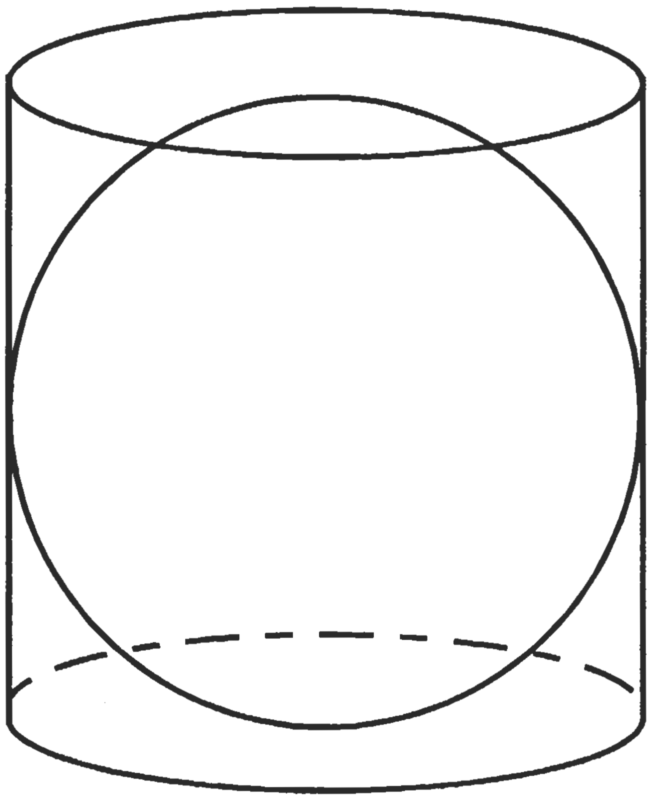
Arquímedes,
Precursor del Cálculo Infinitesimal



Mariano Martínez Pérez.
Profesor de Historia de la Matemática.
Universidad Complutense.

I.- Arquímedes: Características Generales de su Obra.

Arquímedes nació en Siracusa hacia el año -287 y murió asesinado en la toma de la ciudad por los romanos el año -212, en la etapa final de las guerras púnicas.

Sabemos que en su juventud estudió en Alejandría con la primera o segunda generación de discípulos de Euclides, para regresar más tarde a Siracusa y residir ya en su ciudad natal, absorbido por sus investigaciones matemáticas, si hemos de creer la persistente tradición que en torno a él nos ha llegado, hasta el final de sus días.

Para determinar las características generales de su obra matemática, lo mejor que se puede hacer es compararla y contrastarla con la de sus predecesores inmediatos, contemporáneos y sucesores.

Si comparamos las obras de Arquímedes con las de Euclides y las de Apolonio, se destacan inmediatamente unas diferencias muy acusadas, que son precisamente las que determinan lo que me atrevo a llamar el carácter "moderno" de la obra de Arquímedes (sin que el término suponga, en principio, ninguna valoración en sentido positivo o negativo, sino que sólo haga justicia a los hechos manifiestos), que la asemeja mucho más a las investigaciones de los grandes matemáticos de los siglos XIX y XX que en los casos de sus dos grandes "rivales" Euclides y Apolonio.

