HISTOIRE DES LOGARITHMES
UN EXEMPLE DU DÉVELOPPEMENT D'UN CONCEPT EN MATHÉMATIQUES

XAVIER LEFORT
IUT Saint Nazaire. IREM des Pays de Loirè

Il ne faut pas voir l'histoire des mathématiques comme une marche triomphale au milieu d'un boulevard sans obstacle . Bien au contraire, non seulement, cette histoire présente de nombreux à-coup, mais les chemins empruntés s'apparentent rarement à la ligne droite, et il s'est même trouvé quelques impasses ... Il y eut aussi des avancées brusques dûes à des concepts nouveaux et qui ont répondu à des problèmes parfois très éloignés des questions initiales qui les avaient générées .

Les logarithmes sont exemplaires de ce développement cahotique et riche à la fois . Partis d'une idée simple , mais dont la mise en oeuvre nécéssitait un gros travail (la construction des tables), ils ont été d'abord le moteur d'un développement des mathématiques appliquées avant de s'avérer être la solution d'un problème géométrique . Sujets d'études théoriques et approfondies par la suite, ils ont aussi été un outil indispensable pour la modèlisation de multiples phénomènes physiques.

La présentation pédagogique traditionnelle des logarithmes privilégie le logarithme dit»népérien». Il est introduit comme étant la fonction primitive de la fonction inverse s'annulant pour la valeur

1 de la variable. Si cette introduction est mathématiquement satisfaisante, elle est loin d'être évidente pour les élèves et les étudiants et la propriété essentielle est occultée. Bien entendu, le problème historique qui a conduit à la conception des logarithmes est aussi absent alors que son utilisation pour présenter cette nouvelle notion a l'avantage de la simplicité: il s'agit tout simplement de construire une table permettant de faire rapidement des multiplications, divisions et exponentiations.

Aujourd'hui l'utilisation des logarithmes pour le calcul est désuète, mais le concept reste fondamental dans la culture mathématique de base et ils sont très présents tant en physique qu'en chimie . Leur histoire reste sans doute un chapître modeste, mais son exemplarité, voire sa richesse témoignent de ce que présente le développement des Mathématiques.

PROBLEMATIQUE.

L'origine du concept des logarithmes est à trouver dans un problème mathématique, sans doute, mais dans un probleme de mathématique appliquée : il s'agit de simplifier la lourde tâche des calculateurs, excessivement compliquée dès qu'elle implique multiplications, divisions, voire exponentiations ou extractions de racines.

Aux XIV , XV et XVIèmes siècles (et bien sûr avant) les domaines concernés sont moins les questions économiques que les problèmes d'arpentage, et surtout que l'astronomie, en particulier dans ses applications à la navigation . Ces opérations demandent alors une certaine précision. Si les progrès de la numération ont pu faire avancer les choses, comme l'utilisation des chiffres dits arabes, les algoritmes de multiplication et de division sont méconnus; les nombres rationnels, systématiquement écrits sous forme partie entière plus fraction de l'unité, rendent même les additions très compliquées.

On doit au mathématicien arabe IBN JOUNIS d'avoir proposé, au XIeme siecle une méthode, dite prostaphérèse, pour remplacer la multiplication de deux sinus par une somme de mêmes fonctions, et cette méthode restera longtemps en vigueur. La multiplication des sinus (et leur division) est une opération essentielle, puisque tout calcul en géométrie, en particulier la résolution des triangles, est une opération sur des longueurs souvent non mesurables, donc obtenues à partir de mesure d'angles.

C'est à ARCHIMEDE qu'il revient d'avoir eu l'idée fondamentale qui devait générer les logarithmes:

> « Lorsque des nombres sont en proportion continue à partir de l'unité, et que certains de ces nombres sont multipliés entre eux, le produit sera dans la même progression, éloigné du plus grand des nombres multipliés d'autant de nombres que le plus petit des nombres multipliés l'est de l'unité dans la progression, et éloigné de l'unité de la somme moins un des nombres dont les nombres multipliés sont éloignés de l'unité»
>
> (*Arénaire*, trad. VERECKE)

$$\text{Soit} \quad 1, a, a^2, a^3, \ldots, a^n, \ldots, a^m, \ldots, a^n . a^m = a^k$$

$$\text{avec} \quad k - m = n - o \qquad \text{soit} \qquad k = m + n$$

L'idée d'Archimede se retrouve dans les travaux de Chuquet et de Stifel, au XVeme siecle, mais, ni l'un ni l'autre n'ont eu suffisamment d'influence pour imposer la comparaison d'une suite géométrique et d'une suite arithmétique comme moyen de calcul, ou comme nouveau champ d'investigation en mathématique.

