GALILEO: LA MATEMÁTICA

José Manuel González Rodríguez
Profesor Titular de Economía Aplicada
Universidad de La Laguna

La naturaleza y la Biblia derivan ambas de Dios, y es absurdo querer contradecir la Naturaleza, que es la expresión directa de la voluntad divina, sobre la base de la interpretación humana de las Sagradas Escrituras. Por el contrario, se debe aprender a leer e interpretar las escrituras a través de la Naturaleza.

1. Galileo: el Hombre y el Método

La frase del encabezado, que Galileo Galilei pronunciara ante el tribunal de la inquisición que lo juzgó en 1633 nos motiva a comenzar con una breve introducción sobre la vida y la obra de Galileo, buscando más puntos de referencia que nos aclaren el alcance de su producción matemática.

Nace Galileo Galilei en 1564 en Pisa en la familia de un comerciante de tejidos Vincenzo Galileo, que también fue músico y compositor. Este implicó a su hijo en el estudio científico, y, así, Galileo ingresó en la universidad de su ciudad para estudiar medicina. En esa época los cursos estaban todavía en el nivel del curriculum medieval, y Galileo aprende por su cuenta matemáticas privadamente, de manos de un ingeniero práctico. Dicho maestro influyó notablemente en su carrera, de modo que a la edad de diecisiete años Galileo cambia de la medicina a las matemáticas. Después de cerca de ocho años de estudio solicita una plaza para enseñar en la universidad de Bolonia, mas fue rechazado por carecer de méritos suficientes. Se asegura no obstante una plaza de profesor en su ciudad, y, estando allí, se empeña en la revisión crítica de la ciencia aristotélica, lo que hizo que se enemistara con la mayor parte de sus colegas.

En esa época comienza a escribir sus primeros trabajos matemáticos, cuya buena acogida provocó los celos de algunos de los profesores nada competentes. Todo ello provocó su emigración, recalando entonces en Padua en cuya universidad aceptó un puesto de profesor de matemáticas. Allí escribió su primer libro *Le Mecaniche* (1604) y permaneció durante dieciocho años, hasta que fue invitado a Florencia por el Gran Duque Cósimo II de Médicis, quién lo nombró Matemático Principal de su corte, le dió casa y un salario considerable, y le protegió de los jesuitas, quienes, dominadores de los círculos del papado, ya le habían amenazado por haber defendido la teoría de Copérnico.

Acuciado por estas críticas, se retira a una pequeña casa de campo en Arcetri, en los alrededores de Florencia, y consagra quince años de su vida a sus investigaciones sobre mecánica y astronomía. En 1632 publica su famoso *Diálogo sobre los dos sistemas del mundo,* en el que defiende con pasión y con todo rigor las tesis copernicanas. Su publicación lo conduce en 1633 ante el tribunal de la Inquisición, que lo obliga a renegar públicamente de sus doctrinas relativas al movimiento de la tierra. Desengañado y abatido por la muerte de su hija predilecta se retira de la vida pública, y acuciado por numerosos achaques físicos (se queda ciego en 1637) permanece en su casa de campo hasta que le llega la muerte en 1642. No obstante en este periodo de su vida redacta numerosos escritos científicos, destacando entre éllos su famoso *Discursos y demostraciones matemáticas relativas a dos nuevas ciencias* (1638), obra en que resume admirablemente la mayor parte de sus descubrimientos e investigaciones en Mecánica y Matemáticas.

Galileo representa por excelencia al científico del Renacimiento tardío: su compromiso con las nuevas ideas recogidas por sus predecesores no le impiden afrontar nuevas ideas con la ayuda de recursos, quizá poco rigurosos, pero tremendamente eficaces, lo que ignaura una nueva era en el desarrollo de la ciencia moderna. No obstante, sometido a las turbulencias mundanas y a los conflictos con los representantes del papado, Galileo no renuncia a prácticas poco novedosas, propias de la época medieval, ya superada, lo que, en algún modo, incide en el rigor y justeza de sus métodos [1]. En todo caso, estas prácticas no impiden considerar el método que ignaura Galileo como el primer modelo de investigación científica coherente, en el sentido en que lo entendemos en la actualidad.