Efectivamente, mientras que los **Elementos** de Euclides (y presumiblemente también sus **Elementos de las Cónicas** perdidos) constituyen un tratado "elemental" o básico, sistemático y de carácter eminentemente **pedagógico**, con la pretensión expresa de ser muy completo en sus contenidos, y lo mismo le pasa, a un nivel más avanzado, a las **Cónicas** de Apolonio, la mayoría de las obras de Arquímedes son verdaderas monografías de investigación de uno, dos o tres problemas concretos importantes, cuya resolución en tres o cuatro proposiciones principales (y a veces algún que otro corolario a ellas) es el único objetivo del libro. Para llegar a demostrar esas tres o cuatro proposiciones construye Arquímedes una rígida y elegante estructura lógica formada por una sucesión de proposiciones previas engarzadas con admirable precisión, en la que usualmente no falta ni sobra ninguna (excluídas, claro está, las que el lector debe conocer ya de los tratados "elementales", ¡no son obras destinadas a principiantes!, y aún así las acostumbra a citar, sin demostrarlas). Esto conduce a que las obras muestren un acabado perfecto con la máxima "economía" de medios. Como consecuencia inevitable, no tienen en absoluto un carácter pedagógico, sino más bien todo lo "antipedagógico" que cabe, pues Arquímedes no hace ninguna concesión en cuanto a justificar la inclusión de un teorema que puede parecer gratuito pero que va a necesitar más adelante. Evidentemente, y como casi siempre, la obra ha sido construida "hacia atrás", y después meticulosamente ordenada y montada "hacia adelante". Esta manera de proceder, junto con el hecho de que no acostumbre a "perder el tiempo" explicándonos "cómo" ha obtenido los resultados que va a demostrar (excluído, naturalmente, el **Método**, dedicado a eso únicamente) nos recuerda las furiosas invectivas de Abel contra Gauss,*"ese viejo zorro que va borrando con la cola las huellas de sus pasos"*. Otra característica relacionada con la que acabamos de mencionar es la de introducir frecuentemente al comienzo de un Libro unos cuantos axiomas especiales para el problema concreto que trata de resolver: en ello se distingue de nuevo nítidamente de Euclides y Apolonio. En algunos casos estos nuevos axiomas "especiales" son sumamente interesantes por su carácter muy general y su "osadía". Veremos un ejemplo muy claro en los axiomas del Libro **Sobre la esfera y el Cilindro I**

Hay que decir que estos "aires de modernidad" que respira la obra de Arquímedes, comparada con la de Euclides y matemáticos anteriores, parece estar presente en casi todos los aspectos de la vida en el mundo helenístico, una vez consolidado hacia el año -300. Euclides, pese a ser ya una figura de transición entre el mundo helénico clásico y el helenístico y haber vivido y trabajado en la cosmopolita Alejandría, cruce de culturas y abierta al mundo conocido, está aún "chapado a la antigüa", mirando a un pasado que es todavía el mundo "ateniense", más cerrado y menos "dinámico", el mundo de Platón y Aristóteles. Arquímedes se nos muestra como el prototipo de científico del mundo "abierto" helenístico con su centro (pero esta vez mundial) en Alejandría, algo así como Leonardo da Vinci se nos muestra en muchos aspectos como el prototipo de científico (e ingeniero y artista) del mundo "abierto" renacentista.

Volviendo, por último, a la obra de Arquímedes y al título de esta charla, tenemos que subrayar la importancia que en ella tiene el llamado "Método de exhaución" inventado por Eudoxo (a quien Arquímedes le concede repetidas veces el crédito debido) y que nos transmite Euclides en el teorema X-1 de los **Elementos**.

A Arquímedes mismo se le debe, por cierto, la poderosa variante del método de exhaución que recibe el nombre de

"Método de Compresión". Mientras que lo característico del método de exhaución clásico de Eudoxo y Euclides es el de aproximar las dos figuras, conocida A y desconocida X, por medio de una sucesión monótona creciente (casi siempre) P_n de manera que:

$$P_1 < P_2 < P_3 < \ldots < P_n < \ldots < \begin{cases} A \\ X \end{cases}$$

y que tanto $A - P_n$ como $X - P_n$ puedan hacerse menores que cualquier figura (plana o espacial, según los casos) dada, para, por medio de una sencilla doble reducción al absurdo, terminar demostrando que A = X, lo que suele hacer a veces Arquímedes es introducir otra sucesión, ésta monótona decreciente Q_n , "contigua" a la dada (como se decía hace años) y tal que entre las dos "comprimen" a A y a X, "forzándolas" a ser iguales. Es decir:

$$P_1 < P_2 < P_3 < \ldots < P_n < \ldots < \left\{ \begin{matrix} A \\ X \end{matrix} \right\} < \ldots < Q_n < \ldots < Q_3 < Q_2 < Q_1$$

con la condición añadida de "contigüidad"

$$Q_n - P_n < \varepsilon$$

sea cual sea la figura ε. De nuevo la conclusión A = X es inmediata.

Al principio sorprende al lector que, haciendo Arquímedes repetido uso del método de compresión, no lo formule nunca en términos generales y abstractos, sino que en cada caso concreto repita todos los pasos meticulosa y "machaconamente". Parece, no obstante, inevitable esta manera de proceder ante una ausencia total de un simbolismo "abstracto" de tipo "algebraico" (en un sentido muy general). Puede verse a este respecto la teoría de S. Bochner sobre el colapso final de la matemática griega, que había alcanzado tan brillantes alturas con Arquímedes y Apolonio, por ejemplo; quien sostiene que ello fue debido esencialmente a una falta total de simbolismo que permitiese "calcular" y "algoritmizar" procesos. Según Bochner, la geometrización radical de la matemática griega empezó siendo su gloria, para terminar siendo su miseria.