D'apres une gravure de R. Cooper portrait de Napier

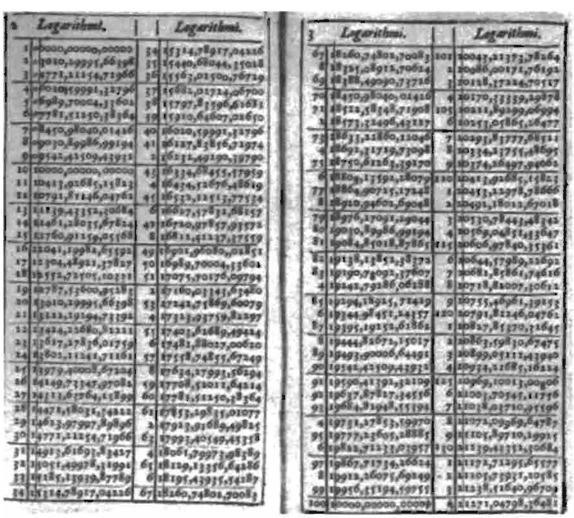
NAPIER ET BRIGGS

John Napier (écrit aussi Neper) est né en1550. De petite noblesse écossaise, il montra toute sa vie un esprit curieux et dynamique, malgré une existence éloignée des centres culturels de l'époque. L'introduction des logarithmes n'est pas son seul titre de gloire, puisqu'il a écrit également un texte sur les équations et imaginé par ailleurs un système de calcul au moyen de réglettes graduées (Rabdologie).

En 1614, il publie le «Mirifici logarithmorum canonis descriptio...» ou, utilisant une approche cinématique, il met en relation une suite géométrique et une suite arithmétique. La première est celle de distances parcourues à une vitesse proportionnelle à elles-mêmes, la seconde, celles de distances parcourues à vitesse constante; celles-ci sont alors les «logarithmes» des premieres (le néologisme est de NAPIER).

L'unité choisie est de 10^7, et l'ouvrage comprend une table des logarithmes des sinus, dont nous avons mentionnés précédemment l'importance, les angles croissant de minute en minute. En 1619 parait un second ouvrage, «Mirifici logarithmorum canonis constructio ...» ou l'auteur explique comment calculer les logarithmes. Cet ouvrage est posthume, puisque Napier meurt en 1617.

Entre-temps, un éminent mathématicien de Londres, Henry Briggs, avait décelé l'importance de ces travaux et fait le déplacement en Ecosse pour en rencontrer l'auteur. Reprenant l'idée fondamentale, mais en adoptant une suite géométrique simple, celle des puissances de 10, il publie en 1617 une première table, avec 8 décimales. Le logarithme d'un nombre x est donc défini comme l'exposant ln de 10, tel que x soit égal à 10 puissance ln.



Premieres tables de Briggs

D'autres tables suivront qui permettront la diffusion de la méthode, en particulier sur le continent.

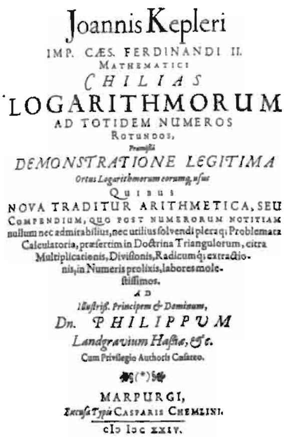
En fait, l'idée était dans l'air; un collaborateur de Kepler, le suisse Bürgi, proposait à la mème époque, pour simplifier les calculs qu'il devait exécuter, de mettre en correspondance une suite arithmétique (nombres rouges) et une suite géométrique (nombres noirs); cependant ses travaux n'ont été publiés qu'en 1620.

