LA MATEMÁTICA ÁRABE DURANTE LA EDAD MEDIA

Juan Tarrés Freixenet
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

1. Origen y expansión del Islam

Desde mediados del siglo VII, el Islam ha constituído uno de los fenómenos más sorprendentes y significativos de la Historia. Su concepción religiosa varió el destino de muchos pueblos, no solamente en el aspecto espiritual sino también en lo que se refiere a cuestiones políticas, económicas, culturales e intelectuales.

Como es sabido, la cuna del Islam está en Arabia, país situado en la Península Arábiga; ésta se muestra como una fortaleza doblemente fortificada, formada en su mayor parte de grandes extensiones desérticas y protegida del Mar Rojo y del Mar de Omán por sendas cadenas montañosas. Solamente los valles que se sitúan en la vertiente del Golfo Pérsico son tierras algo más hospitalarias.

Con esta disposición geográfica, la Península Arábiga apenas sufrió invasiones que modificaran sus estructuras sociales y políticas mientras que, por el contrario, sus habitantes invadían los territorios limítrofes cada vez que los regímenes políticos de éstos se debilitaban.

En los siglos V y VI tiene lugar una profunda crisis política y económica en Arabia. Es entonces cuando surge la figura de Mahoma, que comienza a predicar una nueva doctrina monoteísta entre los años 610-614 con una idea básica: la constitución de una comunidad de creyentes con criterios de igualdad y solidaridad entre los hombres. Esta idea impulsa la unidad de las diferentes tribus de la Península Arábiga y favorece la conversión de sus componentes a la nueva religión. Esta se implanta en primer lugar en las clases sociales más bajas, en contraposición al politeísmo de los sectores dominantes.

El año 622, perseguido, Mahoma huye de La Meca a Medina, donde funda una coalición de tribus árabes que se habían adherido al Islam. Comienza entonces lo que se ha llamado la era de la Hégira. El propio Mahoma es reconocido como Profeta de Alá y el año 622 queda declarado como año 1 del nuevo calendario musulmán. El año 630, Mahoma entra vencedor en La Meca y allí fallece dos años más tarde.

Los sucesores del Profeta se convierten en Califas y emprenden la llamada Guerra Santa. Se obtienen las primeras victorias bélicas debidas, en parte, a la debilidad de los imperios Bizantino y Sasánido. Ya en el año 637 reinaban en Siria e Irán; el 642, en Egipto, el 711, cruzan Gibraltar y el 712, conquistan Kharezm y el Pendjab. A mediados del siglo VIII, sus dominios comprendían la Península Ibérica (excepto el Reino de los Astures), los territorios africanos del Mediterráneo, el Próximo Oriente, gran parte de Asia Menor, el Cáucaso, el Asia Central y parte del valle del Indo.

Los primeros califas pertenecían a la tribu de los Omeyas, que fueron los que fundaron el Imperio Arabe, con capital en Damasco. A la caída de los Omeyas, el poder pasó a los Abasís; el segundo Califa de esta dinastía, al-Mansur, fundó la ciudad de Bagdad el año 722 y trasladó allí la capital del Imperio.

A medida que éste se ampliaba, la mayoría de la población conquistada se iba convirtiendo a la nueva religión, lo que facilitó la implantación de la lengua árabe (la única permitida en la liturgia del Islam) de manera generalizada.

En los países conquistados, los árabes encontraron culturas que, en general, eran superiores a la suya, pero que asimilaron muy rápidamente, para emprender más tarde la consolidación de una nueva cultura propia de características bien definidas.

El pragmatismo imperante en la filosofía islámica indujo a sus pensadores a recoger la herencia cultural del mundo antiguo, en especial de Grecia. Por otra parte, el comercio favoreció intercambios con las tradiciones culturales de la India, China, Bizancio, Rusia y todos los países del Mediterráneo.

2. La ciencia árabe. La escuela matemática de Bagdad

El año 718, el Califa Omar II (717-720) ordena el cierre del Museo de Alejandría y manda a sus sabios que se instalen en Antioquía. Ya en la época de los Abasís, las escuelas sirias se trasladan a Harran, para instalarse más tarde en Bagdad. De esta manera, a finales del siglo VIII y comienzos del IX se habían agrupado en esta ciudad gran cantidad de sabios y traductores.

Los Califas al-Mansur (754-775) y Harun al-Rasid (786-809), los héroes de «Las Mil y Una Noches», fomentaron el desarrollo de las Ciencias Naturales y las Matemáticas. Bajo el reinado de este último se fundó una importante biblioteca en Bagdad con manuscritos procedentes de Bizancio.

Al-Ma'mun (813-833) agrupó los sabios de Bagdad en una especie de Academia: LA CASA DE LA SABIDURIA que, además de la Biblioteca, disponía de un Observatorio muy bien equipado. Así, Bagdad se convirtió en el primer centro científico del Califato.

En la Casa de la Sabiduría se constituyó una escuela matemática que desplegó su actividad durante unos dos siglos. Fue entonces cuando se tradujeron al árabe las obras más importantes de Euclides, Arquímedes, Herón, Ptolomeo y Diofanto, que se convirtieron en manuales de uso cotidiano.

La diferencia entre la Matemática árabe y la de otras escuelas viene marcada por la influencia de Grecia, que lleva a los matemáticos islámicos a dar formulaciones rigurosas de los distintos temas, presentar demostraciones de los enunciados, clasificar de manera sistemática las diferentes cuestiones y desarrollar exposiciones completas de cada tema abordado.

El primer sabio eminente de la Escuela Matemática de Bagdad fue Muhammad al-Huwarizmi, considerado el autor clásico de las Matemáticas Islámicas y al que nos referiremos en diferentes ocasiones. Desplegó su actividad científica durante el reinado del Califa al-Ma'mun y falleció el año 833.

De la misma época son al-Haggag, primer traductor de los Elementos, y al-Gauhari, que publicó diversos comentarios sobre dicha obra. Otros sabios importantes de los siglos IX y X son los tres hermanos banu-Musa, Thabit-ibn-Qurra, Abu-al-Wafá, al-Kuhi y al-Karagi.

3. La aritmética islámica

3.1. El sistema de numeración decimal

Los musulmanes fueron los primeros en escribir los números tal como lo hacemos ahora. Se puede afirmar que si bien nos podemos considerar herederos de los griegos en lo que concierne a la Geometría, podemos decir que nuestra Aritmética es, en buena parte, un legado de los árabes.

El sistema de numeración decimal se había usado ya en la India: se sabe que no lo utilzaba el astrónomo Aryabhta, nacido el año 476, pero sí lo utilizó su discípulo Bhaskara I ya en el año 520.

Ya en el mundo árabe, al-Huwarizmi es el primero que presta una atención especial al sistema de numeración decimal y las operaciones efectuadas haciendo uso del mismo. En su obra «Libro de la Adición y la Sustracción a partir del cálculo de los hindús», escribe:

> «... hemos decidido exponer aquí la forma de contar de los hindús con la ayuda de nueve caracteres y enseñar como, gracias a su simplicidad y concisión, estos caracteres permiten expresar todos los números».