Y, efectivamente, después de Arquímedes y Apolonio la matemática griega decae rápidamente. Con pocas excepciones sus sucesores se dedicarán a las aplicaciones de la matemática, principalmente a la astronomía, hasta que se cierre el ciclo, cinco siglos más tarde, con Diofanto y Pappus.

Dejaremos para el final de la charla la discusión de en qué sentido y hasta qué punto podemos considerar a Arquímedes como "precursor" del cálculo infinitesimal, y en qué sentido nó.

II. El libro Sobre la Esfera y el Cilindro - I

Esta obra consta de una carta-prólogo de Arquímedes a Dositeo, seis definiciones, cinco axiomas y 44 proposiciones, de las que las principales son las 33 y 34, a las que cabe añadir las 42-43 y la 44 como consecuencias también importantes.

A. La Carta-prólogo a Dositeo.

La carta es breve. Comienza recordando a Dositeo que ya le envió en otra ocasión la demostración de la cuadratura de la parábola (véase más adelante la Sección III), y le anuncia que en esta ocasión le envía esencialmente tres resultados nuevos (*"que fueron desconocidos por parte de aquellos que, antes de mí, se dedicaron al estudio de la Geometría"*), junto con las correspondientes demostraciones. Se trata de la sensacional

Proposición 33 sobre la superficie de la esfera, de la 34 sobre las relaciones entre la esfera, el cono inscrito en ella y el cilindro circunscrito (que es la famosa Prop.2 del **Método**), y de la 42 sobre la superficie de un segmento esférico. Según Arquímedes, estos nuevos resultados merecen ser puestos junto a otros suyos anteriores y los del gran Eudoxo sobre las relaciones entre pirámides y prismas por un lado, y conos y cilindros por otro, de la misma base y la misma altura (¡vaya si lo merecen!).

B. Las definiciones y axiomas

De las seis definiciones que siguen, las más interesantes son las cuatro primeras, que forman dos parejas, 1 - 2 y 3 - 4, de una manera natural. Las 1 y 2 definen lo que Arquímedes entiende por *"líneas cóncavas en la misma dirección"*, mientras que las 3 y 4 lo que entienden por *"superficies cóncavas en la misma dirección"*, preparando los axiomas 2, 3 y 4 que vienen a continuación. Lo más notable de ellas, aparte su alto nivel de precisión y abstracción, es el hecho de su gran generalidad, que les confiere un auténtico carácter "topológico" *avant la lettre*. Es bien sabido el limitado número de curvas que manejaron los griegos: rectas, circunferencias y cónicas, más unas pocas y además "sospechosas" "curvas mecánicas": trisectriz, cisoide, espiral, etc. Ello no obsta para que Arquímedes se sitúe, al formular sus definiciones, en un altísimo (y en consecuencia, claro está, fecundísimo) plano de generalidad, al implicar líneas y superficies "cualesquiera" con extremos o borde. Los matemáticos muy posteriores tenían razones suficientes para quedar estupefactos ante la generalidad y osadía que suponían estas definiciones y los axiomas 2, 3 y 4 relativos a ellas. Naturalmente Arquímedes no va a utilizar las extrañas y perversas líneas y, no digamos,

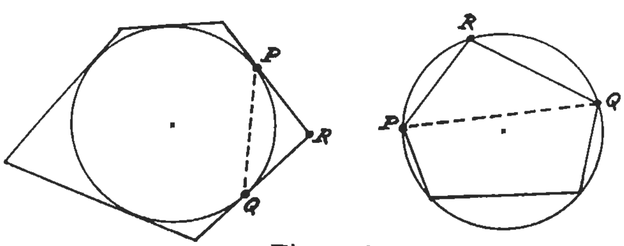


Figura 1

superficies "modernas", como las discontinuas u otras monstruosidades, pero sí, y a menudo, no diferenciables, que le resultan extraordinariamente útiles, como las que resultan de "pegar" arcos de distintas curvas, arcos con segmentos, líneas poligonales, o de "pegar" superficies curvas y planas (véanse las reveladoras Figuras 1, 2 y 3).

