LA GEOMETRÍA DE LOS INDIVISIBLES: BUENAVENTURA CAVALIERI

José Barrios García
Dpto. de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna

Antecedentes históricos

El cálculo de áreas y volúmenes constituye uno de los temas recurrentes de las matemáticas desde la más remota antigüedad hasta nuestros días, y en haber hallado una solución adecuada basan éstas buena parte de su prestigio. Las técnicas desarrolladas por las diferentes civilizaciones en este largo espacio de tiempo recorren un sinfín de métodos. En lo que podemos llamar matemáticas occidentales la búsqueda de soluciones exactas en línea con los descubrimientos de los geómetras griegos llevará primero al método de exhaución y después al cálculo integral.

La naturaleza del continuo geométrico forma parte de los problemas relacionados con esta búsqueda, pues ¿de qué están formados un segmento de recta, un trozo de plano o una porción de volumen? ¿Qué le sucede a una figura geométrica cuando la dividimos una y otra vez en partes cada vez más y más pequeñas?

Tal cuestión suscitó un debate amplio y profundo entre los geómetras griegos que no cabe reproducir aquí. Señalemos tan sólo que hubo dos grandes posicionamientos: los partidarios del atomismo frente a los partidarios de la infinita divisibilidad.

Representantes destacados de ambas posturas fueron Demócrito de Abdera (460-370), y Aristóteles de Estagira (384-322), respectivamente [1].

Demócrito sostuvo que los cuerpos físicos estaban compuestos en última instancia por átomos indivisibles y parece haber aplicado esta idea a las matemáticas. Dado que sus escritos geométricos se han perdido sólo cabe especular sobre la verdadera naturaleza de sus ideas, pero algunos autores han argumentado que estas le permitieron descubrir que dos pirámides triangulares con igual base y altura tienen el mismo volumen. Para ello habría descompuesto los dos pirámides en un número indefinido de secciones planas o láminas indefinidamente delgadas paralelas a las bases. Comparando entre sí las secciones que se encuentran a la misma altura, y viendo —por semejanza— que son iguales, concluiría que las dos pirámides tienen el mismo volumen (Figura 1).

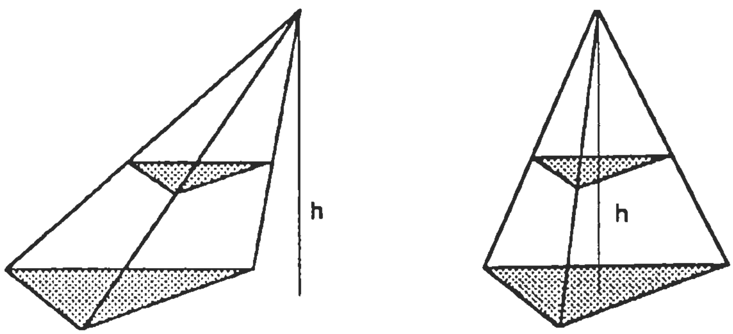


Fig. 1

Este resultado le permitiría argumentar que el volumen de una pirámide (o un cono) es la tercera parte del prisma (cilindro) que tiene su misma base y altura. Para ello basta ver que toda pirámide triangular define un prisma, con su misma base y altura, que puede descomponerse en tres pirámides, todas de igual base y altura, una de las cuales es la dada. El resultado se extiende fácilmente a cualquier pirámide de base poligonal, y en el caso del cono se consigue aumentando el número de lados de la pirámide (Heath 1981: 176-181).

1. Ya antes Zenón de Elea (490-425) había dirigido sus famosas cuatro paradojas sobre el movimiento a cuestionar tanto la teoría atomista (paradojas de La Flecha y El Estadio), como la infinita divisibilidad (paradojas de La Dicotomía y de Aquiles). Ver Heath (1981: 275).

Estos teoremas sólo serían rigurosamente demostrados más adelante por Eudoxo de Cnido (400-347), empleando el método de exhaución desarrollado por él [2]. Más tarde pasarían a formar parte del Libro XII de *Los Elementos* de Euclides (322-285).

Aristóteles sostuvo que al dividir el continuo en trozos cada vez más y más pequeños se seguirían obteniendo continuos de la misma naturaleza que el de partida, sin que se pudiera aislar nunca un elemento mínimo indivisible. Según esta opinión, la prueba de Demócrito sería inaceptable.

