desde un lugar a otro).

Podemos clasificarlas en tres grandes grupos:

1.- Empédocles sostenía que la luz es una "sustancia fluyente" emitida por el cuerpo luminoso que se propaga con una velocidad finita.

2.- Para los atomístas los ojos del observador emiten "rayos visuales" hacia el objeto visto con una velocidad extraordinariamente grande o incluso infinita.

3.- Platón propone una hipótesis mixta en la que la visión está producida por la unión de los rayos emitidos por el ojo y la luz que emana del objeto.

La tesis Aristotélica, explicitada en *" De anima"*, utiliza las categorías básicas de potencia y acto y establece que la luz es la actualización del estado de transparencia de un medio que lo posee potencialmente. Resulta así (la luz) una condición necesaria para la visión que se convierte en suficiente si, en ese medio transparente en acto, existe un cuerpo coloreado en potencia que actualize su color y produzca la visión.

La luz es, en esta teoría, incorpórea, y su emergencia y desaparición son instantáneos y estrechamente relacionados con el proceso de actualización de la potencialidad.

Leyes ópticas: Reflexión y refracción

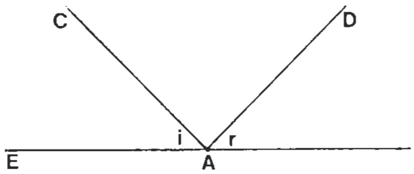
Euclides escribió un tratado de Optica que parece estar destinado según reseña Heath *" a prevenir a los estudiantes de Astronomía contra teorías paradójicas como la epicúrea, que sustentaba que los cuerpos celestes son del tamaño que aparentan"* .Este aparente sinsentido del epicureismo encierra mayor profundidad que la que la cita de Heath parece concederle.

Acepta que el proceso de visión es debido a los rayos que, procedentes de nuestros ojos, impactan sobre el objeto y, pese a esta concepción de principios totalmente errónea, obtiene toda una serie de conclusiones válidas de Geometría Proyectiva (de Optica Geométrica) apoyadas en la noción de rayo y en la propagación rectilínea de la luz.

En sus deducciones Euclides maneja la ley fundamental de la reflexión: el ángulo de incidencia ^i es igual al ángulo de reflexión ^r.

Toda otra serie de matemáticos griegos dedicaron su atención a la óptica (Arquímedes, Apolonio de Perga, Claudio Ptolomeo, Herón de Alejandría, etc.). Incluimos aquí por su interés una prueba de la ley de la reflexión atribuida a Arquímedes en la Catóptrica de Pseudo-Euclides y un interesante resultado obtenido por Herón sobre recorrido de la luz, que es un claro antecedente de los Principios de mínimo de Maupertuis y Fermat.

La prueba de Arquímedes utiliza un método de reducción al absurdo.



Sean los ángulos ^CAE =^ i y ^DAB = ^r

^i> = o < ^r .

Supongamos ^ i> ^r .

Si invertimos el sentido del rayo de modo que ahora el ojo esté en D en vez de en C y el objeto en C en lugar de en D, debe verificarse ^r > ^i . Ahora bien, por hipótesis ^i > ^r , lo que resulta imposible simultáneamente.

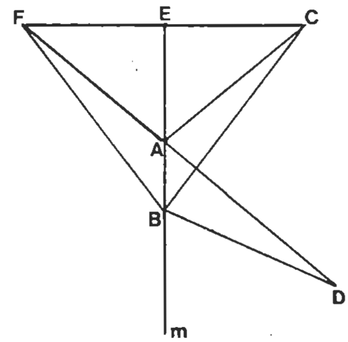
De modo similar se argumenta para el otro sentido de la desigualdad y por tanto se concluye que ^i = ^ r .

La prueba de Herón se basa en un principio explicitado por Aristóteles, pero que subyace en la tradición griega sobre el mundo natural: *"La Naturaleza no hace nada en vano".*

Referido a la luz establece que ésta viaja en línea recta, es decir, por el camino más corto. Por tanto, aún en el caso de que el camino sea quebrado en un punto por reflexión, esa línea quebrada debe ser la más corta que conecte el objeto y el ojo.

Herón afirma que ese camino es el que cumple que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

Sea la superficie m un espejo plano, C el ojo y D el objeto visto.



Sea la línea CAD la que cumple la condición de que el ángulo de incidencia es igual al de reflexión.

Prolonguemos DA hasta F que es el punto en que esta recta corta a la perpendicular al espejo trazada desde C.