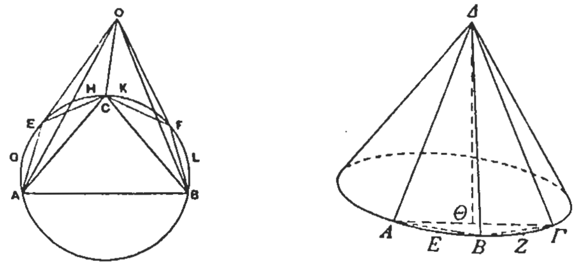


Figura 2

Permítaseme recordar al respecto las interminables discusiones que, aún en el siglo XVIII, sostuvieron los matemáticos acerca de la legitimidad de esas sospechosas curvas "discontinuas" que resultan al unir trozos que tienen distinta expresión analítica unos de otros y que pueden muy bien presentar puntos angulosos (de no diferenciabilidad para nosotros, de discontinuidad para ellos). Es un bonito ejemplo de la relevancia del lenguaje utilizado en cada caso por la matemática.

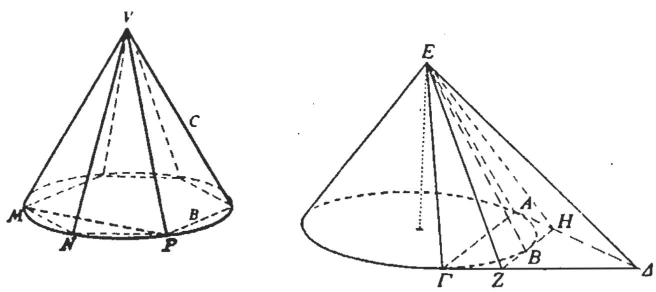
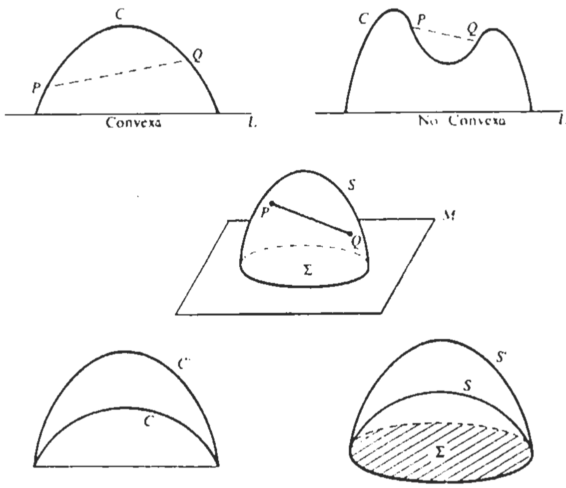


Figura 3

Pasando ya a los axiomas, poco más hay que decir de los números 2, 3 y 4, que, como hemos dicho, motivan las definiciones anteriores, y que permiten comparar, en situaciones muy generales, líneas o superficies "cóncavas en la misma dirección" (véase la Figura 4). Todo lo dicho en el párrafo anterior se aplica aquí y se ilumina más a fondo su significado. Quedan por comentar el Axioma 1, con la famosa propiedad "impuesta" por Arquímedes a la recta, de ser la menor de todas las líneas que unen dos puntos, y el 5 que se reduce al llamado **Axioma de Arquímedes o de Eudoxo-Arquímedes** para líneas, superficies y sólidos. Como se sabe, este axioma es exactamente equivalente al famoso **Teorema de Exhaución** de Eudoxo, que nos transmite



C<C'   Figura 4   S<S'

Euclides como Teorema X-1 de los **Elementos**, y que es la piedra angular del tratamiento de todas las figuras curvilíneas:

"Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor sustraemos una magnitud mayor que su mitad, de la queda sustraemos una magnitud mayor que su mitad y si repetimos este proceso continuamente, llegaremos a una magnitud que será menor que la más pequeña de las magnitudes iniciales."