1. Se conoce la afición de Galileo a la Astrología, y se cuenta con testimonios que hablan de la práctica profesional de ésta. Sin duda, todo ello tendría que ver con las penurias económicas que

Galileo fue un hombre extraordinario en muchos campos, de tal modo que se le llama a menudo el padre de la invención moderna. Fue un perspicaz observador astronómico, inventor independiente del microscopio, difusor del telescopio por excelencia, diseñador del primer reloj de péndulo y de un compás con escalas que proporcionaba automáticamente los resultados de cálculos numéricos. También fue Galileo el primer estudioso moderno del sonido, que explicó con la ayuda de una teoría ondulatoria, adelantándose así a los trabajos de Mersenne y de Newton. Mas, con todo, su obra más señera consistió en inaugurar oficialmente los nuevos métodos de la ciencia moderna.

En particular, en su filosofía de la ciencia, Galileo rompió radicalmente con lo especulativo y lo místico en favor de una visión de la naturaleza mecánica y matemática. Esta le condujo (como ya vemos en la cita que encabeza el apartado) a establecer una clara distinción entre los problemas científicos y los argumentos teológicos. Destaca también Galileo por su defensa del atomismo de Demócrito, que él entendía con la explicación de que todas las variedades cualitativas de los cuerpos eran debidas a la diversidad cuantitativa en el número, tamaño, forma y disposisión espacial de los átomos.

Por otra parte, su nuevo método de la ciencia enfrentaba radicalmente las concepciones medievales en cuanto que el autor decidió que, en Física, en contraposición a lo que ocurre en Matemáticas, los primeros principios deben de proceder de la experiencia y de la experimentación. En este sentido pensaba Galileo que la naturaleza no hace primero el cerebro de los hombres y organiza a continuación el universo de manera que resultara aceptable al intelecto humano, sino que más bien defendía la concepción contraria: la naturaleza está perfecta y armoniosamente organizada, y es facultad del intelecto del hombre el descubrir como son las reglas que la estructuran.

Por último, otro de los elementos esenciales que fundamentan el nuevo método galileano consistió en la búsqueda de principios cuantitativos que pudieran explicar los fenómenos físicos. Galileo pretendía buscar sus axiomas como tales afirmaciones cuantitativas, y esperaba deducir algunos nuevos con la ayuda de los métodos matemáticos. Por otra parte, estas deducciones también proporcionarían, en su opinión, un conocimiento cuantitativo.

---

sufre, pues en una buena parte de su vida se ve obligado a mantener no sólo su familia directa, sino también a sus hermanas (Diario El País, sábado 3 de octubre de 1992).

> La filosofía (la Naturaleza) está escrita en ese gran libro que siempre está delante de nuestros ojos —quiero significar el universo— pero que no podemos entender si no aprendemos primero el lenguaje, y comprendemos los símbolos en los que está escrito. El libro está escrito en lenguaje matemático, y los símbolos son triángulos, circunferencias y otras figuras geométricas, sin cuya ayuda es imposible comprender ni una palabra de él, sin lo cual se deambula en vano a través de un oscuro laberinto.
>
> *Galileo, 1610*

2. *Las Matemáticas de Galileo*

Como corolario del último párrafo del apartado anterior aparece la afirmación que recogemos en el encabezado: las matemáticas debían de ser el medio esencial para alcanzar la pretendida justificación cuantitativa de la nueva ciencia. Justamente ésta es la idea central que preside el uso que hace Galileo de la Matemática, y cómo consecuencia, del éxito de sus métodos. Descubrir las aportaciones más relevantes del investigador pisano en Matemáticas será la tarea que pretendemos abordar en este apartado.