En dicha obra se describen con detalle las diferentes operaciones del cálculo comenzando con la adición y la sustracción, incluyendo en esta última el caso en que el sustraendo tiene algunas cifras mayores que las correspondientes del minuendo. En la traducción latina de esta obra conservada en Cambridge no aparece ningún ejemplo de este último caso, aunque en los comentarios a la obra del autor español Juan de Sevilla si pueden encontrarse ejemplos de la situación descrita, lo que puede hacer pensar que se trata de algún añadido posterior a la obra original de al-Huwarizmi. Se describen con detalle los algoritmos que permiten multiplicar o dividir un número por otro con el nuevo sistema de numeración, y se ponen ejemplos de los mismos.

La numeración de posición se fue imponiendo con gran lentitud. Una gran parte de la población seguía utilizando el sistema estrictamente literal: así están escritos los números en el «Libro de la Aritmética necesaria a Escribas y Comerciantes», escrito por Abú-l-Wafá entre los años 961 al 976, y otro tanto ocurre con el célebre libro de Aritmética de al-Karagi, «Libro que resulta suficiente para la ciencia de la Aritmética» escrito a finales del siglo X y comienzos del XI.

Unos 150 años después de que al-Huwarizmi escribiera su libro de Aritmética nació, en la región situada al Sur del Mar Caspio, Kusiar ibn Labban al-Gili. Pese a que fue un renombrado astrónomo, apenas si se conoce algún dato de su vida, pero su obra tuvo una cierta influencia y su tratado de Aritmética «Principios del Cálculo de los Hindús» se convirtió en uno de los libros de Aritmética más importantes en el mundo islámico.

Este libro es una breve pero excelente introducción a la Aritmética. Está dividido en dos partes: la primera contiene nueve secciones referidas a la aritmética decimal, comenzando por «la comprensión de la forma de los nueve dígitos», que designa con los signos siguientes:

Fig. 1

y explica el sistema decimal de numeración. Introduce también el cero como el símbolo que debe colocarse en el lugar en el que «no aparece ningún número» y pasa a las restantes secciones de esta primera parte, dedicadas a las distintas operaciones aritméticas.

Las dieciseis secciones de la segunda parte contienen una exposición de la aritmética sexagesimal, que era la utilizada en astronomía y el libro concluye con una sección en la que se indica cómo extraer la raíz cúbica de un número en el sistema decimal de numeración.

3.2. Las fracciones decimales

En el mundo islámico era habitual representar el resultado de la fracción restante de una división mediante el uso de fracciones sexagesimales. No obstante, de manera progresiva se fueron introciendo las fracciones decimales, una novedad exclusiva de los matemáticos del Islam. Los primeros indicios acerca de la definición y establecimiento de tales fracciones lo podemos encontrar en el «Tratado de Aritmética Hindú» de al-Uqlidisi, escrito en Damasco durante los años 952-953. El nombre de al-Uqlidisi indica que el autor se dedicaba a copiar manuscritos de Euclides, pero aparte de este detalle, no se conoce nada más de su vida, pese a que parece ser el primer hombre que utilizó las fracciones decimales con la ayuda de un punto (o una coma) y, por lo tanto, fue pionero en la escritura de dichos números tal como lo hacemos en la actualidad.

Hagamos notar, sin embargo, que el propio al-Uqlidisi dice explícitamente en el prólogo de su obra que había recopilado los mejores métodos de los autores que le precedieron. Esto induce a poner en duda su paternidad en lo que concierne a las fracciones decimales, pero lo que está fuera de cualquier discusión es que las fracciones decimales son un descubrimiento de las Matemáticas del mundo Islámico.

Las fracciones decimales aparecen en la segunda parte del libro de al-Uqlidisi:

> «... dividir uno por la mitad en cualquier posición es cinco en la posición anterior y esto hace necesario que cuando se calcula la mitad de un número impar se halle la mitad de la unidad en la posición anterior, para lo que colocamos una señal sobre dicha unidad para distinguir la posición. En consecuencia, el valor de la posición de la unidad es diez veces la posición que la precede. Ahora, el cinco puede partirse en dos, exactamente igual que los demás números y el valor de la posición de la unidad en la segunda mitad es cien veces la posición de esta última, y esto puede continuar indefinidamente».

Como ejemplo de lo expuesto, calcula cinco veces la mitad de 19, con lo que obtiene 0,59375 y dice que «la posición de la unidad es cien mil veces la que está más a la izquierda (derecha en nuestro sistema de escritura)».

Las fracciones decimales que aparecen en la obra de al-Uqlididsi no están enmarcadas dentro de una teoría sistemática y se utilizan exclusivamente para dar sentido a determinados cálculos. Esta sistematización puede encontrarse dos siglos más tarde en los escritos de al-Samaw'al, quien en su tratado de Algebra de 1172 introduce las fracciones decimales como parte de un método general de aproximación de números con la precisión que se desee y dentro del contexto de la división y la extracción de raíces cuadradas. Es decir, utiliza las fracciones decimales como parte de una teoría y no como un mero instrumento auxiliar de cálculo.

3.3. El cálculo de raíces

Ya hemos visto que los árabes fueron perfeccionando los distintos métodos de cálculo para las cuatro operaciones fundamentales de la Aritmética. Nos referiremos ahora a la extración de raíces.

En su libro, al-Gili dedica un capítulo a la extracción de raíces cuadradas; an-Nasawi, fallecido el año 1029 ó 1030, en su «Libro que contiene todos los conocimientos de la Aritmética Hindú» dio por primera vez un procedimiento para el cálculo de raíces cúbicas, análogo al empleado en la China antigua.

Abu-l-Wafà escribió el «Libro sobre la determinación de los lados de un cubo, del cuadrado y lo relacionado con ellos» en el que se dan métodos para la extracción de raíces cúbicas, cuartas y séptimas. Asimismo, al-Biruni, que vivió entre los años 973 y 1048, tenía un tratado, que no ha llegado a nuestros días, sobre el cálculo de raíces cúbicas y otras de orden superior.

El poeta y matemático Omar al-Khayyam, nacido en 1123, describe un procedimiento general que permite el cálculo de raíces de índice arbitrario de los números enteros en la obra «Las dificultades de la Aritmética», y en su «Algebra» dice haber encontrado una demostración aritmética del método hindú de extracción de raíces cuadradas y cúbicas, procedimiento que se apoya en la fórmula del cuadrado y el cubo de un binomio y que el propio al-Khayyam extiende a exponentes enteros arbitrarios.

Ya en el siglo XV, al-Kasí escribió el libro «La clave de la Aritmética». Se trata de un compendio de Matemáticas elementales que incluye Aritmética, Algebra y Geometría Métrica y que contiene un detallado estudio de las fracciones decimales, una tabla de los coeficientes de las potencias de un binomio y algoritmos para la extracción de raíces de orden superior con aproximaciones realmente notables.

4. La geometría

La Geometría islámica recibe la influencia de la Grecia clásica por tres caminos distintos:

1. Los Elementos de Euclides que, como ya hemos dichos, fueron traducidos en Bagdad en el siglo VIII bajo el mecenazgo de los Califas Harum al-Rashid y al-Ma'mun.