Como en tantas otras cuestiones, el enfoque de Aristóteles —acreditado por Eudoxo y Euclides— prevaleció en la comunidad científica. Pero no por unanimidad, Arquímedes de Siracusa (287-212), Nicolás de Oresme (1323-1382), Galileo Galilei (1564-1642), Johann Kepler (1571-1630), Buenaventura Cavalieri (1598-1647) y Evangelista Torricelli (1608-1647), entre otros, no dudaron en avanzar por la dirección que ya señalara Demócrito. Entre quienes lo hicieron de forma más decidida figuran Arquímedes y Cavalieri.

Arquímedes, en efecto, utiliza en *El Método* el tipo de argumentación atribuido a Demócrito planteando la posibilidad de calcular áreas y volúmenes de figuras operando mediante métodos mecánicos sobre las secciones que las componen. Considera, sin embargo, que este tipo de razonamiento, aunque de gran valor heurístico, no proporciona una demostración totalmente satisfactoria de los resultados que deben ser verificados rigurosamente por otras vías [3]. En la práctica, y hasta la creación del cálculo infinitesimal en el siglo XVII, el método de exhaución.

Cavalieri será quien —aún manteniendo una postura ambivalente respecto a la composición del continuo— se atreva a proponer una fundamentación rigurosa del cálculo de áreas y volúmenes de figuras mediante los infinitos segmentos rectos o infinitas superficies planas que las componen, y que él llama los *indivisibles* de la figura. Para ello intentará, con relativo éxito, una fundamentación rigurosa de sus indivisibles basándose en la teoría de magnitudes de Euclides. Su sofisticado método le permitirá obtener importantes resultados sobre cuadratura y cubatura de figuras lo que explica el éxito que obtuvo en su época, especialmente en la versión simplificada desarrollada por su amigo Evangelista Torricelli.

Sin embargo, tanto las dudas que planteaban sus fundamentos como la oscuridad con que escribió sus tratados motivaron que su obra fuese contradictoriamente entendida por los matemáticos, sucumbiendo pronto ante el empuje de los mucho más potentes y eficaces métodos algebraicos que por entonces se gestaban en Europa.

2. Sobre el método de exhaución ver Delgado (1992).

3. Una discusión sobre los motivos que podrían haber inducido a Arquímedes a negar la rigurosidad de su método puede verse en Vega (1992).

En nuestra ponencia trataremos de acercarnos al papel que jugaron sus ideas en el desarrollo del cálculo infinitesimal.

Biografía

Buenaventura Cavalieri nace en Milán hacia 1598. Durante su juventud en esa ciudad entra en contacto con la orden de los Jesuatas [4] en la que ingresa a los 17 años y donde permanecerá hasta su muerte. Entre 1616 y 1620 (con excepción de un año de estancia en Florencia hacia 1617) reside en el convento de la orden en Pisa, ciudad en la que muy pronto atiende las lecciones de matemáticas del benedictino Benedetto Castelli, discípulo a su vez de Galileo Galilei.

Fig. 2

Los progresos de Cavalieri son rápidos. En 1617 entra en contacto con Galileo. En 1618 sustituye temporalmente a Castelli en sus clases de matemáticas en Pisa. En 1619 aspira a una plaza vacante de profesor de matemáticas en la universidad de Bolonia, que en su opinión no consigue por la animadversión de Roma hacia su orden. Entre 1620 y 1628 imparte clases de matemáticas en Milán, Lodi y Parma. En 1629 obtiene, probablemente por medio de Galileo, una plaza temporal de profesor en la Universidad de Bolonia que ocupará hasta su muerte en 1647.

Entre 1619 y 1641 mantiene una abundante correspondencia con Galileo a quien envía más de un centenar de cartas sobre temas científicos que éste responde esporá-

4. Esta orden fue creada en 1367 por el papa Urbano V para prestar ayuda a las víctimas de la peste bubónica que asolaba Europa por esas fechas. Con el tiempo la orden entró en declive y su rama masculina fue disuelta por el papa Clemente IX en 1668. Su poca difusión y corta existencia ha motivado que, en ocasiones, Cavalieri haya sido erróneamente considerado miembro de la mucho más conocida orden de los Jesuitas.

dicamente. También mantiene una estrecha relación con Torricelli, e intercambios con científicos de distintos países europeos.