PREMIERES UTILISATIONS

C'est d'abord en Allemagne que les logarithmes vont se développer. Au début de 1617, KEPLER, fortuitement à Vienne, a l'occasion de consulter le premier ouvrage de NEPER. Le parcourant rapidement, il commet une erreur d'interprétation. Il en fera part l'année suivante dans une lettre a un ami:

> «Un baron écossais dont je n'ai pas retenu le nom, propose un brillant travail dans lequel il remplace la nécessité de la multiplication et de la division, par la simplicité de l'addition et de la soustraction, sans employer les sinus: en échange, il a besoin de la règle des tangentes: et la variété, la longueur, la lourdeur de l'addition et de la soustraction se substituent à la difficulté des multiplications et divisions».

Or Kepler utilise évidemment la règle des sinus, que ce soit dans un triangle plan ou sphérique; pour lui, le travail de NEPER ne présente pas d'intéret.


Joannis Kepleri
IMP. CÆS. FERDINANDI II.
MATHEMATICI
CHILIAS
LOGARITHMORUM
AD TOTIDEM NUMEROS
ROTUNDOS,
Præmissa
DEMONSTRATIONE LEGITIMA
Ortus Logarithmorum eorumq; usus
QUIBUS
NOVA TRADITUR ARITHMETICA, SEU
COMPENDIUM, QUO POST NUMERORUM NOTITIAM
nullum nec admirabilius, nec utilius solvendi pleraq; Problemata
Calculatoria, præsertim in Doctrina Triangulorum, citra
Multiplicationis, Divisionis, Radicumq; extractionis, in Numeris prolixis, labores molestissimos.
AD
Illustriss. Principem & Dominum,
Dn. PHILIPPUM
Landgravium Hassiæ, &c.
Cum Privilegio Authoris Cæsareo.
MARPURGI,
Excusa Typis CASPARIS CHEMLINI.
cIↃ IↃc XXIV.

Dans le courant de 1618, il a cependant en main l'ouvrage de Benjamin Ursinus: «Trigonometria Logarithmica John Neperi»; il reconnait alors son erreur et se montre enthousiaste de ce nouveau calcul. En 1619, enfin, le livre «Mirifici Logarithmorum descriptio» arrive à Linz, chez Kepler, lequel entreprend assez rapidement d'en modifier le concept pour l'adapter à ses besoins. Son adhésion est telle qu'il dédie ses éphémerides de1620 (parues fin 1619) au «célèbre et noble seigneur John Neper, baron de Merchiston».

La diffusion sur le continent de cette nouvelle notion est surtout due aux tables publiées par le flamand Adrien Ulacq, en 1628, reprenant les tables de Briggs . Le but était de fournir un traité de calcul pratique, en particulier à l'usage des arpenteurs. Les premières tables furent suivies d'autres, de plus en plus précises, et mentionnant leur utilisation prioritaire pour les calculs trigonométriques.

La méthode de construction des tables passe d'abord, évidemment par la détermination des logarithmes des nombres premiers; les autres sont alors calculés par simple sommation. Il s'agit en fait de prendre soit des «moyennes proportionnelles, soit des racines carrées». Euler écrira en 1748:

> «ainsi en prenant des moyennes proportionnelles, on est parvenu à trouver Z=5,000000, à quoi répond le logarithme cherché 0,698970, en supposant la base logarithmique=10. Par conséquent $10^{\frac{69897}{100000}} = 5$ à peu prés. C'est de cette maniere que Briggs et Ulacq ont calculé la table ordinaire des logarithmes, quoiqu'on ait imaginé depuis des méthodes plus expéditives.»