C.- Las Proposiciones principales del Libro

La primera es la Proposición 33, que afirma: *"La superficie de una esfera es equivalente a cuatro veces uno de sus círculos máximos"*. La proposición siguiente, la 34, afirma que: *"Una esfera es equivalente a cuatro veces el cono que tiene como base un círculo máximo de dicha esfera y como altura un radio"* (véase la Figura 5). Como corolario sencillo a esta proposición, resultan las relaciones entre la esfera y el cilindro circunscrito, así como entre sus superficies respectivas, redondeando y completando el resultado (Figura 5). Es muy interesante observar que Arquímedes "descubrió" en primer lugar el resultado 34 (el **Método**, Prop.2), y a partir de él, y por medio de una de las más osadas fantasías de toda la historia de la matemática (véase la Figura 6), el 33, evidentemente mucho más abstracto y difícil que el otro; sin embargo, en la presentación formal Arquímedes encuentra interesante poder demostrar antes éste para poderlo aplicar al final del corolario a la Proposición 34.

Esfera = 4 Cono
Esfera = 2/3 Cilindro

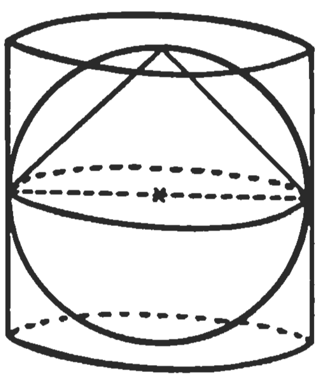


Figura 5

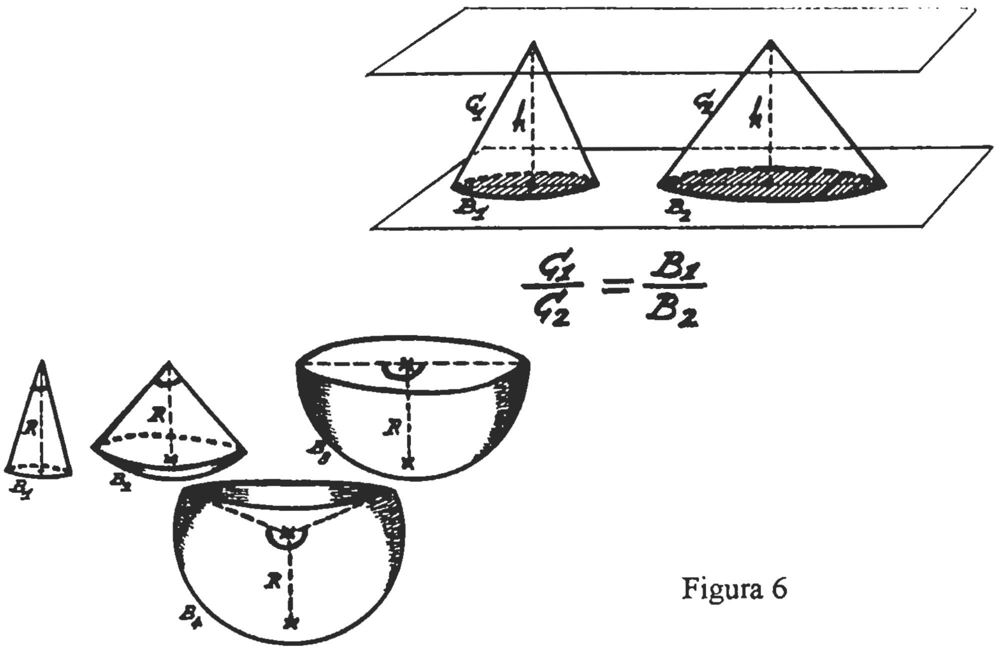


Figura 6

Las proposiciones siguientes son los preámbulos necesarios para demostrar las 42-43 y la 44 sobre segmentos esféricos y sus correspondientes superficies (véase la Figura 7).

D. Las Proposiciones previas.

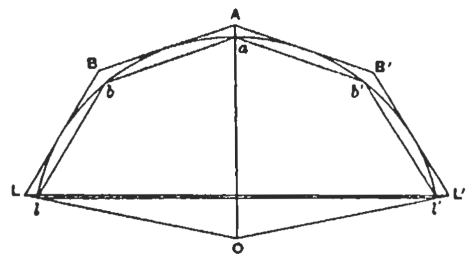


Figura 7

Las proposiciones 1 a 12 consisten en relaciones de desigualdad entre superficies, obtenidas casi todas ellas por medio de hábiles aplicaciones de los axiomas relativos a curvas y superficies cóncavas en la misma dirección (véase Figura 4).