Aunque los desarrollos matemáticos jalonan todas las investigaciones sobresalientes de Galileo, podemos remitirnos, a la hora de resumir los métodos más destacados, a su obra de madurez: los *Discorsi* o *Discursos y demostraciones*... De hecho los *Discorsi* no constituyen una creación nueva, pues consisten en la recuperación, profundización y puesta al día de varios escritos que datan de la época en que enseñaba matemáticas en Padua. Tienen los *Discorsi* una estructura semejante a la primera gran obra galileana el *Diálogo sobre*... ya que se estructura en forma de diálogo que mantienen durante cuatro jornadas tres interlocutores: Salvati, Sagredo y Simplicio [2]. En los *Discorsi* Simplicio presenta los razonamientos y puntos de vista (fundamentalmente aristotélicos) de la época, mientras que Salvati los refuta, razonando hábil y tenazmente para mostrar las falacias y puntos débiles de estos esquemas y la fuerza de los nuevos.

En este apartado nos detendremos en examinar las discusiones que los tres interlocutores mantienen sobre las teorías del movimiento uniforme y del movimiento uniformemente acelerado de los cuerpos y sobre la trayectoria seguida por los proyectiles, dejando para el próximo apartado las discusiones que atañen a la sutileza del infinito y sus paradojas. Analizando con detalle cada uno de los teoremas propuestos por Galileo intentaremos desentrañar el uso de la ciencia matemática que se esconde en los *Discorsi*.

2. Estos tres nombres corresponden a personas reales. Filipo Salvati (1582-1614) fue amigo de Galileo; Giovanfrancesco Sagredo (1571-1620), también había sido amigo del pisano y Simplicio (muerto en el 500 d. C.) fue un filósofo neoplatónico griego, comentador de Aristóteles.

Avancemos antes que nada que la estructura del capítulo tiene que ver con el uso que hace Galileo de la vieja y de la nueva Matemática; es decir de los métodos clásicos, recogidos de los griegos y de aquellos nuevos que nos propone el autor, de elaboración eminentemente propia. Por otra parte, cada demostración matemática se relaciona con una discusión física, y, en definitiva, Galileo pretende explicar con la primera la segunda. El guión de este apartado será entonces como sigue:

— Galileo y las matemáticas griegas: el uso de la teoría de las proporciones de Euclides y de las cónicas de Apolonio.
— Innovaciones propias de Galileo: los diagramas de tiempo-velocidad, la teoría de lo infinitamente pequeño, la «summa» o «agregatum», esto es la integración.

Comencemos por la discusión del movimiento uniforme de los cuerpos, de forma que con ayuda del Teorema I que se demuestra durante la tercera jornada aclaremos el alto grado de conocimiento que Galileo poseía de las matemáticas clásicas de los griegos, esto es, de Euclides, Apolonio y Arquímedes.

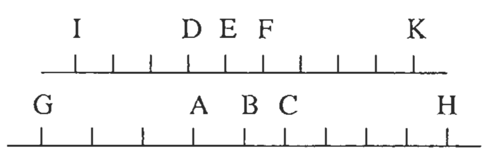
La definición que Salvati da de movimiento constante o uniforme entiende éste como aquel que posee un móvil que en tiempos iguales cualesquiera (quibuscunque, en el original) recorre espacios iguales entre sí. Independientemente de que Galileo no reconoce el concepto de velocidad, pues aún en 1638 no se concebía la razón entre dos magnitudes físicas diferentes, el uso del término cualesquiera nos alerta sobre la necesidad que tiene Galileo de recurrir a un determinado nivel de rigor, aproximándose de esta forma al concepto de velocidad como límite.

Dispongámonos a detallar la demostración del primer teorema que atañe a este movimiento uniforme, y, para ello, (y en lo que sigue lo haremos de igual forma) nos ayudaremos del excelente trabajo de Carmen Azcárate *Las Matemáticas de Galileo. Estudio histórico sobre «La nueva ciencia del movimiento»*. El enunciado del teorema dice:

Si un móvil dotado de movimiento uniforme recorre dos espacios a la misma velocidad, los tiempos invertidos tendrán entre sí la misma proporción que los espacios recorridos.

y su demostración es la que sigue:

Supongamos que un móvil recorre con movimiento uniforme las distancias AB y BC; el tiempo para recorrer AB lo representamos por DE, mientras que el requerido para recorrer BC, por EF. Mi proposición es que la distancia AB es a la distancia BC como el tiempo DE es al tiempo EF.