La Figura 2 muestra un retrato de Cavalieri conservado en el archivo fotográfico del Civici Musei de Milán (Andersen 1985: 290).

Obra publicada

Sus intereses científicos se centraron principalmente en la geometría, los logaritmos, y la astrología, materias sobre las que llegó a publicar once libros:

1632a	*Directorium generale vranometricum, in quo trigonometriae logorithmicae fundamenta (...).* Bolonia.
1632b	*Lo Specchio vstorio ouero Tratatto delle settioni coniche.* Bolonia (2ª ed. Bolonia 1650).
1635	*Geometria indiuisibilibus continuorum noua quadam ratione promota.* Bolonia. (2ª ed. Bolonia 1653). (Traducción al ruso comentada de los Libros I y II por S. J. Lure, Moscú-Leningrado 1940. Traducción al italiano y notas por Lucio Lombardo-Radice, Turín 1966).
1638	*Compendio delle regole de triangoli.* Bolonia.
1639a	*Centuria di varii problemi. Per dimos trare l'uso e la facilità de logaritmi nella gnomonica, astronomica, geograffia, altimetria, pianimetria, stereometria, & aritmetica prattica.* Bolonia.
1639b	*Nuoua pratica astrologica.* Bolonia.
1640	*Appendice della nuoua pratica astrologica.* Bolonia.
1643	*Trigonometria plana et sphaerica.* Bolonia.
1646	*Trattato della ruota planetaria perpetua e dell'uso di quella.* Bolonia. (Publicado bajo el pseudónimo de Silvio Filomantia).
1647	*Exercitationes geometricae sex.* Bolonia (reimpresión, con introducción de Enrico Giusti, Bolonia 1980). (Traducción al ruso comentada del Libro IV por S. J. Lure, Moscú-Leningrado 1940. Traducción al italiano del Libro III y notas por Lucio Lombardo-Radice, Turín 1966).
S. f.	*Tavola prima logarithmica. Tavola seconda logarithmica.* Bolonia.

El método de los indivisibles

Aunque desde 1621 mantenía correspondencia con Galileo sobre su método, las dudas que le seguían planteando sus fundamentos hicieron que retrasara su publicación hasta 1635 (*Geometria*) y 1647 (*Exercitationes*), las dos obras donde se ocupará de exponer con detalle los resultados alcanzados [5]. El contenido de estos dos libros sería el siguiente (Andersen 1985: I.3):

Geometria 1635 (siete libros):

Libro I: Expone cuestiones previas referentes a figuras planas y sólidas. Teoremas introductorios.
Libro II: Presenta una primera versión del método de los indivisibles (método colectivo), y prueba algunos teoremas generales sobre colecciones de indivisibles.
Libros III, IV y V: Aplica los teoremas del Libro II a la cuadratura y cubatura de figuras relativas a las secciones cónicas.
Libro VI: Lo dedica a la cuadratura de la espiral y otros resultados sobre cilindros, esferas, paraboloides y esferoides.
Libro VII: Presenta una segunda versión del método de los indivisibles (método distributivo).

Exercitationes 1647 (seis libros):

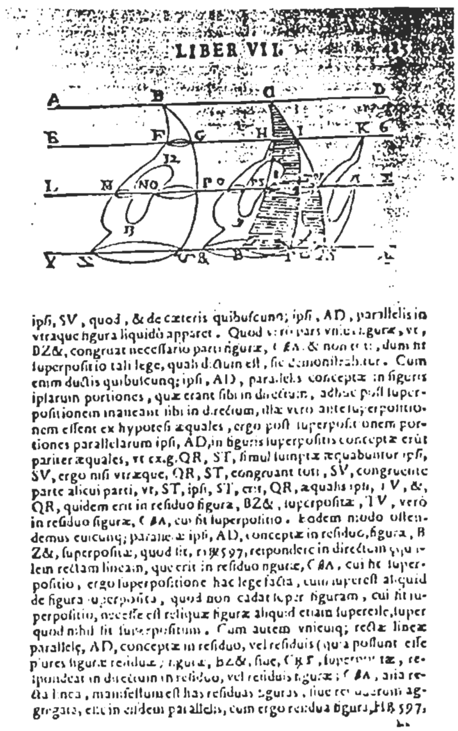
Libro I: Presenta una versión revisada del método colectivo, sugiriendo algunas simplificaciones.
Libro II: Desarrolla una nueva presentación del método distributivo.
Libro III: Defiende su método frente a las acerbas críticas del suizo Paul Guldin (1577-1642).
Libro IV: Presenta una generalización del método colectivo que le permite trabajar con curvas algebraicas de grado mayor que dos.
Libro V: Determina centros de gravedad basándose parcialmente en el método de los indivisibles.
Libro VI: Presenta material misceláneo.