Como la idea central de Arquímedes es la de someter, primero a la superficie esférica y luego a la esfera sólida misma, a un proceso de compresión partiendo de polígonos inscritos y circunscritos en una circunferencia que va a generar la esfera al girar, es un paso importante la proposición 5.

Las proposiciones 15 a 20 estudian propiedades de las superficies de los conos y troncos de conos que se necesitarán más adelante.

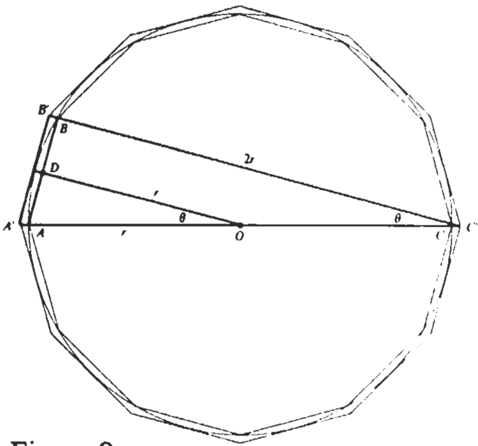


Figura 8

En las proposiciones 21 a 32 se demuestran las relaciones de desigualdad necesarias para aplicar en la 33 el método de compresión. Se parte de dos polígonos de 4n lados, inscrito y circunscrito respectivamente a una circunferencia (Fígura 8). Al girar en torno a un diámetro, la circunferencia genera la esfera S, mientras que los polígonos generan dos figuras formadas por dos conos y troncos de cono cada una, una f_{4n} inscrita y la otra F_{4n} circunscrita a la esfera. Se tiene, pues, llamando K a cuatro veces el círculo máximo de la esfera,

$$f_4 < f_8 < \ldots < f_{4n} < \ldots < \left\{ \begin{matrix} S \\ \\ K \end{matrix} \right\} < \ldots < F_{4n} < \ldots < F_8 < F_4$$

En la proposición 33 se demuestra al fin por compresión que S = K, mediante la última condición necesaria, la de que

$$F_{4n} - f_{4n} < \varepsilon$$

cualquiera que sea la superficie ε, tomando n suficientemente grande.

La proposición 34 demuestra de manera análoga, aplicada ahora a la esfera sólida E y a las figuras sólidas inscrita y circunscrita, que E es igual a cuatro veces el cono de base un círculo máximo y altura el radio de la esfera E, o lo que es lo mismo, a tres medios del cilindro circunscrito a ella.

Las últimas proposiciones del Libro, desde la 35 a la 42, imitan el mismo procedimiento, aplicado ahora a un segmento de círculo en vez de a un círculo completo.

Como hemos señalado ya, aquí la finalidad es la de llegar a demostrar las proposiciones 42, 43 y 44 sobre la superficie y el volumen de un segmento esférico (véase Figura 7).

III.- El libro sobre la Cuadratura de la Parábola

A. La carta-prólogo a Dositeo

Arquímedes comienza presentándose a Dositeo y lamentándose por la muerte del famoso matemático, astrónomo y buen amigo suyo Conón de Samos.

A continuación recuerda los intentos anteriores de cuadrar el círculo o un segmento de círculo, concluyendo que el problema no ha sido resuelto (¿haría acaso Arquímedes algunos intentos (fallidos) de resolverlo?; nos resulta casi imposible suponer que no). No hace mención alguna, en cambio, de las cuadraturas de las lúnulas por Hipócrates de Quíos.

A continuación presenta su propia cuadratura del segmento parabólico, indicando que su herramienta esencial ha sido el axioma de Eudoxo-Arquímedes, es decir, el método de exhaución, con ayuda de la cual, nos dice Arquímedes, se han demostrado muchos y muy importantes teoremas sobre el círculo, la esfera, conos, pirámides y cilindros.

B.- Las Proposiciones principales.