Alarguemos tanto los espacios como los tiempos en direción a G,H y a I,K respectivamente. Dividamos, a su vez, AG en una serie de espacios iguales todos a AB, y de la misma forma dividiremos DI en una serie de intervalos de tiempo todos exáctamente iguales a DE. Del mismo modo operaremos con CH, que será dividida en espacios equivalentes cada uno a BC, mientras que FK se dividirá en intervalos de tiempo equivalentes, cada uno también, a EF. Pues bien, la distancia BG y el tiempo EI serán múltiplos iguales cualesquiera de la distancia BA y del tiempo ED. De la misma manera, la distancia HB y el tiempo KE serán igualmente múltiplos cualesquiera de la distancia CB y del tiempo FE.

Dado que DE es el tiempo requerido para recorrer AB, el tiempo total EI será el que se requiere para recorrer toda la distancia BG y cuando el movimiento es uniforme, habrá en EI tantos intervalos de tiempo, equivalentes a DE, como espacios hay en BG, equivalentes cada uno a BA. De la misma forma se infiere el tiempo requerido para recorrer HB.

De cualquier forma, puesto que el movimiento es uniforme, se sigue que si la distancia GB es igual a la distancia BH, entonces el tiempo IE debe ser igual al tiempo EK; y si GB es mayor que BH, entonces también IE será mayor que EK, mientras que si es menor el uno, menor será también el otro. Tenemos, por tanto, cuatro cantidades: la primera es AB, la segunda es BC, la tercera es DE y la cuarta es EF. El tiempo IE y la distancia GB son múltiplos cualesquiera de la primera y de la tercera, es decir, de la distancia AB y del tiempo DE.

Ahora bien, se ha probado ya que las dos cantidaes citadas en último lugar son iguales, mayores o menores que el tiempo EK y que el espacio BH, siendo éstos múltiplos cualesquiera de la segunda y de la cuarta. En consecuencia, la primera es a la segunda o lo que es lo mismo, la distancia AB es a la distancia BC como la tercera es a la cuarta, es decir, como el tiempo DF es al tiempo EF.

Para entresacar de la demostración anterior el acertado uso que hace Galileo de la matemática griega, exponemos a continuación la interpretación moderna de dicho teorema, donde queda bien reflejada la correcta manipulación de la teoría de las proporciones de Euclides.

Esquema y análisis del Teorema I

Paso 1: explicación del problema en términos gráficos:

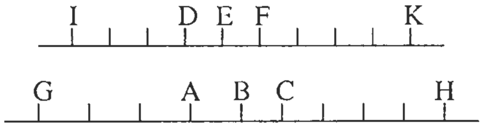
— sobre una línea se dibujan las distancias recorridas, AB y BC.

— sobre otra línea paralela se dibujan los tiempos correspondientes DE y EF.

Paso 2: enunciado de lo que se va a demostrar: distancia AB es a la distancia BC como el tiempo DE es al tiempo EF [esto es $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$].

Paso 3: prolongamos las líneas de las distancias y de los tiempos.

Paso 4: tomamos AG y DI de forma que BG y EI sean múltiplos iguales de BA y ED. Se hace lo mismo con CH y FK de manera que BH y EK sean múltiplos iguales de CB y FE.



Paso 5: por la Definición de Movimiento Uniforme: si DE es el tiempo para recorrer AB y EF es el tiempo para recorrer BC:

— EI es el tiempo para recorrer BG.

— EK es el tiempo para recorrer BH.

Paso 6: por la misma definición, si los tiempos son iguales GB = BH, entonces los espacios son iguales IE = EK.

Paso 7: por el Axioma II, si el espacio GB es mayor que el espacio BH, entonces el tiempo IE es mayor que el tiempo EK.

Paso 8: mientras que si es menor el uno, menor será también el otro.