2. Arquímedes y su tratado «Sobre la Esfera y el Cilindro». En el prólogo de este libro menciona, sin entrar en detalles, su descubrimiento sobre el cálculo del área de un segmento de parábola. Esto estimuló a Thabit ibn Qurra y su nieto Ibrahim ben Sinan a buscar con éxito demostraciones de dicho resultado.

Otro problema propuesto por Arquímedes en la segunda parte de su obra es el de dividir una esfera en dos segmentos cuyas áreas guarden entre sí una relación dada. Esta cuestión dio lugar a profundas investigaciones tanto en el campo del Algebra como en el estudio de las Secciones Cónicas.

Un segundo libro atribuído a Arquímedes según fuentes árabes pero desconocido en griego es «El Heptágono y el Círculo»; traducido al árabe por Thabit ibn Qurra, estudia la construcción del polígono regular de siete lados, que no había sido abordada por Euclides.

3. «Las Cónicas», de Apolonio de Perga, que consta de ocho libros, escrito alrededor del año 200 a.C. Se trata de una obra difícil de la que sólo se conservan en griego los cuatro primeros libros, pero en árabe sobreviven siete de ellos. Esta obra constituyó la base de muchas investigaciones avanzadas en Optica y Geometría.

4.1. Las Secciones Cónicas

Como acabamos de señalar, Apolonio y su obra «Las Cónicas» influyeron de manera decisiva en el estudio de dichas curvas en el mundo islámico. Para los árabes, el estudio de las secciones cónicas va más allá de la Geometría pura: la hipérbola es esencial para la construcción de relojes de Sol, mientras que la parábola se utilizaba para el diseño y realización de espejos incendiarios.

Existían métodos prácticos para el trazado de tales secciones, utilizados por los artesanos. Asimismo, se escribieron diversos tratados acerca de esta cuestión, uno de los más importantes es el libro «Sobre el trazado de las tres secciones cónicas», de Ibrahim ben Sinan, nacido el año 909 y fallecido el 947, nieto de Thabit Ibn Qurra, como ya hemos dicho. En esta obra se puede encontrar una discusión completa y rigurosa, con demostraciones, de procedimientos para el trazado de la parábola y la elipse, así como tres métodos para el dibujo de la hipérbola. Por otra parte, en sus trabajos sobre los relojes de Sol, estudia el diseño de todos los tipos posibles de los mismos mediante un método unificado.

Veamos, a modo de ilustración, el procedimiento utilizado para el trazado de la parábola (Fig. 2):

Sobre una recta AG se sitúa un punto arbitrario B y se traza la recta BE, perpendicular a AG

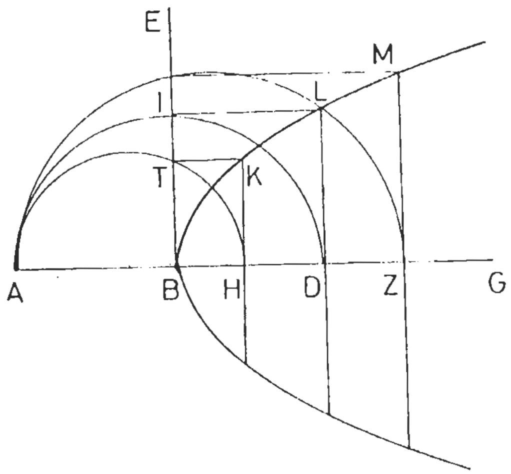

Fig. 2

En el segmento BG se marcan puntos arbitrarios H,D,Z,... Las semicircunferencias de diámetros AH, AF, AZ,... determinan, respectivamente, los puntos T, I, E,... de la recta BE. Los puntos K, L, M,... de la figura pertenecen a la parábola de vértice B, eje AG y parámetro AB.

4.2. Construcción del heptágono regular

Era ésta una construcción geométrica que permanecía oscura y sin una justificación satisfactoria desde la época griega. Como ya se ha dicho, Arquímedes había dado un método de construcción que no había justificado suficientemente (Fig. 3):

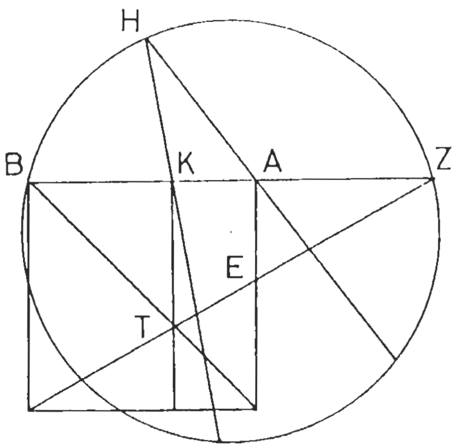

Fig. 3

Se traza el cuadrado ABDG y su diagonal BG. Se dibuja la línea recta DTEZ de manera que el área del triángulo AEZ coincida con la del triángulo ETG. Se traza el segmento KTL, paralelo al lado AG y se prueba:

$$BA \cdot BK = ZA^2 \qquad KZ \cdot KA = KB^2$$

Finalmente, dado el triángulo KHA tal que KH = KB y AH = AZ, Arquímedes prueba que el arco BH es la séptima parte de la circunferencia que determinan B,H y Z.

A la vista de este método, el matemático musulmán del siglo X, Abú-l-Jud plantea algunas consideraciones acerca del mismo:

Si la recta DZ se aproxima al punto A, el triángulo AEZ se hace tan pequeño como se quiera, mientras que el triángulo DTG se aproxima a la cuarta parte del cuadrado. Por otra parte, si la misma recta DZ se acerca a G, el triángulo AEZ se hace cada vez mayor, y DTG, arbitrariamente pequeño. Por lo tanto, existe una posición intermedia para la cual los dos triángulos mencionados tienen áreas iguales.

En opinión de Abu-l-Jud, el procedimiento de Arquímedes es una demostración de existencia para la construcción del heptágono regular, pero no una construcción propiamente dicha.

Tal construcción fue abordada durante la segunda mitad del siglo X, fundamentalmente por Abu Sahl al-Kuhi, científico originario de la región de las montañas situadas al sur del Mar Caspio. Obtuvo una solución satisfactoria mediante el empleo del método de Análisis y Síntesis, que consiste en suponer el problema resuelto y razonar a través de reducciones sucesivas.

Veamos, siquiera de manera esquemática, el procedimiento usado por al-Kuhi:

I. Del heptágono al triángulo

Supongamos que en la circunferencia ABG (Fig. 4) se ha inscrito un heptágono regular, uno de cuyos lados es el segmento BG. Tomemos un punto A de la circunferencia tal que AB = 2·BG

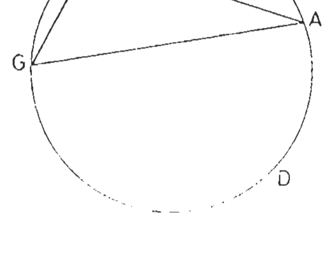

Fig. 4

Se tiene entonces: $A\hat{B}G = 3 \cdot BG$, $A\hat{D}G = 4 \cdot BG$, con lo que $\hat{B} = 4 \cdot \hat{A}$ y $\hat{G} = 2 \cdot \hat{A}$. El problema se reduce, pues a la construcción de un triángulo cuyos lados estén en la relación 4:2:1.