$A = 1,000000$;	$lA = 0,0000000$	
$B = 10,000000$;	$lB = 1,0000000$	$C = \sqrt{AB}$
$C = 3,162277$;	$lC = 0,5000000$;	$D = \sqrt{BC}$
$D = 5,623413$;	$lD = 0,7500000$;	$E = \sqrt{CD}$
$E = 4,216964$;	$lE = 0,6250000$;	$F = \sqrt{DE}$
$F = 4,869674$;	$lF = 0,6875000$;	$G = \sqrt{DF}$
$G = 5,232991$;	$lG = 0,7187500$;	$H = \sqrt{FG}$
$H = 5,048065$;	$lH = 0,7031250$;	$I = \sqrt{FH}$
$I = 4,958069$;	$lI = 0,6953125$;	$K = \sqrt{HI}$
$K = 5,002865$;	$lK = 0,6992187$;	$L = \sqrt{IK}$
$L = 4,980416$;	$lL = 0,6972656$;	$M = \sqrt{KL}$
$M = 4,991627$;	$lM = 0,6982421$;	$N = \sqrt{KM}$
$N = 4,997242$;	$lN = 0,6987304$;	$O = \sqrt{KN}$
$O = 5,000052$;	$lO = 0,6989745$;	$P = \sqrt{NO}$
$P = 4,998647$;	$lP = 0,6988525$;	$Q = \sqrt{OP}$
$Q = 4,999350$;	$lQ = 0,6989135$;	$R = \sqrt{OQ}$
$R = 4,999701$;	$lR = 0,6989440$;	$S = \sqrt{OR}$
$S = 4,999876$;	$lS = 0,6989592$;	$T = \sqrt{OS}$
$T = 4,999963$;	$lT = 0,6989668$;	$V = \sqrt{OT}$
$V = 5,000008$;	$lV = 0,6989707$;	$W = \sqrt{TV}$
$W = 4,999984$;	$lW = 0,6989687$;	$X = \sqrt{WV}$
$X = 4,999997$;	$lX = 0,6989697$;	$Y = \sqrt{VX}$
$Y = 5,000003$;	$lY = 0,6989702$;	$Z = \sqrt{XY}$
$Z = 5,000000$;	$lZ = 0,6989700$;	

Sic ergo mediis proportionalibus sumendis tandem perventum est ad $Z = 5,000000$, ex quo Logarithmus numeri 5 quaesitus est 0,698970, posita basi Logarithmica = 10. Quare erit proxime $10^{\frac{69897}{100000}} = 5$. Hoc autem modo computatus est canon Logarithmorum vulgaris à BRIGGIO & VLACQUIO, quamquam postea eximia inventa sunt compendia, quorum ope multo expeditius Logarithmi supputari possunt.

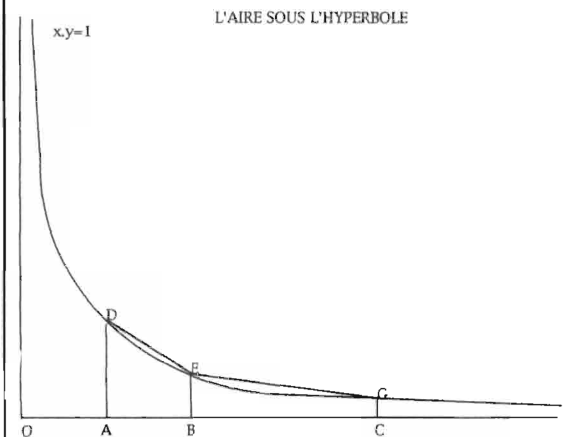
107. Dantur ergo tot diversa Logarithmorum systemata quot varii numeri pro basi a accipi possunt, atque ideo numerus systema-

L'AIRE SOUS L'HYPERBOLE.

Bien sûr, l'étape essentielle du développement mathématique du concept se trouve dans son rapprochement avec l'hyperbole. On la doit au jésuite Gregoire de Saint-Vincent, né à Bruges en1584. Il avait achevé la rédaction d'un «Opus géométricum...» en 1630, dans lequel il prétendait avoir résolu le problème des quadratures du cercle et de l'hyperbole. Cet ouvrage ne fut publié qu'en 1647, et s'il est un échec quant à la quadrature du cercle, il met en évidence que les aires sous l'hyperbole s'apparentent aux logarithmes.

Le travail de cet auteur ne se situe pas dans une perspective liée spécifiquement aux logarithmes, mais plutot dans une tentative de résolution de problèmes généraux de quadratures, très à la mode à l'époque et dans un style tout à fait traditionnel ; l'aspect novateur réside dans l'utilisation d'un certain passage à l'infini pour justifier la premiere partie de sa démonstration. Nous sommes cependant encore avant l'ère de Leibniz et de Newton...

Le rapprochement du calcul de l'aire sous l'hyperbole avec les logarithmes n'est donc pas de Gregoire de Saint-Vincent lui-même; son oeuvre, d'abord méconnue, a fait l'objet de critiques, fondées d'ailleurs en ce qui concerne la quadrature du cercle. C'est un de ces défenseurs, le jésuite Sarassa qui mentionnera que «les aires hyperboliques peuvent tenir lieu de logarithmes»:



Les trapezes ADEB et BEGC sont égaux ;
En effet, si OB=k.OA et OC=k.OB (suite géométrique), la surface du premier trapèze vaut AB.(AD+BE).1/2
= (OB-OA).(1/OA +1/OB).1/2
= (k-1).OA.(1/OA +1/k.OA).1/2
constant par simplification.
GREGOIRE DE SAINT-VINCENT montre par ailleurs que les surfaces entre la courbe et DE d'une part et EG d'autre part sont égales, donc les surfaces sous l'hyperbole sont égales...