Paso 9: recopilación, tenemos

— cuatro cantidades AB, BC, DE y EF.

— los múltiplos iguales de la 1^a (AB) y de la 3^a (DE) son GB y IE.

— los equimúltiplos de la 2^a (BC) y de la 4^a (EF) son BH y EK y sabemos que:

— $GB > BH \Leftrightarrow IE > EK$

— $GB = BH \Leftrightarrow IE = EK$

— $GB < BH \Leftrightarrow IE < EK$

Paso 10: conclusión, por la definición 5 del libro V de Euclides, la primera es a la segunda (AB es a BC) como la tercera es a la cuarta (DE es a EF).

Otra demostración galileana que incide en la correcta manipulación de las matemáticas clásicas aparece en los *Discorsi* en la última jornada, en la que se trata del movimiento descrito por los proyectiles. En esta ocasión Galileo destaca en el conocimiento de las cónicas de Apolonio. Así, en la introdución a la cuarta jornada Salvati propone la resolución de dos propiedades que caracterizan a las parábolas, propiedades que utilizará más adelante en la demostración de que la trayectoria seguida por un proyectil es una semiparábola, y que son demostradas con mucha mayor simplicidad de la que encontramos en Las Cónicas de Apolonio. En esta demostración Galileo introduce algunos elementos físico-matemáticos novedosos: el diagrama espacio-tiempo, la ley de la inercia, la composición de movimientos...;

mas la esencia del teorema recae en la teoría de las proporciones de Euclides y en el conocimiento de las cónicas que aportara en su momento Apolonio.

Otra cosa radicalmente diferente sucede cuando Galileo se plantea el estudio del movimiento uniformemente acelerado. Cuando inicia su estudio en la tercera jornada de los *Discorsi* utiliza nuevas herramientas matemáticas, que intentaremos describir.

La primera de las citas que aportamos se refiere a la propia definición de movimiento uniformemente acelerado:

Cuando observo, por tanto, una piedra que cae desde cierta altura, partiendo de una situación de reposo, que va adquiriendo poco a poco, cada vez más velocidad, ¿por qué no he de creer que tales aumentos de velocidad no tengan lugar según la más simple y evidente proproción?. Ahora bien, si observamos con cierta atención el problema, no encontraremos ningún aumento o adición más simple que aquel que va aumentando siempre de la misma manera. Esto lo entenderemos fácilmente si consideramos la relación tan estrecha que se da entre tiempo y movimiento: del mismo modo que la igualdad y uniformidad del movimiento se define y se concibe sobre la base de la igualdad de los tiempos y de los espacios, así también, mediante una subdivisión uniforme del tiempo, podemos imaginarnos que los aumentos de velocidad tengan lugar con la misma simplicidad. Podemos hacer esto en cuanto determinemos teóricamente que un movimiento es uniformente y, del modo, continuamente acelerado, cuando, en tiempos iguales cualesquiera, adquiera incrementos iguales de velocidad.

En la cita anterior advertimos de qué modo Galileo persigue la armonía matemática escondida en la Naturaleza, que parece preferir los argumentos más sencillos para explicar los motivos más simples. No obstante, la cita de Salvati esconde un elemento que no deja de aportar una nueva visión de la Matemática que debería de utilizarse en la explicación de los fenómenos físicos. En la actualidad, después de los descubrimientos de Newton y Leibniz fundamentalmente, sabemos que los fenómenos macroscópicos se explican matemáticamente con el lenguaje del Cálculo Infinitesimal, esto es con conceptos tales como los de límite, continuidad, derivada e integral. Pues bien, Galileo parece que intuye de forma acertada algunos de estos nuevos conceptos, y sin alejarse mucho del rigor decimonónico ya nos habla de éllos.

Tras estas definiciones Galileo se interna sin más preámbulos en la demostración de los teoremas relativos a las ecuaciones de movimiento del móvil con aceleración constante. Demuestra en primer lugar un teorema auxiliar, y, a continuación aborda el problema central de la cuestión, problema que en terminología actual se reduce a calcular el espacio recorrido por un móvil con movimiento continuamente acelerado como la integral de la velocidad respecto al tiempo. Es decir, aparece en términos modernos otra de las herramientas esenciales del cálculo infinitesimal: la integral.