II. Del triángulo a la división del segmento

Sea ABG un triángulo tal que $\hat{B} = 2 \cdot \hat{G} = 4 \cdot \hat{A}$ (Fig. 5)

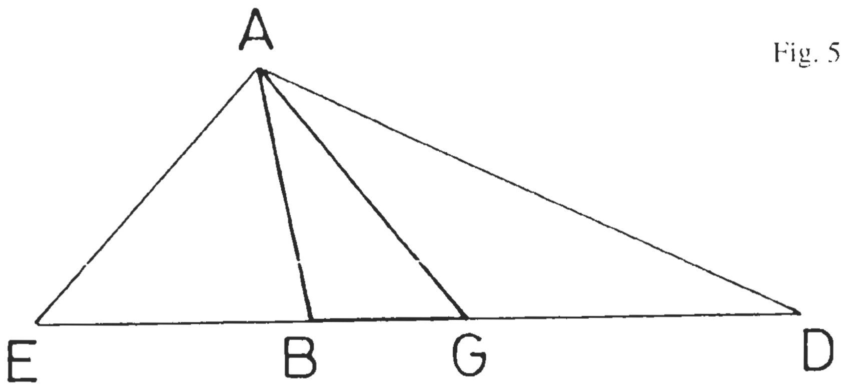

Fig. 5

Se prolonga el segmento BG hasta los puntos D y E de manera que DG = GA y EB = BA. Hay que probar que los ángulos BAG y ADG son iguales, así como los ángulos BAE y BGA, con lo que se tienen los triángulos semejantes ABG y DBA por un lado, y AEB y GEA, por otro.

La semejanza de los triángulos anteriores conlleva:

$$AB^2 = BD \cdot BG \qquad EA^2 = EG \cdot EB$$

y como AB = BE y además, $\hat{E} = B\hat{A}E = \hat{G}$, se cumple la igualdad de los segmentos AE = AG = DG, con lo que:

$$DG^2 = EB \cdot EG \qquad BE^2 = BD \cdot BG$$

Así, la construcción del heptágono regular conlleva la división de un segmento ED por dos puntos B y G, de forma que se cumplan las dos últimas relaciones.

III. Del segmento dividido a las secciones cónicas

Consideremos ahora un segmento lineal ED dividido por dos puntos B y G (Fig. 6) de manera que se verifiquen las dos relaciones indicadas:

$$DG^2 = EB \cdot EG \qquad BE^2 = BD \cdot BG$$

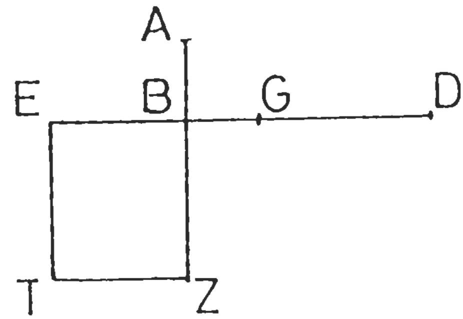

Fig. 6

Construimos el segmento ABZ, perpendicular a ED, de tal forma que es AB = BG y BZ = GD, y completamos el rectángulo BZET.

Se demuestra entonces que el punto T pertenece a la parábola de vértice A y parámetro BG. Asimismo, el punto T pertenece también a la hipérbola de vértice B y lado transverso y parámetro iguales a BG.

IV. Construcción

El análisis anterior conduce a la construcción de dos cónicas (una parábola y una hipérbola) determinadas por la división del segmento ED por los puntos B y G.

El punto T, intersección de las dos cónicas, determina las longitudes ET y TZ, que producen los segmentos restantes DG = ET y BE = TZ.

Luego, dado BG, lado del heptágono que se desea construir, podemos fijar el segmento EBGD y el triángulo ABG con lo que, finalmente, podremos trazar el heptágono. Una vez construído éste en alguna circunferencia, podemos trasladarlo a cualquier otra mediante una semejanza.

4.3. La Geometría de los artesanos

La elaboración de diseños geométricos sofisticados para ser ejecutados en madera, azulejos o mosaicos constituyen una característica de la civilización islámica. Una tradición artesana de este tipo exige el conocimiento de una cantidad considerable de cuestiones geométricas, la transmisión de las cuales se hacía, unas veces, por vía oral, de maestros a aprendices, y otras, a través de los propios geómetras, que intentan dar nuevas construcciones geométricas o la justificación de métodos ya existentes.

Así, la versión árabe del libro VIII de la «Colección Matemática» de Pappus de Alejandría contiene una sección muy interesante referida a construcciones geométricas con el uso de la regla y el compás de abertura fija. El libro fue copiado de nuevo en el siglo X por al-Sijzi a partir de una copia del siglo IX y que pertenecía a los mecenas de Thabit ibn Qurra, lo que hace presuponer que fue este último el primer traductor de dicha obra. El resto del libro VIII de Pappus está dedicado a instrumentos y máquinas, lo que indica que va dirigido, sin ningún género de dudas, a resolver problemas planteados por los artesanos.

También en el siglo X, Abú Nasr al-Farabí escribió otro tratado sobre construcciones geométricas en las que se introducen restricciones en los instrumentos utilizados. Su título es: «Un libro de oficios espirituales y secretos naturales de los detalles de las figuras geométricas». Más tarde, Abú-l-Wafà incorporó los trabajos de al-Farabí en el libro «Sobre la Geometría que necesitan los artesanos» en el que se resuelven problemas tales como:

1. Construir una perpendicular a un segmento AB sobre su extremo A sin prolongar AB.
2. Dividir un segmento en cualquier número de partes iguales.
3. Trazar la bisectriz de un ángulo.
4. Hallar el centro de una circunferencia.
5. Inscribir un cuadrado en una circunferencia.
6. Inscribir un pentágono regular en una circunferencia cuyo radio es igual a la abertura del compás.

Se dan también construcciones exactas de los polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 8, y 10 lados, y construcciones aproximadas de los de 7 y 9 lados.

Veamos, por ejemplo, como resuelve el segundo de los problemas anteriores de dividir un segmento en partes iguales (Fig. 7):

Supongamos que se quiere dividir el segmento AB en tres partes iguales AG = GD = DB.

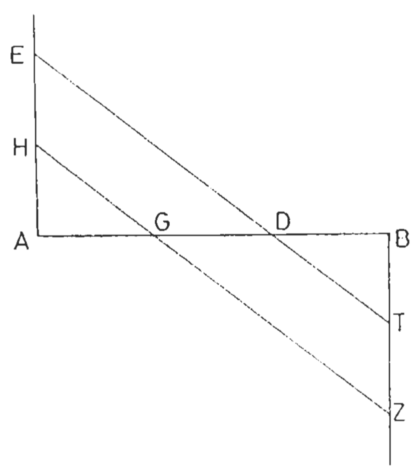

Fig. 7

Se trazan perpendiculares AE y BZ al segmento, en sentidos opuestos. En cada una de estas líneas se toman segmentos iguales AH = HE = BT = TZ. Las rectas HZ y ET cortan al segmento AB en los puntos buscados G y D respectivamente.