$\hat{}EAF = \hat{}BAD = \hat{}r = \hat{}i = \hat{}CAE$:

$\Delta AEF = \Delta AEC \Rightarrow CA = AF \Rightarrow CA+AD = FD$

Sea B otro punto del espejo distinto de A y unamos FB y BD.

Como FE = EC y BE es perpendicular a FC, BF = BC .

Por tanto, CB+BD = FB+BD FD = CA+AD

Espejos y propiedades focales: espejos de ignición

El tema del estudio de los espejos de ignición (espejos ustorios) recorre la obra de numerosos geómetras griegos. La forma de estos espejos parece haber sido esférica, elipsoidal o paraboloide y lógicamente está relacionada con las propiedades de sus secciones transversales. No es extraño, pues, que se le atribuya a Apolonio el conocimiento del mayor poder de ignición de los espejos parabólicos como consecuencia de las propiedades focales de la parábola a las que ya se hizo mención en una ponencia previa (la tangente a la parábola en cualquier punto forma ángulos iguales con la recta que une ese punto con el foco y con la recta paralela al eje de la parábola).

Astronomía

Al historiar la Astronomía griega resulta evidente que está dominada por lo que se ha conceptuado como el "mito de la circularidad"; más sorprendente resulta, sin embargo, comprobar que esta pervivencia se mantiene en Galileo. En un ensayo titulado Actitud estética y pensamiento científico, Alexandre

Koyré escribe: " *(Galileo) rechazó las elipses de Kepler por la simple razón de que eran elipses... y nó círculos como estaba mandado. Todos los historiadores de la ciencia conocen el famoso pasaje, - se encuentra al principio del Diálogo sobre los dos máximos sistemas -, en el que Galileo nos explica la perfección inherente al movimiento circular " que parte siempre de un término natural y se mueve siempre hacia un término natural; en el que la repulsión e inclinación son siempre de igual fuerza"; que por esta razón no es ni retardado ni acelerado, sino uniforme y, por consiguiente, capaz de una continuación perpetua que no puede tener lugar en un movimiento rectilíneo y continuamente retardado o acelerado. Todo el mundo conoce igualmente los pasajes, no menos famosos, en los que Galileo nos dice que el movimiento rectilíneo podía haber sido empleado para conducir la materia (del mundo) a su sitio, pero que, una vez acabada la obra, " la materia debe, bien permanecer inmóvil, bien moverse circularmente" y que "sólo el movimiento circular puede convenir de un modo natural a los cuerpos naturales que componen el mundo y que están dispuestos en el mejor orden, mientras que el rectilíneo, digan lo que digan, está asignado por la naturaleza a estos cuerpos y a sus partes cada vez que se encuentran fuera de los lugares que les corresponden".*

Hemos citado in extenso porque queremos mostrar que el "mito de la circularidad" va más allá de lo que conceptuaríamos como actitud estética de los griegos y que su esencia hay que buscarla en las dificultades para encontrar una causa natural al movimiento de los objetos celestes. Aristóteles soslaya esta dificultad atribuyéndoles una naturaleza perfecta y por tanto un movimiento acorde con ella, pero también lo hace Galileo, que en la cita anterior se nos aparece como un conspicuo discípulo del filósofo de Estagira, al admitir un Principio de Inercia para el movimiento circular que no necesita así de explicación en términos de causas. La trama de los cielos deviene así incausada, repetitiva, estática y por ello se confunde en la ciencia griega con la matemática; no es, de hecho, otra cosa que Geometría.

El Cosmos griego, del que la versión aristotélica es su forma más acabada, se articula sobre un entramado de formas en las que la línea recta y el círculo son la base: " *No hay movimientos naturales distintos del movimiento hacia arriba o hacia abajo (rectos) o del movimiento sin principio ni fin (circular) de los objetos celestes".* También la Geometría privilegia las construcciones con *" regla y compás"*

Resulta extraordinariamente curioso comprobar como los griegos no dudaron en utilizar la Geometría de Euclides, y por tanto la noción de espacio que comporta, para calcular y medir en un mundo físico que supone una noción de espacio radicalmente opuesta a aquella; homogéneo e infinito el espacio de la Geometría, heterogéneo y finito el de la Física.

Centremos nuestro análisis del uso de la Geometría en Astronomía en dos problemas: la determinación del perímetro de la Tierra y las distancias entre ésta y el Sol y la Luna.

La atención dedicada en ponencias anteriores a Eratóstenes y a Aristarco de Samos nos permite silenciar datos sobre sus vidas y sus obras para ocuparnos exclusivamente de los cálculos.

Medición del perímetro de la Tierra.

La primera cuantificación de las dimensiones de la Tierra se debe a Eratóstenes (276 - 195 a.C.)