Pues bien, Galileo asume el problema como lo haría un matemático moderno. Comienza con la construcción de un modelo gráfico (geométrico) del problema que trata de afrontar, y, de igual manera que hiciera Nicolás de Oresme, razona en términos dinámicos, apoyándose en el gráfico. Galileo se enfrenta entonces con el problema con matemáticas «nuevas»; y en el avance de la demostración se habrá de encontrar con más rudimentos de cálculo infinitesimal: la ya mencionada integral. En el teorema I, que en opinión de muchos comentaristas del pisano es de elaboración tardía, utiliza términos tales como «massa» de velocidades o «agregatum» de éstas para explicar la suma finita de un número infinito de velocidades instantáneas; esto, es la integral de la función velocidad dependiente del tiempo que transcurre.

Estos conceptos, recogidos por Galileo en sus *Discorsi* se explican de forma más clara con la ayuda de un teorema anterior (1603) conocido como *Teorema de la Distancia Doble.* Su formulación y comentarios actuales los recoge de nuevo Carmen Azcárate en la forma que anotamos a continuación:

En el movimiento acelerado, el aumento de velocidad es continuo y... los grados de velocidad que cambian de un momento a otro... son infinitos; pero podremos ilustrar mejor nuestra idea dibujando un triángulo ABC, señalando en el lado AC tantas partes iguales como se quiera AD, DE, EF, FG y trazando por los puntos D, E F, G líneas rectas paralelas a la base BC; entonces quiero que se imagine que las partes de la línea AC son tiempos iguales, que las paralelas trazadas representan los grados de velocidad acelerados que crecen por igual en tiempos iguales y que el punto A es el estado de reposo, de donde parte el móvil que en el tiempo AD habrá adquirido el grado de velocidad DH... es evidente que antes de adquirir el grado de velocidad DH, lo que ocurre en el tiempo AD, el móvil habrá pasado por infinitos grados cada vez menores, adquiridos en los infinitos instantes que hay en el tiempo DA y que corresponden a los infinitos puntos que hay en la línea DA: así, para representar la infinidad de los grados de velocidad que preceden al grado DH, es necesario imaginar infinitas líneas, cada vez menores, trazadas desde los infinitos puntos de la línea DA, la cual infinidad de líneas representará al fin (in ultimo) la superficie del triángulo ADH; de este modo imaginaremos todo espacio atravesado por el móvil con un movimiento que, comenzando en el reposo y acelerándose uniformemente, habrá consumido (aver consumato) y se habrá servido (essersi servito) de infinitos grados de velocidad creciente, conforme a las líneas infinitas que, comenzando en el punto A se suponen trazadas paralelamente a la línea HD y a las líneas IE, KF, LG, BC, continuándose el movimiento tanto como se desee.

Completemos ahora el paralelogramo AMBC y prolonguemos hasta su lado BM no sólo las paralelas trazadas en el triángulo sino la infinidad de las que uno se

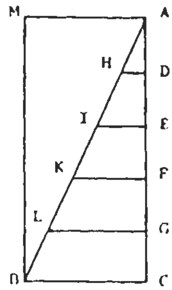


Fig. 2

imagina trazadas desde los puntos del lado AC. Entonces, así como la línea BC era la mayor de las infinitas líneas del triángulo y representaba el mayor grado de velocidad adquirido por el móvil en el movimiento acelerado, y toda la superficie del triángulo era la masa y la suma (la massa e la somma) de todas las velocidades con las que, en el tiempo AC, atravesaba tal espacio, así también el paralelogramo viene a ser una masa y un agregado (una massa ed aggregato) de otros tantos grados de velocidad, pero cada uno igual a la velocidad máxima BC; y esta masa de velocidades viene a ser el doble de la masa de velocidades crecientes del triángulo, del mismo modo que el paralelogramo es el doble del triángulo; entonces, si el móvil ha atravesado en un cierto tiempo un cierto espacio, es razonable y probable que sirviéndose de la velocidad uniforme que corresponde al paralelogramo, atraviese en el mismo tiempo y con movimiento uniforme, un espacio doble del atravesado por el movimiento acelerado.