5. El álgebra

5.1. El álgebra de al-Huwarizmi

Una de las obras escritas por al-Huwarizmi es el libro titulado «Breve tratado sobre el cálculo del al-jabr y la al-muqàbalà». La propia palabra «Algebra» proviene de la expresión contenida en el título de esta obra: «al-jabr», y que, textualmente, significa «reemplazar»; al-Huwarizmi la usa en el sentido actual de «cambiar de miembro». Habitualmente, la expresión «al-jabr» iba acompañada por «al-mu-qàbalà», que bien podríamos traducir por «simplificar» o «reducir términos semejantes».

El libro citado de al-Huwarizmi se compone de tres partes diferentes:

1. Una parte propiamente algebraica que precede a un corto capítulo sobre contratos comerciales efectuados con la ayuda de una regla de tres simple como la que se utilizaba en la India.
2. Un capítulo de geometría bastante resumido, sobre medidas y el uso del Algebra.
3. Una última parte que trata cuestiones relativas a testamentos y herencias.

Parece que al-Huwarizmi tenía la intención de escribir un manual de utilidad para la resolución de problemas de la vida cotidiana. En la exposición no se utilizan símbolos y las explicaciones son ciertamente prolijas.

Al principio de la obra, al-Huwarizmi presenta seis formas canónicas de ecuaciones de primer y segundo grados e indica los métodos de resolución. En estas formas canónicas, todos los términos deben aparecer como magnitudes aditivas y, además, considera solamente las soluciones positivas de las ecuaciones.

Estas seis formas canónicas son:

I. Los cuadrados son iguales a las raíces: $a \cdot x^2 = b \cdot x$

II. Los cuadrados son iguales a un número: $a \cdot x^2 = c$

III. Las raíces son iguales a un número: $a \cdot x = c$

IV. Los cuadrados y las raíces son iguales a un número: $a \cdot x^2 + b \cdot x = c$

V. Los cuadrados y los números son iguales a las raíces: $a \cdot x^2 + c = b \cdot x$

VI. Las raíces y los números son iguales a los cuadrados: $b \cdot x + c = a \cdot x^2$

Cualquier otra ecuación se resuelve tras reducirla a alguna de esta formas canónicas.

Por ejemplo, una ecuación que se plantea como:

$$x^2 + (10-x)^2 = 58$$

se reduce al caso $x^2 + 21 = 10 \cdot x$, que es del tipo V.

Veamos la discusión que hace al-Huwarizmi de esta ecuación:

> «Dividamos por dos el número de raíces: es 5. Multipliquemos este número por sí mismo, con lo que se obtiene 25. Se resta ahora 21 de esta cantidad y el resto que queda es 4. Extraigamos su raíz cuadrada, que es igual a 2 y restemos este número de la mitad del número de raíces, 5; el resultado es igual a 3. Esta es la raíz que se busca, y su cuadrado es 9. De manera alternativa, se puede añadir la raíz cuadrada a la mitad del número de raíces, y la suma es igual a 7. Esta es también la raíz buscada, y su cuadrado es 49».

Una lectura atenta de este razonamiento nos muestra que ha resuelto la ecuación dada conforme a la conocida fórmula de resolución de ecuaciones de segundo grado cuando el coeficiente del término lineal («raíz») es un número par.

5.2. Thabit ibn Qurra y el Algebra

Una de las características que distingue a al-Huwarizmi y sus sucesores de los escritores que le precedieron es el hecho de dar demostraciones de los métodos empleados. Sin embargo, al-Huwarizmi presenta sus demostraciones en casos particulares. En cambio, en sus trabajos, Thabit ibn Qurra da demostraciones del caso general.

Veremos solamente el caso $x^2 + b \cdot x = c$. La demostración que se da es exclusivamente geométrica y para llevarla a cabo se utiliza una proposición de los Elementos de Euclides:

Libro II. Proposición 6. Si se corta un segmento BH en un punto W y se traza un segmento BA, prolongación del anterior, el rectángulo de lados AH y AB más el cuadrado de lado BW es igual al cuadrado de lado AW. (Fig. 8)

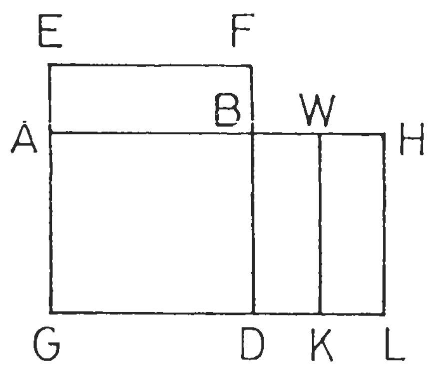

Fig. 8

Para la demostración del cálculo de las raíces de la ecuación dada, consideremos la figura 9, en la que el cuadrado ABDG representa el cuadrado y, en consecuencia, el lado AB es una raíz, y supongamos que hemos elegido una unidad de medida lineal de manera que BH represente el número de raíces, b

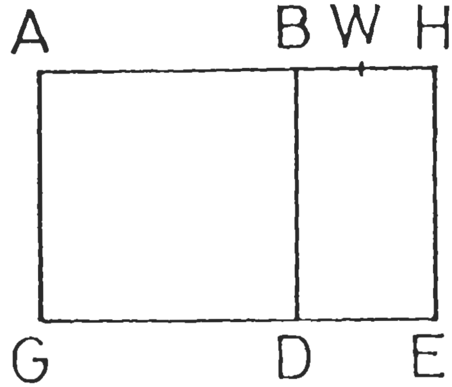

Fig. 9

El área DEHB corresponde al término «raíces», por lo que GEHA es igual al cuadrado más las raíces. Conforme a la proposición de Euclides, GEHA más BW^2 es igual a AW^2. Pero como «cuadrado más raíces» es igual al número, y BW^2 es también un dato conocido, pues BW es la mitad del número de raíces, tanto AW^2 como, por tanto, AW, pueden calcularse. Como x = AB = AW - BW, y se ha obtenido el valor de la raíz x de la ecuación.

Algebraicamente, el razonamiento geométrico consiste en añadir el término $(b/2)^2$ a cada uno de los dos miembros de la ecuación:

$$x^2 + b \cdot x + (b/2)^2 = c + (b/2)^2$$

y con la interpretación geométrica como áreas dada a cada uno de los términos se puede aplicar la proposición de Euclides al miembro de la izquierda y se obtiene:

$$[x + (b/2)]^2 = c + (b/2)^2$$

y x queda determinada conforme a la fórmula:

$$x = \sqrt{c + (b/2)^2} - (b/2)$$

5.3. El álgebra de Abù Kàmil

Un escritor que se encontraba en plena actividad a la muerte de Thabit ibn Qurra, el año 901, fue Abù Kàmil, cuyo apelativo era «el calculista egipcio». Su libro

«Algebra» era, en realidad, un comentario del libro de al-Huwarizmi y gozó de una gran popularidad.