Cavalieri intentó dotar a su cálculo con indivisibles de todo el rigor de la matemática griega elaborando una sofisticada maquinaria conceptual que resulta muy difícil de resumir en unos pocos folios sin traicionar a su autor, dada la extensión, dificultad, originalidad y oscuridad de su obra, por otra parte de muy difícil acceso [6].

5. La larga gestación de estos dos libros, y sus discusiones con Galileo sobre el manejo de infinitas líneas (en acto) pueden verse en Andersen (1985: I.4, IX.1). Al parecer Galileo, aunque él mismo utilizara los indivisibles en alguna ocasión, no terminó nunca de aprobar el método de Cavalieri.

6. Afortunadamente, una excelente recopilación de sus ideas —muy a menudo malinterpretadas en la literatura— puede verse en Andersen (1985), donde el lector encontrará una completa y valiosa fuente de datos e interpretaciones sobre el método y su difusión por los círculos matemáticos de la época. En gran parte mi exposición se basa en dicho trabajo. Ver también Andersen (1984).

En la Figura 3 reproducimos una página del Libro VII de *Geometría* (Struik 1969: 212). Como se observa en ella, Cavalieri procede de forma retórica sin apenas simbolismo algebraico, lo que hace farragosa y difícil la lectura de sus obras.



LIBER VII.

ipsi, SV, quod, & de cæteris quibuscunq; ipsi, AD, parallelis in vtraque figura liquidò apparet. Quod vero pars vnius figuræ, vt, BZ&, congruat necessario parti figuræ, C ℞A, & non toti, dum fit superpositio tali lege, quali dictum est, sic demonstrabitur. Cum enim ductis quibuscunq; ipsi, AD, parallelis conceptæ in figuris ipsarum portiones, quæ erant sibi in directum, adhuc post superpositionem maneant sibi in directum, illæ vero ante superpositionem essent ex hypotesi æquales, ergo post superpositionem portiones parallelarum ipsi, AD, in figuris superpositis conceptæ erũt pariter æquales, vt ex.g. QR, ST, simul sumptæ æquabuntur ipsi, SV, ergo nisi vtræque, QR, ST, congruant toti, SV, congruente parte alicui parti, vt, ST, ipsi, ST, erit, QR, æqualis ipsi, TV, &, QR, quidem erit in residuo figuræ, BZ&, superpositæ, TV, verò in residuo figuræ, C ℞A, cui fit superpositio. Eodem modo ostendemus cuicunq; parallelæ ipsi, AD, conceptæ in residuo figuræ, BZ&, superpositæ, quod sit, ℞ 597, respondere in directum æqualem rectam lineam, quæ erit in residuo figuræ, C ℞A, cui fit superpositio, ergo superpositione hac lege facta, cum supereſt aliquid de figura superposita, quod non cadat super figuram, cui fit superpositio, necesse est reliquæ figuræ aliquid etiam supereſſe, super quod nihil sit superpositum. Cum autem vnicuiq; rectæ lineæ parallelę, AD, conceptæ in residuo, vel residuis (quia possunt esse plures figuræ residuæ) figuræ, BZ&, siue, C ℞ F, superpositæ, respondeat in directum in residuo, vel residuis figuræ, C ℞A, alia recta linea, manifestum est has residuas figuras, siue residuarum aggregata, esse in eisdem parallelis, cum ergo residua figura, H ℞ 597,

Fig. 3

La esencia del método consiste en dividir las figuras planas en segmentos rectos paralelos a un segmento dado. Análogamente, se dividen los volúmenes en superficies planas paralelas a un plano dado. Estos elementos mínimos en que divide a una figura los llama Cavalieri los *indivisibles* de la figura. Sobre esta base mantendrá que: dos superficies planas o dos volúmenes cualesquiera (con la misma altura) guardarán entre sí la misma relación que guarden sus indivisibles, dicho de otra manera, comparando sus indivisibles podremos conocer la relación que guardan sus áreas o volúmenes. Sin embargo, presenta dos modos de llevar a cabo esta comparación:

Método colectivo: se comparan todos los indivisibles de una figura tomados de forma colectiva, con todos los indivisibles de la otra figura tomados también de forma colectiva.