Se trata de las proposiciones 14, 15, 16, 17 y 24. En las proposiciones 14 y 15 se demuestra, para los casos respectivos del

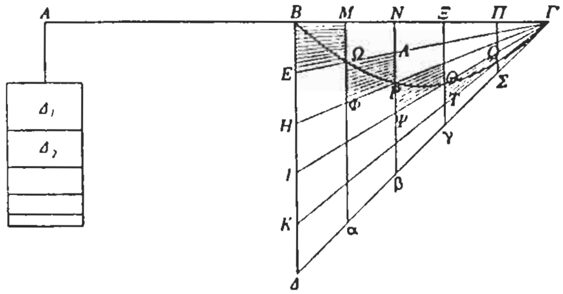


Figura 9

segmento parabólico recto (cuerda perpendicular al eje de la parábola) u oblicuo (cuerda no perpendicular a dicho eje), la desigualdad fundamental siguiente, que sólo formularemos para el caso oblicuo (Prop. 15, véase Figura 9)

Si dividimos la cuerda BΓ en un número cualquiera de partes iguales por medio de los puntos M, N, Ξ, π, de manera que BM = MN = N Ξ = Ξπ = πΓ, entonces:

3 (suma de los trapecios NΩ, ΞP, πΘ, más el triángulo πO Γ) < triángulo BΔΓ < 3 (suma de los trapecios EM, Φ N, Ψ Ξ, Tπ, más el triángulo ΣπΓ) donde los paréntesis representan lo que podríamos llamar "la poligonal inscrita" y la "poligonal circunscrita" al segmento parabólico, respectivamente.

En la proposición 16 se aplica el método de compresión, dividiendo el segmento BΓ en 2^n partes, de manera que la diferencia entre la poligonal circunscrita y la inscrita se reduce al triángulo BΓE (Figura 9), que puede obviamente hacerse menor que cualquier superficie dada. Así, pues:

$$\text{seg BP }\Gamma = 1/3 \,\Delta\, \text{B}\Delta\Gamma$$

La Proposición 17 tiene una intención unicamente "estética", como resulta evidente, ya que el triángulo BΘΓ es algo mucho más "intrínseco" al segmento parabólico. Trivialmente se tiene que:

$$\text{seg BP }\Gamma = 4/3 \,\Delta\, \text{B}\Theta\Gamma$$

La Proposición 24 viene a repetir literalmente la 17, aunque su demostración por exhaución sea completamente diferente. Las proposiciones 18 a 23, preparatorias de la 24, demuestran que las aproximaciones al segmento parabólico conseguidas a partir del triángulo Δ ampliándolo repetidamente con los triángulos análogos Δ_1 y Δ_2 inscritos en los segmentos restantes (Figura 10) para formar el polígono P_n, cumplen las hipótesis del teorema de exhaución.

Por otra parte, se tiene que

$$\Delta_1 + \Delta_2 = 1/4\,\Delta$$

y la situación se repite, evidentemente, en las etapas sucesivas de la aproximación, de modo que:

$$P_n = \Delta + \Delta/4 + \Delta/4^2 + \dots + \Delta/4^n$$

Arquímedes no procede (como se ha venido repitiendo sin parar en los malos libros de texto) "haciendo tender n a infinito", es decir, "sumando" (¡!) la serie geométrica de razón 1/4, menor que 1, para concluir que:

$$seg = \Delta + \Delta/4 + \Delta/4^2 + \dots + \Delta/4^n + \dots = 4/3\,(\Delta)$$

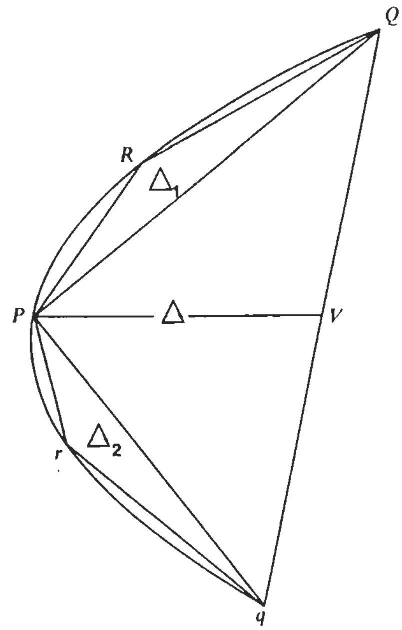


Figura 10

Evidentemente este proceso pudo "verlo" Arquímedes, sin duda. ¡Otra cosa es que pensase que tal "manipulación" tenía la menor garantía de rigor!. Evitando todo fantasioso "paso al límite", Arquímedes demuestra que:

$$\Delta + \Delta/4 + \Delta/4^2 + \dots + \Delta/4^n + 1/3\,(\Delta/4^n) = 4/3(\Delta)$$

cualquiera que sea n (basta ir haciendo las sumas, asociando por la derecha). Y como $1/3\,(\Delta/4^n)$ puede hacerse menor que cualquier superficie dada (teorema de exhaución), tenemos finalmente que:

$$P_1 < P_2 < \dots < P_n < \dots < \begin{cases} seg \\ 4/3\,(\Delta) \end{cases}$$

junto con el hecho de que las dos diferencias con respecto a los P_n, es decir:

$$\frac{\text{seg} - P_n}{4/3\,\Delta - P_n}$$

pueden hacerse menores que cualquier superficie dada, como vimos más arriba.