Como cabe esperar, las analogías entre los libros de los dos autores son muchas. La clasificación de las ecuaciones es idéntica en ambos y también en el caso de Abù Kàmil, las demostraciones se dan basándose en casos particulares concretos.

Pese a ello, Abù Kàmil va más allá que al-Huwarizmi. Demuestra métodos de manipulación de expresiones algebraicas, como por ejemplo:

I. $(a \pm px).(b \pm qx) = ab \pm bpx \pm aqx + pqx^2$

II. $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ y $\sqrt{a/b} = \sqrt{a} / \sqrt{b}$

III. $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm 2 \cdot \sqrt{ab}}$

Demuestra también con gran rigor reglas tales como $ax \cdot bx = ab \cdot x^2$ o bien $a \cdot (bx) = (ab) \cdot x$ así como también la conocida «regla de los signos» para la multiplicación.

La obra de Abù Kàmil incluye hasta 69 problemas diferentes. Uno de los más interesantes, el número 41, es como sigue:

> «Se divide 10 en tres partes de manera que si la menor de ellas se multiplica por sí misma y se suma a la intermedia, multipicada también por ella misma, el resultado es la mayor multiplicada de nuevo por ella, y cuando se multiplica la mayor por la menor, se obtiene la intermedia multiplicada por sí misma».

El problema se resuelve en el libro con métodos ciertamente laboriosos, no exentos de ingenio, obteniendo finalmente el resultado aproximado: $x=2{,}57$, $y=3{,}26$ y $z=4{,}17$.

5.4. La aritmetización del álgebra de al-Karagi

Tanto Thabit ibn Qurra como Abù Kàmil aplican la Geometría al Algebra, si bien podemos detectar que ya el último autor presenta una cierta tendencia a aplicar la Aritmética a determinadas cuestiones. Así, podemos encontrar una prueba de la identidad:

$$(10 - x) \cdot (10 - x) = 100 + x^2 - 20 \cdot x$$

en la que aplica solamente la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma y la regla de los signos, y lo mismo ocurre en la resolución de los problemas.

Esta tendencia hacia una aritmetización del algebra se observa claramente en uno de los científicos musulmanes más notables, que trabajó en Bagdad alrededor del año 1000 y en la primera década del siglo XI dedicó un libro de Algebra al visir Fakr al-Mulk, emigrando más tarde a regiones montañosas. Este personaje era Abù Bakr al-Karagi y, en realidad se desconocen casi por completo los detalles de su vida.

Fue él quien empleó por primera vez potencias arbitrariamente grandes de la indeterminada y desarrolló el álgebra de expresiones que contenían dichas potencias. Su punto de vista consiste en contemplar las cantidades desconocidas como números o magnitudes geométricas, y pueden ser una «raíz», «lado» o «cosa» (correspondiente a nuestra «x»), o pueden ser cuadrados (x^2), cubos (x^3), cuadrados de cuadrados (x^4), etc. A estas distintas clases de cantidades las denomina «órdenes», y junto a cada orden (x^n) está su «parte» ($1/x^n$), de manera que cualquier orden, multiplicado por su parte, da un resultado igual a 1.

Con todo esto, al-Karagi desarrolla su programa considerando expresiones tales como «un cuadrado de un cuadrado y cuatro cubos menos seis unidades» ($x^4 + 4x^3 - 6$) mediante reglas obtenidas a partir de las reglas ordinarias de la Aritmética concernientes a la suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíces cuadradas.

Digamos que al-Karagi fue pionero en la aritmetización del Algebra y si su éxito fue solamente parcial, ello es debido, no a su falta de ingenio, sino a la dificultad de introducir los números negativos en su teoría. Este aspecto lo podemos encontrar en los escritos de un médico llamado al-Samawa'l, nacido en Bagdad unos 70 años después de la muerte de al-Karagi. En su obra «El maravilloso libro del Cálculo», escrito cuando contaba 19 años, establece la existencia de los números negativos y todas las reglas de los signos.

5.5. Las ecuaciones cúbicas

De alguna manera, el estudio de las ecuaciones de tercer grado surge en el mundo islámico al considerar la ya citada cuestión propuesta por Arquímedes de cortar una esfera por un plano de manera que los volúmenes de los dos segmentos resultantes guarden entre sí una razón predeterminada. El propio Arquímedes había probado que el problema tiene solución si es posible dividir un segmento lineal de longitud a, en dos partes b y c, de manera que «c es a una longitud dada l como un área prefijada m^2 es a b^2». Haciendo entonces $b=x$, con lo que $c=a-x$, se obtiene $ax^2 - x^3 = m^2 \cdot l$, que da lugar a una ecuación del tipo:

$$x^3 + p = a \cdot x^2$$

Realmente, fue Omar al-Khayyam (1048-1131) quien impulsó el estudio de las ecuaciones cúbicas, y el tratamiento de las mismas se puede encontrar en su libro titulado «Algebra».

En el prólogo dice que ninguno de los tratamientos algebraicos de los problemas que se van a discutir proceden de los clásicos, pero que entre los autores modernos, Abù Abdallah al-Mahani (825-828) escribió un análisis de tipo algebraico del problema de Arquímedes, pero que ni éste ni Thabit ibn Qurra consiguieron resolver la ecuación. Un matemático de la generación siguiente a estos últimos, Abù Ja'far al-Khazin (fallecido entre los años 961 y 971) resolvió dicha ecuación mediante la intersección de cónicas (Fig. 10):

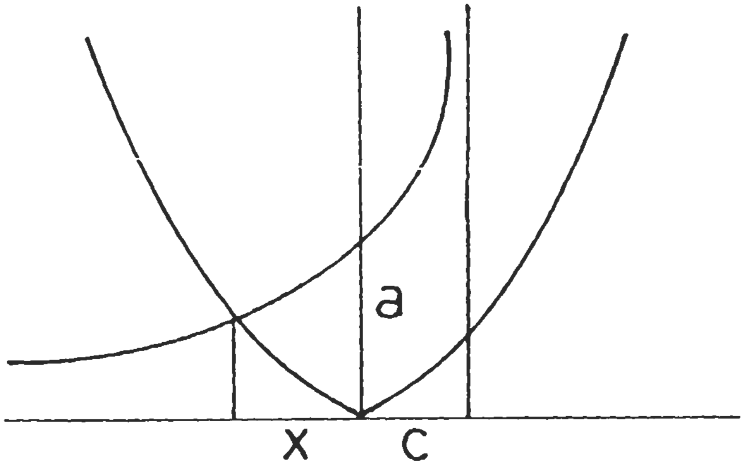

Fig. 10

$$x^3 + l \cdot m^2 = a \cdot x^2$$

$$x^2 = (m^2/c) \cdot y \quad \text{(parábola)}$$

$$y \cdot (a - x) = l \cdot c \quad \text{(hipérbola)}$$

A patir de entonces, varios matemáticos intentaron resolver diversos tipos especiales de ecuaciones cúbicas, pero ninguno intentó dar una clasificación de las mismas, ni métos de resolución. Esto es lo que hizo al-Khayyam:

Su idea inicial es la de estudiar las ecuaciones de tercer grado conforme al número de términos de las mismas. En las ecuaciones que propone al-Khayyam, todos los términos aparecen con coeficientes positivos, con lo que llega a considerar 25 tipos distintos de ellas al tiempo que prueba como se resuelve cada una (11, con métodos euclídeos, y 14, con secciones cónicas).