Método distributivo: se comparan por separado cada uno de los indivisibles de una figura con el correspondiente indivisible de la otra figura [7].

Dado que Cavalieri le dio preeminencia al primer método frente al segundo, nos ocuparemos casi exclusivamente de él, señalando con cierto detalle su fundamentación y algunos de los resultados alcanzados.

Las colecciones de indivisibles

Desarrollando con habilidad su método, Cavalieri elabora diversos tipos de colecciones de indivisibles que le permiten tratar una gama muy variada de figuras geométricas.

Entre estas colecciones se encuentran las formadas por *todos los puntos* de un segmento recto, *todas las líneas* de una figura plana, *todos los planos* de una figura sólida, *todas las figuras planas similares* construidas sobre las líneas de una figura plana dada, o *todos los rectángulos* formados a partir de dos figuras planas dadas. Detallemos algunos de estos conceptos (Andersen 1985: III-IV).

Todas las líneas TL(F)

Si a través de tangentes opuestas a una figura plana dada se dibujan dos planos paralelos e indefinidamente extendidos, bien perpendiculares o bien inclinados al plano de la figura dada, y si uno de los planos paralelos se mueve hacia el otro permaneciendo paralelo con él y hasta coincidir con él; entonces las rectas individuales que durante el movimiento forma la intersección entre el plano que se mueve y la figura dada, tomadas colectivamente, se llaman todas las líneas (omnes lineae) de una figura tomadas con una de ellas como directriz (regula); esto es cuando el plano es perpendicular a la figura [*recti transitus*]. *Sin embargo, cuando los planos están inclinados con respecto a la figura las líneas se denominan todas las líneas de la misma figura dada con respecto a un tránsito oblicuo (obliqui transitus), la directriz sigue siendo, de forma similar, una de ellas.*

(*Geometria*, Definición II.1)

A la colección de todas las líneas de una figura plana F tomadas respecto de una *regula*, la notaremos por TL(F), asumiendo que no hay confusión respecto a la *regula* (Figura 4) [8].

7. La creación de este segundo método parece haber sido un intento de mejorar la fundamentación de su teoría frente a las reticencias que mostraba Galileo por el método colectivo (Andersen 1985: IX.1).

8. En esta y en las siguientes definiciones simplificamos ligeramente la notación propuesta por Andersen (1985).

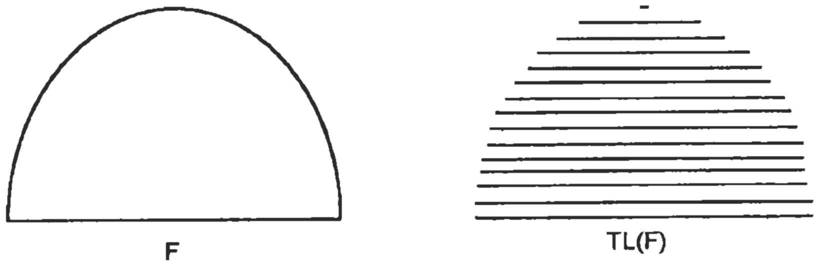


Fig. 4

Todos los planos TP(S)

En la siguiente definición (II.2), Cavalieri extiende el concepto a figuras sólidas que posean dos planos tangentes opuestos. Así, *todos los planos* de una figura sólida S, tomando uno de los planos tangentes como *regula*, son todas las figuras planas TP(S) que produce la intersección de la figura sólida con un plano que se mueve entre los dos planos tangentes paralelamente a la *regula* (Figura 5).