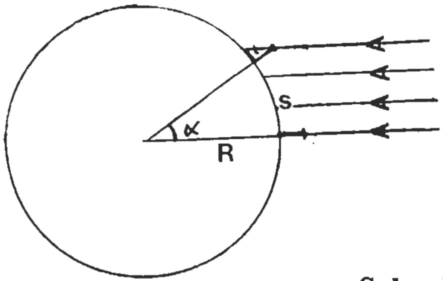
Las suposiciones en las que basa su cálculo son:

1.- El Sol está tan distante de la Tierra que sus rayos inciden paralelamente.

2.- La distancia entre Siena y Alejandría es conocida (5.000 estadios = 74.400 metros)

3.- Ambas ciudades están sobre el mismo meridiano.

Eratóstenes observó que, en Siena, la sombra de un gnomon era nula al mediodía del solsticio de verano y que en el mismo instante el ángulo entre el gnomon y los rayos del sol era, en Alejandría, 1/50 del círculo completo.



En el triángulo formado por el gnomon y su sombra:

Como $s = \alpha R$ $\quad R = s/\alpha = 5000/2\pi/50$

y por tanto $2\pi R = 250000$ estadios.

Sobre las medidas y distancias del Sol y la Luna

Pese a que, según escribe Heath en su libro sobre Aristarco, *"no existe la más mínima duda de que Aristarco fue el primero en mantener la hipótesis heliocéntrica"*, nada de ello aparece en su tratado "Sobre las medidas y distancias del Sol y la Luna". En él, en la más pura tradición clásica, Aristarco comienza con un conjunto de hipótesis (6 en total) a partir de las cuales deduce una serie de proposiciones (18).

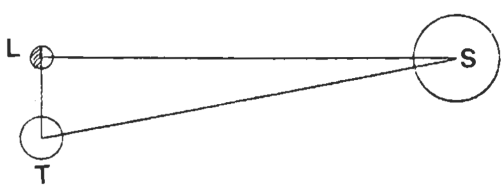
Hipótesis

1.- La Luna recibe la luz del Sol.

2.- La Tierra está en la relación de un punto y centro a la esfera en la que la Luna se mueve.

3.- Cuando la Luna aparece como "media luna", el gran círculo que divide las porciones oscura y brillante está en la dirección de nuestro ojo.

4.- Cuando la Luna aparece como "media luna", su distancia desde el Sol es entonces menor que un cuadrante en 1/30 de cuadrante.



5.- La anchura de la sombra de la Tierra es la de dos lunas.

6.- La luna subtiende 1/15 parte de uno de de los signos del Zodíaco

Con estas hipótesis Aristarco prueba un conjunto de proposiciones entre las que destacan las tres siguientes:

Proposición 7

La distancia del Sol a la Tierra es mayor que 18 veces, pero menor que 20 veces, la distancia entre la Luna y la Tierra.

Proposición 8

El diámetro del Sol guarda con el de la luna la misma razón que la antedicha.

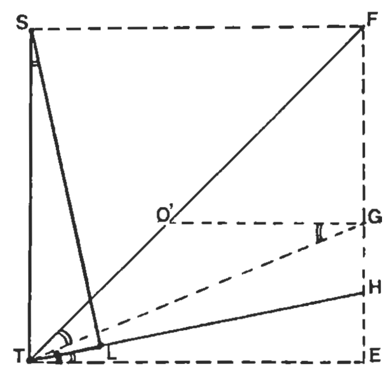
Proposición 15

El diámetro del Sol guarda con el de la Tierra una razón que es mayor que 19/3 pero menor que 43/6.

La distancia desde la Tierra al Sol cumple la siguiente relación con la distancia Tierra-Luna.

$$18TL < TS < 20TL$$

Sean S, T y L los centros del Sol, Tierra y Luna respectivamente cuando se cumple la hipótesis 3 y la hipótesis 4 (ΔSTL rectángulo y ^STL = 87º).



Construyamos el cuadrado SFET y bisequemos el ángulo ^FTE.

^GTE= R/4 = 22.5º

Por otra parte, ^TSL=3º=^HTE y en consecuencia:

^GTE:^HTE = R/4:R/30 = 15:2.