Es inmediato entonces demostrar que:

$$\text{seg} = 4/3\,(\Delta)$$

sin más que refutar las dos alternativas: seg > 4/3Δ y 4/3 Δ >seg, tal como se hace, en efecto, en la proposición 24, última del libro.

IV. El Libro sobre Conoides y Esferoides

En la larga carta a Dositeo que precede al libro, introduce Arquímedes las figuras que va a estudiar, es decir, los segmentos de *conoide rectángulo* o paraboloide de revolución, de *conoide obtusángulo* o hiperboloide de revolución (según que el cono cortado ortogonalmente a una generatriz sea recto u obtuso, respectivamente), y de *esferoide* o elipsoide de revolución.

A la carta le siguen 32 proposiciones.

A. Las Proposiciones principales del Libro.

La finalidad que persigue aquí Arquímedes es la de determinar el volumen de paraboloide, elipsoide o hiperboloide de revolución, cosa que consigue en las parejas de proposiciones gemelas (la primera para el caso de un segmento recto y la segunda para uno general oblicuo) 19-20, 21-22, 25-26 y 29-30 (Figura 11).

El recurso de Arquímedes para aplicar aquí el método de compresión consiste en partir del cilindro circunscrito al segmento de cuádrica en cuestión, con su mismo diámetro como eje (que será, en general, un cilindro oblicuo) y dividirlo en 2^n partes iguales por medio de planos paralelos a sus bases. La hábil utilización de los cilindros y coronas cilíndricas parciales inscritas y circunscritas al segmento de cuádrica, se ven de la manera más clara en las figuras (véanse las Figuras 12 y 13).

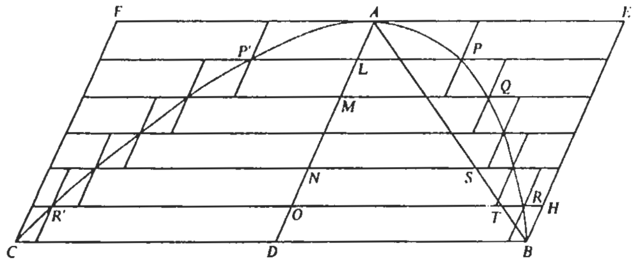
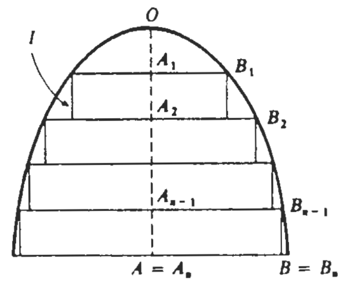


Figura 11

Figura 12



B. Las Proposiciones auxiliares

Las dos primeras proposiciones hacen el papel de lo que podríamos llamar "lemas aritméticos" en la terminología de las integraciones del siglo XVII (Pascal, Fermat, etc.). Hay que subrayar, sin embargo, que en Arquímedes están formulados en un lenguaje puramente geométrico. Las siguientes proposiciones 3 a 18 demuestran propiedades de las cónicas o de las cuádricas obtenidas de ellas, y no nos interesa entrar aquí en detalles, salvo en el caso de las proposiciones 4-5, en las que se compara la elipse con su círculo circunscrito. El proceso es una vez más el de compresión, inscribiendo polígonos de 4n lados en la circunferencia circunscrita a la elipse.

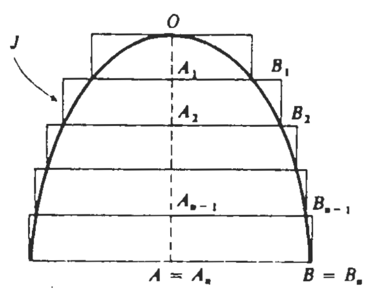


Figura 13

Las dos últimas proposiciones del Libro, las 31-32 demuestran una propiedad complicada de los segmentos de elipsoide, comparados con sus conos inscritos.