Veamos alguno de los problemas planteados y resueltos por al-Khayyam:

Problema. Un cubo, algunos lados y números son iguales a algunos cuadrados: $x^3 + b^2 \cdot x + a^3 = c \cdot x^2$

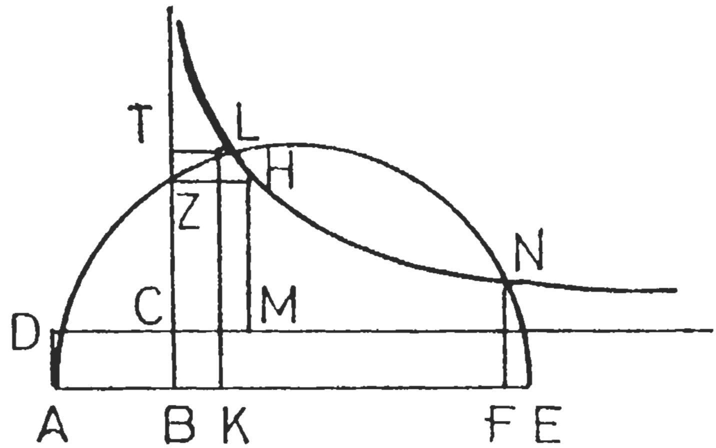

Fig. 11

Sean BE = c, BC = b, BA = a^3/b^2. Construyamos una circunferencia de diámetro AE, y sea Z, la intersección de ésta con el segmento BC prolongado. Se tiene:

$$BZ = (a/b)\cdot\sqrt{a\cdot b}$$

Tomemos el punto H de manera que:

$$HZ\cdot ZC = CB\cdot BA = a^3/b$$

y tracemos una hipérbola equilátera de asíntotas CB y CD que pase por el punto H. Esta hipérbola corta la circunferencia en los puntos L y N. Se prueba que tanto L (BK) como N (BF) representan dos soluciones de la ecuación. Si H queda fuera del círculo, los dos puntos representan soluciones imaginarias; al-Khayyam prescinde asimismo de las posibles soluciones negativas.

6. Áreas y volúmenes

A partir de los siglos X y XI, diversos sabios del mundo islámico se interesaron por los problemas de cuadratura de segmentos de secciones cónicas (principalmente, la parábola) así como del cubicaje de cuerpos de revolución generados por la rotación de secciones cónicas alrededor de un eje, con especial atención a los paraboloides y diferentes tipos de cúpulas obtenidas a partir de la parábola.

Igual que en otras cuestiones, también en éstas, la influencia de los griegos clásicos fue decisiva, destacando, por supuesto los trabajos de Arquímedes, con su obra

«La esfera y el cilindro», así como Apolonio y su tratado sobre «Las cónicas». Por otra parte, en casi todos los casos se utiliza el llamado «método de exhausción», enunciado por Eudoxo de Cnidos en el siglo IV a.C. y cuya formulación podemos expresar como sigue:

> «Si a una magnitud se le quita su mitad, y a la parte restante se quita nuevamente su mitad, y así sucesivamente, se obtiene una cantidad menor que cualquier otra dada».

Consideraremos en primer lugar la obra de Thabit ibn Qurra titulada «Libro sobre la medida de la sección cónica llamada parábola». En él, la parábola considerada viene dada por una propiedad que, en lenguaje actual, podemos enunciar a través de la ecuación $y^2 = p \cdot x$, por lo que la cuadratura equivale al cálculo de la integral:

$$\int_0^a \sqrt{p.x}\ dx$$

El cálculo de esta integral se obtiene como límite de sumas integrales mediante un curioso artificio: Si se divide el intervalo [0,a] en partes iguales, habría que calcular la suma de la serie:

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n}$$

que resultaba sumamente difícil en aquella época.

La manera de eludir la cuestión consiste en dividir el segmento [0,a] en partes desiguales, proporcionales a $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$, con lo que las ordenadas correspondientes serán proporcionales a 1, 2, 3,... La solución de ibn Qurra está basada en una serie de quince proposiciones aritméticas, que se ocupa de justificar, de las que podemos destacar:

I. La proposición 4 sobre la suma de los n primeros números impares:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

II. La proposición 10, que da la suma de los cuadrados de los n primeros números impares:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 + (n/3) = (2/3) \cdot \left[\sum_{k=1}^{n} (2k-1) \right] \cdot 2n$$

El autor procede a la cuadratura de un segmento de parábola cortado por la cuerda conjugada de un diámetro cualquiera. Para simplificar, nos limitaremos al caso en que la cuerda es perpendicular al eje de la parábola (Fig. 12):

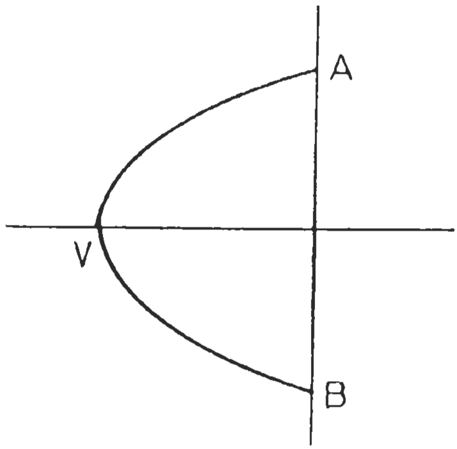

Fig. 12

Thabit ibn Qurra demuestra la proposición siguiente:

> «Si se divide un segmento del eje de una parábola en n partes proporcionales a 1, 3, 5, ..., 2n-1, las cuerdas correspondientes que pasan por los puntos de subdivisión son proporcionales a los números pares 2, 4, 6,..., 2n».

A continuación (Fig. 13), traza una línea poligonal cuyos vértices son el de la parábola y los extremos de las cuerdas correspondientes a las distintas subdivisiones. El polígono resultante S_n está formado, por tanto, de un triángulo, σ_n y diversos trapecios.