Teniendo en cuenta una relación conocida en tiempos de Aristarco:

GE:HE (GE/TE:HE/TE i.e tan ^GTE: tan ^HTE) > ^GTE:^HTE

> 15:2 (1)

Queremos probar que TS:TL >= 18:1 <=> FE:HE >= 18:1

FG:GE=FT:TE ya que al ser ΔTO'G isósceles se verifica:

FG:GE = FO':O'T = FO':O'G = FT:TE

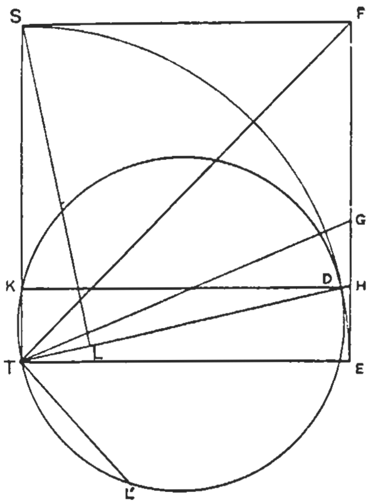
FG:GE = FT :TE = $\sqrt{2}$:1 FG:GE = $\sqrt{2}$:1 > 7/5

(FG+GE):GE > (7+5):5 FE:GE > 12:5 = 36:15 (2)

Componiendo (1) y (2) queda:

FE:HE = TS:TL > 36:2 = 18:1

TS > 18TL



La segunda parte de la prueba exige demostrar que TS< 20TL

TH corta al círculo SE en el punto D. Tracemos la paralela a TE por ese punto, DK.

Circunscribamos una circunferencia al triángulo KTD y sea la cuerda TL' igual al radio de dicho círculo.

TD = 2r (diámetro del circulo.

^TDK = ^DTE = R/30 = 3°

arc TK = 1/60 circunferencia del círculo

arc TL' = 1/6 circunferencia del círculo y por tanto: arc TK:arc TL'=1:10 < TK:TL'=TK:r$\Rightarrow$ r <10TK

2r =

TD 20TK

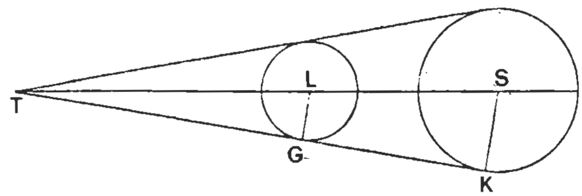
En los triángulos STL y KTD se verifica:

TD:TK = ST:TL< 20 ST < 20 TL.

Se concluye así que 18 TL < ST < 20 TL

Proposición 9

El diámetro del Sol está comprendido entre 18 y 20 veces el de la Luna.



La demostración es inmediata sin más que observar la figura (consecuencia de la proposición 8 que afirma que cuando el Sol está totalmente eclipsado, el Sol y la Luna están ubicados dentro del mismo cono que tiene su vértice en nuestro ojo) y establecer la razón entre ST y TL que resulta ser igual a la que existe entre SK y LG (radios del Sol y la Luna respectivamente).

Conclusión

Hemos querido con este repaso incompleto sobre la interrelación entre Física y Matemática (pasada por el tamiz de la Tecnología), en el que hemos dejado fuera aspectos tan importantes como la Acústica y "olvidado" múltiples aportaciones en Mecánica, Optica, Astronomía, etc., completar el cuadro de la actividad científica en el mundo griego y disipar, en la medida de lo posible, esa imagen errónea que, a veces, tiende a proyectarse sobre el carácter de su cultura: un pueblo de filósofos dedicados a la pura especulación y de artistas fascinados por la belleza y la proporción.

La realidad resulta mucho más compleja y, al igual que sucede con otras épocas, la imagen de la civilización griega acaba por aparecer poliédrica, multiforme.

Bibliografía:

Aristóteles: *Physica (versión de Wicksteed y Cornford)* Loeb Classical Library Heinemann

Dijksterhuis E.J.: *Archimedes.* Princeton Univ. Press

Dijksterhuis E.J.: *The mechanization of the World Picture.* Princeton Univ. Press)

Guthrie W.: *Hª de la Filosofía Griega* (Tomos I y II) Gredos

Heath T.: *A history of Greek Mathematics.* Dover

Heath T.: *Aristarchus of Samos.* Dover

Kline M.: *Mathematics and the Physical World.* Dover

Koyré A.: *Estudios de Hª del pensamiento científico.* Siglo XXI

Lucrecio: *De la naturaleza de las cosas.* Espasa Calpe

Macaulay D.: *Cómo funcionan las cosas.* Muchnik Editores

Sambursky S.: *El mundo físico de los griegos.* Alianza Universidad.

Sambursky S.: *El mundo físico a finales de la Antigüedad.* Alianza Universidad

Strandh S.: *Historia de la máquina.* Editorial Raíces

Taton R.: *Historia General de las Ciencias* (Vol.1). Ediciones Destino