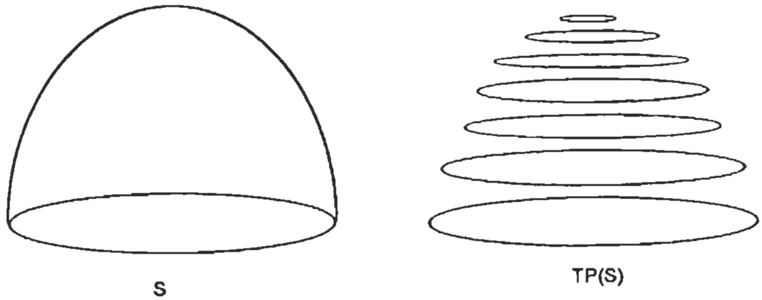


Fig. 5

Todos los cuadrados TC(F)

Dada una figura plana F, Cavalieri también considera colecciones de figuras planas, paralelas y semejantes entre sí, construidas sobre cada una de las líneas de F. En particular, *todos los cuadrados* de F, que notaré TC(F), serán todos los cuadrados que tienen por lado una línea de F (Figura 6).

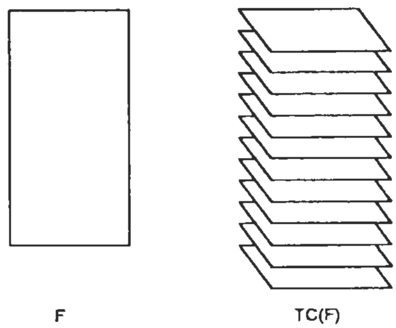


Fig. 6

Todas las potencias n-ésimas TL^n (F)

Cavalieri extiende el concepto anterior considerando para una figura plana F lo que llamaremos *todas las potencias n-ésimas* de las líneas de F, y notaremos por TL^n (F). En los casos n = 1, 2 se tiene TL^1 (F) = TL(F) y TL^2 (F) = TC(F).

Todos los rectángulos TR(F, G)

Dadas dos figuras planas F y G con una misma altura y regula común, *todos los rectángulos* de las dos figuras son todos los rectángulos *f* x *g* formados a partir de todos los pares de líneas correspondientes, *f* y *g*, de las dos figuras (Figura 7).

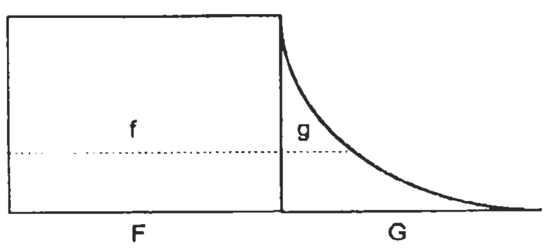


Fig. 7

Fundamentación del método colectivo

La intención de Cavalieri es demostrar que las colecciones de indivisibles (o más exactamente, las clases de equivalencia definidas por la relación de congruencia) son magnitudes en el sentido estricto de *Los Elementos* de Euclides, pero su argumento se debilita en varios puntos debido tanto a las propiedades de los indivisibles que asume implícitamente, como a los problemas que presenta el manejo de infinitos indivisibles en cada colección (Andersen 1985: V).

Restringiéndonos a figuras planas (el proceso es análogo en dimensión superior), el orden en que procede Cavalieri es el siguiente:

Definición II.1	Todas las líneas de una figura plana, TL(F)
Postulado II.1	F congruente con G => TL(F) congruente con TL(G)
Teorema II.1	TL(F) y TL(G) son magnitudes que tienen razón [9]
Escolio	Lo que se usa en la comparación no es el número de líneas de una colección sino *la magnitud que es igual, congruente con, el espacio ocupado por estas líneas.*
Teorema II.2	F = G => TL(F) = TL(G) [10]
Teorema II.3	F : G = TL(F) : TL(G)

Asunciones implícitas. El principio ut unum

En todo este proceso Cavalieri asume implícitamente varias propiedades de las colecciones de indivisibles y sus relaciones con las figuras, que utiliza pero no explicita.

Estas propiedades son:

Dadas dos colecciones A y B de la misma clase:

1. A < B ó A = B ó A > B.
2. A y B pueden sumarse. El resultado A+B es una magnitud de la misma clase que A y B.
3. Si A > B, B puede ser substraído de A. El resultado A-B es una magnitud de la misma clase que A y B.