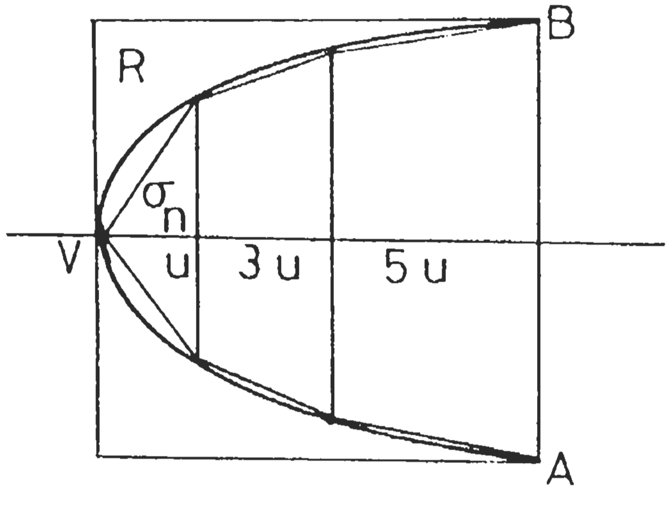

Fig. 13

Si designamos por R el triángulo circunscrito al segmento de parábola considerado, se verifica:

$$(1) \qquad (2/3)\cdot R - S_n < (n/3)\cdot \sigma_n$$

Ahora, si el segmento de eje correspondiente al segmento de parábola tiene longitud a, las longitudes de las distintas subdivisiones serán u, 3u, 5u,..., (2n-1)u, donde $u=a/n^2$, y, en consecuencia, las cuerdas correspondientes son iguales a $2\cdot\sqrt{pu}$, $4\cdot\sqrt{pu}$,..., $2n\cdot\sqrt{pu}$. Así, el área del polígono inscrito es:

$$S_n = (u/2)\cdot 2\sqrt{pu}+(3u/2)\cdot[2\sqrt{pu}+4\sqrt{pu}]+ \dots +$$
$$+ \dots + [(2n-1)u/2]\cdot[(2n-2)\sqrt{pu}+2n\sqrt{pu}]$$

y como el área del triángulo circunscrito R es:

$$R = [\, u + 3u + \dots + (2n-1)u \,] \cdot 2n\sqrt{pu}$$

la desigualdad (1) se obtiene inmediatamente a partir de la proposición 10.

Más adelante, ibn Qurra pone de manifiesto que si se toma n suficientemente grande, la diferencia $(2/3)\cdot R-S_n$ llega a ser tan pequeña como se quiera, de donde concluye que el área del segmento parabólico es:

$$S = (2/3)\cdot R$$

Otro tratado de ibn Qurra es el libro titulado «Sobre el cálculo de los paraboloides», en el que se estudian los paraboloides de revolución generados por la rotación de segmentos parabólicos, alrededor, bien de una cuerda, bien de un diámetro.

Clasifica los paraboloides de revolución en dos apartados:

I. Cúpulas parabólicas (Fig. 14):
1. Con vértice redondeado, cuando la sección gira alrededor del eje de la parábola.
2. Con vértice puntiagudo, si el segmento que da vueltas no contiene el eje de la parábola.
3. Con vértice hundido, si el segmento en rotación contiene el eje de la parábola.

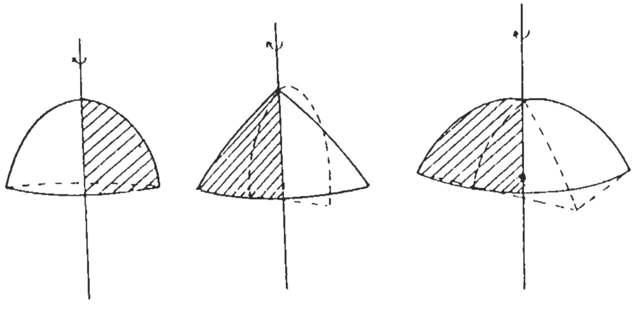

Fig. 14

II. Cúpulas esféricas (Fig. 15).
 1. En forma de calabaza, si la figura gira alrededor de una cuerda conjugada del eje.
 2. Ovoides, si la figura gira alrededor de una cuerda conjugada de un diámetro distinto del eje.

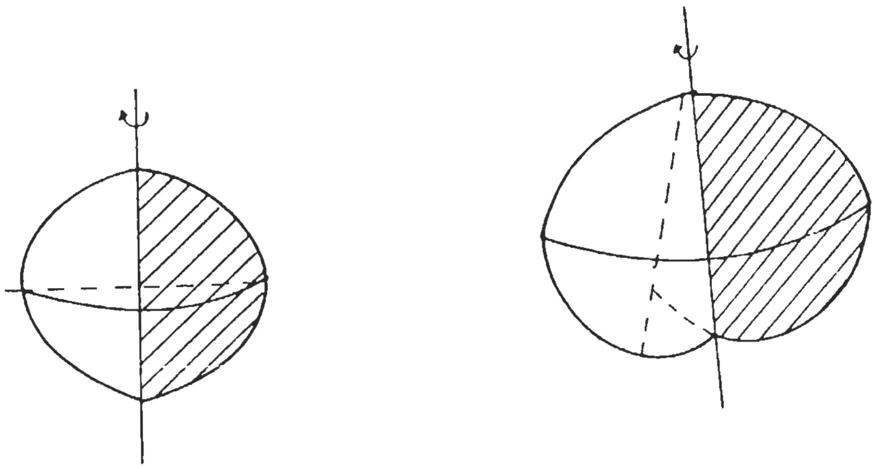

Fig. 15

Calcula entonces el volumen de las cúpulas de vértice redondeado por un método similar al anterior, para lo que necesita nada menos que 36 lemas aritméticos.

Los trabajos de ibn Qurra espolearon a otros sabios, en especial a su nieto Ibrahim ben Sinan y a al-Kuhi. Ambos dieron métodos que simplificaban notablemente los procedimientos de ibn Qurra; en concreto, al-Kuhi reduce la cuadratura del segmento parabólico a sólo tres proposiciones.

Entre los años 965 y 1041 vivió en El Cairo el matemático al-Haytam. En su «Tratado sobre la medida de un sólido parabólico» calcula el volumen de un cuerpo de revolución generado por la rotación de un segmento parabólico alrededor de un eje arbitrario y, en particular, el de las esferas parabólicas consideradas por ibn Qurra con métodos de cálculo semejantes a los de este último.

6. Conclusión

Las ideas anteriores no son sino unas breves pinceladas de lo que fue la actividad matemática en el mundo islámico durante los siglos VIII al XV. Las limitaciones de tiempo nos impiden tratar con más profundidad los temas presentados y, naturalmente, abordar otros que se quedan en el tintero. No hemos hablado de aspectos tan importantes como la Astronomía y, subsidiariamente a ésta, la Trigonometría, que florecieron entre los musulmanes durante esta época de la Historia.

Quede patente, no obstante, que durante la época medieval, el Imperio Islámico no fue solamente una entidad política y militar que dominó una parte muy amplia del mundo conocido, sino que también florecieron en él actividades culturales de todo tipo. No fueron ajenas a esta preocupación las Matemáticas, y de ello hemos pretendido dar aquí una minúscula prueba.

Bibliografía

BERGGREN, J. L. «Episodes in the Mathematics of Medieval Islam». Springer Verlag. New York. 1986.

HOGENDIJK, J. P. «Greek and Arabic Constructions of the Regular Heptagon». Archiv for History of Exact Sciences. 30(1984), 197-330.

TOUSHKEVITCH, A. P. «Les Mathématiques Arabes». Librairie Philosophique J. Vrin. Paris. 1976.