Podemos comprobar de qué manera la demostración galileana se imbrica con los caminos de lo infinito y de lo infinitesimal, nada extraordinario por otra parte, por cuanto sabemos que el Cálculo Infinitesimal que se encuentra escondido detrás de estas pruebas implica la superación de dichas nociones tales como eran concebidas en épocas premodernas.

Como bien comenta Carmen Azcárate, lo novedoso del enunciado y de la demostración del teorema queda resumido en la frase: *...cuya infinidad de líneas representará, al fín, (in ultimo) la superficie del triángulo ADH.* Es importante este pasaje pues en él se esconden los dos conceptos elementales de todo el Cálculo. El término in ultimo (que es utilizado también por Newton en los *Principia*) esconde la noción de límite: aproximación infinitamente pequeña al valor de un límite. Por otra parte el término massa, que también utiliza Galileo con el calificativo de *agregato* está exigiendo la concreción del término integral: suma finita de un número infinito de líneas, a su vez infinitamente pequeñas. No nos queda sino destacar que estas nociones son las que mayor novedad aportan dentro de la basta bibliografía de Galileo, y que, por sí mismas anuncian la llegada de la nueva Matemática.

> De manera que podemos decir que la puerta está ahora abierta, por primera vez, a un método nuevo, acompañado por numerosos y maravillosos resultados que, en años venideros, atraerá la atención de otras mentes.

3. El Infinito y lo Infinitesimal en Galileo

A lo largo de todo el apartado anterior hemos bordeado continuamente el concepto de infinito, que, como ya indicábamos, está en la base de todo el desarrollo posterior del Cálculo Infinitesimal. Obviamente Galileo tuvo que afrontar la noción de infinito, que en su época había concitado la atención de la mayoría de los pensadores prerrenacentistas y postrenacentistas. El pisano afronta la cuestión y resuelve sólo a medias el nudo gordiano de lo infinitamente pequeño y de lo infinitamente grande. Volvamos de nuevo a los *Discorsi,* pues en esta obra encontraremos lo esencial de la teoría del infinito galileana.

Recordemos que, en esencia, en la época de Galileo el concepto de infinito se explicaba según lo aportado por Aristóteles, que suponía las categorías de infinito potencial e infinito actual. En los *Discorsi* Galileo afronta directamente el problema y pone en boca de Salvati la siguiente pregunta:

... Es ésta la razón de que, para ser más precisos, os pida que me digáis con toda franqueza si las partes extensas [3] *en una magnitud continua son, según vuestra opinión finitas o infinitas.*

A lo que responde Simplicio:

Y yo os respondo que son finitas e infinitas. Infinitas en potencia y finitas en acto. Infinitas en potencia: es decir, antes de la división. Pero finitas en acto: después de la división. Pues no hay que pensar que todas ellas estén en acto, sino sólo después de que se las divide o señale. En caso contrario se dice que están en potencia.

El diálogo continua, y entonces Salvati expone su concepción de lo infinito y, a su vez, de lo infinitamente pequeño y su noción de lo indefinidamente indivisible en los términos recogidos en palabras de Salvati, concepto que identifica con los átomos de la teoría atomista de Demócrito:

Aquí quisiera haceros notar cómo si reducimos y dividimos una línea en partes extensas (quante) y, por tanto, numerables... es imposible colocar tales partes en una longitud mayor que la que ocupaban cuando estaban conjuntamente dispuestas, una

3. «Quante» en la terminología latina.

tras otra, sin interponer entre ellas otros tantos espacios vacíos. Pero si nos imaginamos una línea reducida a partes inextensas (non quante), es decir, a la infinitud de sus indivisibles, podemos concebirla como inmensamente extendida, sin la interposición de espacios extensos, pero sí con la de infinitos indivisibles vacíos. Y esto que hemos dicho de las simples líneas debe extenderse también a la superficie y a los cuerpos sólidos, considerándolos compuestos de infinitos e inextensos átomos.