Le calcul de Gregoire de Saint-Vincent repose sur le fait que, lorsque les abcisses sont en suite géométrique, les surfaces sont en suite arithmétique.

Prenons la plus simple des hyperboles, d'équation xy = 1, rapportée à un repère orthonormal . A, B, C,... seront des points de l'axe des abcisses (axe des «x») en suite géométrique; D, E, G,... seront alors les points de l'hyperbole de mêmes abcisses. Gregoire de Saint-Vincent montre d'abord que les surfaces entre la courbe et DE d'une part, EG d'autre part sont égales ; les trapèzes ADEB et BEGC ayant même surface, les aires sous l'hyperbole sont égales.

On trouvera quelques années plus tard , dans certains manuels de géométrie , tel celui de Pardies (1671), l'énoncé du résultat trouvé par de Saint-Vincent, mais c'est loin d'être le cas général, et Pardies était aussi un jésuite!

STATUT MATHÉMATIQUE

Si l'aspect analytique du logarithme, en d'autres termes le statut de fonction, avait déja été envisagé par Kepler, il revient à Torricelli, puis à Huygens d'étudier la courbe logarithmique et à Wallis, après un premier travail de Mercator d'en proposer un développement en série (1667).

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$$

en

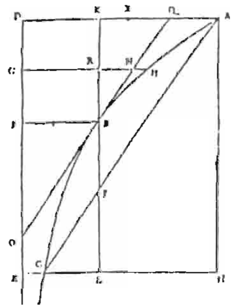
$$Log x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Cette technique est alors nouvelle, elle est sans doute l'un des rares intérets de l'ouvrage de Mercator ; en effet cet auteur ne semble pas avoir su développer l'idée initiale, à savoir l'intégration de la série:

Ce nouvel aspect permet alors un calcul plus aisé des logarithmes des nombres et on le trouvera par la suite dans les manuels du XVIIIeme siecle.

En ce qui concerne la courbe de la fonction logarithme, dite «courbe logarithmique», Torricelli en propose le tracé dès 1646, dans des lettres à ses correspondants, mais sa mort en 1647 en retarde la diffusion. C'est plus à Huygens qu'il reviendra d'en exposer les propriétés dans son «Discours de la cause de la pesanteur», paru en 1690 . Huygens s'était intéressé dès1651 aux logarithmes et à leur calcul, en particulier dans le cadre de la quadrature de l'hyperbole; il avait repris le problème beaucoup plus tard (1666) alors qu'il partcipait aux travaux de la toute nouvelle Académie Royale des Sciences de Paris, et avait utilisé la notion dans des questions de probabilité et de combinatoire.

Dans la premiere supposition, où les resistances sont comme les vitesses, je remarquay que, pour trouver les espaces passez en de certains temps, lors que les corps tombent ou montent perpendiculairement, & pour connoitre les vitesses au bout de ces temps, il y avoit une ligne courbe, que j'avois examinee long temps auparavant, qui estoit de grand usage en cette recherche. On la peut appeller la *Logarithmique* ou la *Logistique*, car je ne vois pas qu'on luy ait encore donné de nom, quoyque d'autres l'aient encore considerée cy devant. Cette ligne infinie estant A B C, elle a une ligne droite pour Asymptote, comme D E ; dans la quelle si on prend des parties égales quelquonques qui se suivent, comme D G, G F, & que l'on tire des points D, G, F, des perpendiculaires jusqu'à la courbe, sçavoir D A, G H, F B, ces lignes seront proportionelles continuës. D'où l'on voit qu'il est aisé de trouver autant de points qu'on veut dans cette courbe ; de la quelle je raporteray par apres quelques proprietez qui meritent d'estre considerées.



Les logarithmes à cette époque font alors réellement partie du corpus mathématique; il ne s'agit plus d'une simple méthode de calcul, mais bien d'un domaine à part entière. Ils se trouvent dans nombre d'ouvrages, leur statut théorique ne posant plus problème.