En esencia se trata de distinguir entre los términos quante y non quante. El primero tiene el sentido de una magnitud extensa y medible, o bien el de un conjunto de elementos discretos susceptibles de ser contados. El segundo habla de partes inextensas o indivisibles, y primeras componentes de las magnitudes.

Siguiendo con la discusión sobre lo infinito es momento de recordar que las contradiciones y paradojas que presenta tal concepto no se resuelven hasta la publicación de los estudios de Cantor en los últimos años del siglo XIX. Antes de ese momento las interpretaciones dadas por todos lo matemáticos no consiguieron solventar con precisión y rigor las contradiciones que surgían. Así le ocurre también a Galileo, que resuelve de forma altamente artificial la propiedad esencial, que en definitiva, permite caracterizar a todo conjunto infinito, ya sea numerable (con el cardinal de N, el conjunto de los números naturales) o no, a saber: que se pueda definir una correspondencia biunívoca entre todos sus elementos y una parte propia de él. Las palabras de Sagredo que explican la solución que encuentra Galileo a esta aparente paradoja las recogemos como sigue:

...habrá que decir que hay tantos números cuadrados como números, ya que son tantos como sus raíces, y raíces con todos los números. Decíamos al principio, sin embargo, que todos los números son muchos más que todos los cuadrados, puesto que la mayoría de ellos no son cuadrados... Con todo, en un número infinito, si pudiéramos concebirlo, habría que decir que hay tantos cuadrados como números en total.

Galileo se atreve en otro pasaje con esta paradoja de la comparación de diferentes clases o grados de infinitos (pensemos en el conjunto de los números naturales: 1,2,3,4,5,...,n,...; en la colección formada por todos los puntos de una recta, en la extensión de puntos que «caben» en un plano, etc.), lo que en terminología actual se conoce como diferente cardinalidad o potencia; y ayudándose de una demostración extremadamente intuitiva y elegante, pretende comparar el «grado» del infinito de la recta con el correspondiente al de un punto. La paradoja que se esconde en este teorema no queda resuelta en la Historia de la Matemática hasta que en 1912 Lebesgue formula con toda precisión el concepto de dimensión y de «medida» de un conjunto, resolviéndose la enigmática cuestión que plantea Galileo con el sencillo postulado que establece que puntos y circunferencias en el plano son conjuntos «de medida nula».

BIBLIOGRAFÍA

C. AZCÁRATE, *Las Matemáticas de Galileo. Estudio histórico sobre «La nueva ciencia del movimiento»*, Seminario de Historia de las Ciencias, Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, 1984.

Y. CHERAQUI, *Yo Galileo,* Ed. Anaya S. A., Madrid, 1990.

J. P. COLLETTE, *Historia de las Matemáticas, I,* Siglo XXI de España Editores, S. A., Madrid, 1985.

A. C. CROMBIE, *Historia de la Ciencia: De San Agustín a Galileo, 2,* Alianza Universidad, Madrid, 1987.

DIARIO EL PAÍS, *Sábado 31 de octubre de 1992, pág. 27*
Domingo 1 de noviembre de 1992, pág. 25
Sábado 3 de octubre de 1992, Babelia, pág. 10

A. FRAJESE, *Attraverso la storia della matematica,* Felice Le Monnier, Florencia, 1977.

GALILEO GALILEI, *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias,* Edición de C. Solis y J. Sadaba, Editora Nacional, Madrid, 1976.

M. KLINE, *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, I,* Alianza Universidad, Madrid, 1992.

J. P. MAURY, *Galileo, el mensajero de las estrellas,* Aguilar Universal, Madrid, 1990.

V. NAVARRO, *Galileo, Textos Cardinales,* Ediciones Península, Barcelona, 1991.

A. RUPERT HALL, *From Galileo to Newton,* Dover Publications INC, New York, 1981.