L'OUTIL LOGARITHMIQUE

La fin du XVIIème siecle voit les débuts de la physique mathématique, et l'outil proposé par les logarithmes lui sera d'un secours certain. C'est bien sûr, ce qui a été dit plus haut, le «Discours de la cause de la pesanteur « de Huygens, mais ce sont aussi les différents travaux sur la pression atmosphérique, en particulier ceux de Mariotte.

Il faut voir l'utilisation des logarithmes suivant quatre directions:

➪ la première est celle qui les a générés, à savoir le calcul de formules géométriques, utilisées en astronomie et par application en navigation, ainsi, plus simplement, qu'en arpentage . On publiera beaucoup de tables d'un format «de poche» pour une utilisation sur le terrain ou à bord des vaisseaux . Ces tables seront précédées d'un mode d'emploi et comprendront bien sûr une table des logarithmes des sinus.

➪ la seconde, plus simplement encore, est celle de l'application à tout calcul multiplicatif . Elle a conduit à la construction des «règles à calcul», à l'emploi par tout apprenti bachelier d'une table pour toute opération en sciences physico-chimiques et à l'élaboration d'algorithmes pour les machines à calculer contemporaines .

➪ la troisième consiste à conjecturer à partir d'expériences des modèles ou les logarithmes entreront en jeu par comparaison de valeurs . Mettre en évidence un rapport entre des mesures en suite arithmétique avec une autre série en suite géométrique conduira à estimer le premier phénomène comme un logarithme du second . Les échelles logarithmiques sont aujourd'hui monnaie courante...

➪ la dernière est toute théorique; l'introduction par Leibniz et Newton du calcul différentiel et intégral permettra nombre de raisonnements analytiques, concernant des phénomènes physiques ou chimiques, pouvant conduire par simple intégration des inverses à des résultats logarithmiques.

Les logarithmes utilisés dans les trois premiers cas seront ceux de Briggs, c'est àdire les logarithmes décimaux. Par contre l'intégration met en oeuvre les logarithmes «naturels», appelés «néperiens» en hommage au père fondateur.

EXPLORATION MATHEMATIQUE

Dans le domaine des mathématiques pures, les logarithmes introduisent de nouvelles grandeurs transcendantes . Ils contribuent donc à élargir le champ de compréhension du numérique ; Cependant, on ne peut parler de fonction, donc de fonction logarithme, au sens moderne, avant qu'Euler n'intervienne dan la seconde partie du XVIIIème siècle . Ceci n'empêche pas Leibniz et Newton d'utiliser les relations: (écrites de façon actuelle)

$$\frac{d\ln x}{dx} = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln x$$

comme l'atteste un manuscrit du premier auteur daté de 1675 .

C'est Euler encore qui, dans les «Institutions de calcul intégral» publiées de 1768 à1770 traitera de façon magistrale de l'intégration des logarithmes . L'utilisation de l'intégration par parties est systématique et conduit à une dernière opération soit directement intégrable soit développable en série entière .

Par ailleurs au début du XVIIIème siecle, Leibniz et Jean Bernoulli développent une controverse sur l'existence de logarithmes de nombres négatifs, voire imaginaires. Euler , en 1749, donnera une conclusion au débat en abandonnant le caractere univoque du logarithme; un nombre a une infinité de logarithmes (complexes) dont un seul (à une constante multiplicative près) est réel.

Enfin, il est nécéssaire d'évoquer l'exponentielle, dont on admet qu'elle a été introduite par Leibniz et Jean Bernoulli, dans le cadre de leurs travaux en analyse . Cette nouvelle notion sera développée par Euler, et lui permettra de résoudre le problème de la Chaînette dans son «initiation à l'analyse infinitésimale « de 1748 .

EN CONCLUSION

Depuis leur introduction, les logarithmes se sont retrouvés dans les manuels d'arithmétique comme dans ceux d'analyse . Objet et méthode, ils ont participé du développement des Mathématiques, mais aussi de l'histoire des sciences physico-chimiques . La ph-métrie n'aurait par exemple pu ètre conçue au début du XXème siècle sans le secours de ce concept mathématique . Partis d'une idée en fait très simple, ils demeurent un outil peut-ètre modeste, mais malgré tout essentiel de la connaissance scientifique.