9. Para probarlo utiliza la Definición V.4 de Euclides: dos magnitudes tienen razón una a otra cuando al multiplicarse son capaces de exceder una a otra. La demostración está poco cuidada y presenta entre otros problemas la elección del máximo de una cantidad infinita de segmentos.

10. Su demostración conlleva un problema de proceso infinito.

Dadas tres figuras F, G y H de la misma clase:

4. F = G + H => TL(F) = TL(G) + TL(H).

5. F > G => TL(F) > TL(G).

Y el crucial principio *ut unum:*

6. Como un antecedente es al consecuente, así son todos los antecedentes a todos los consecuentes [11].

Principio de Cavalieri

Pero Cavalieri basará en gran parte la obtención de resultados en su siguiente teorema, más conocido como principio de Cavalieri:

Si dos figuras planas (o sólidas) tienen igual altura, y si las secciones hechas por rectas paralelas (o planos paralelos) a las bases y a igual distancia de ellas están siempre en una misma razón, entonces las figuras planas (o sólidas) están también en esa misma razón.

(*Geometria*, Teorema II.4)

Su demostración se sigue inmediatamente del principio *ut unum* y el Teorema II.3.

Aunque en la actualidad las debilidades que presenta su fundamentación lo han excluido de lo que se entiende por matemática rigurosa, sigue siendo un instrumento útil en cursos introductorios a la geometría como justificación plausible de resultados básicos, de otro modo inaccesibles a quienes no estén iniciados en las técnicas más complejas del método de exhaución o del cálculo integral.

Como ilustración —y abandonando por un momento el contexto histórico— veamos algunas aplicaciones sencillas pero potentes, de utilidad en el aula.

Figuras distorsionadas

La Figura 8 muestra como utilizar este principio para argumentar la conservación del volumen en figuras adecuadamente distorsionadas. Dado que las tres figuras tienen la misma altura y sus secciones paralelas a las bases son iguales, las tres tienen el mismo volumen.

11. En el caso de figuras planas su significado sería: si dos figuras planas F y G tienen sus bases situadas sobre una misma recta, tienen la misma altura, y todos los pares de secciones correspondientes f y g, en TL(F) y TL(G) , están en una misma razón, entonces TL(F) y TL(G) están en esa misma razón. Como veremos después, Cavalieri generalizaeste principio a otros tipos de relaciones entre las líneas.

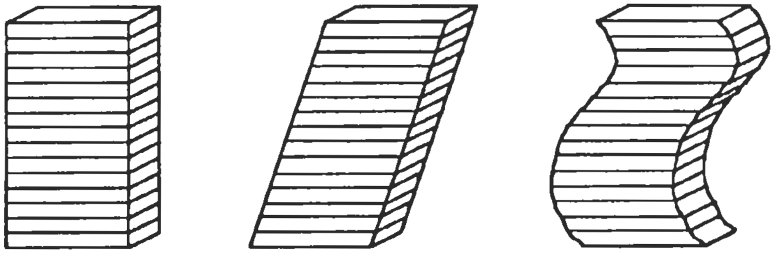


Fig. 8

Área de la elipse

Como se deduce de las ecuaciones de la elipse de semiejes a y b, y del círculo de radio a mostrados en la Figura 9, sus respectivos indivisibles l y m están en la proporción $l / m = b / a$. Del principio de Cavalieri se deduce que las áreas de las dos figuras están en la misma proporción. Es decir:

$$\frac{l}{m} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{\text{Área de la elipse}}{\text{Área del círculo}} = \frac{b}{a} \Rightarrow \text{Área de la elipse} = \pi \cdot a \cdot b$$

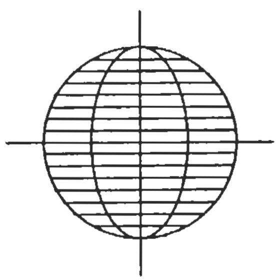


Fig. 9

Volumen de la esfera

Consideremos una semiesfera de radio r y un cilindro de radio r y altura r al que le sustraemos el cono que tiene por base la tapa superior del cilindro y por vértice el centro de la base inferior del cilindro (Figura 10). Dado que las secciones de las dos figuras (un círculo y una corona circular) coinciden para cualquier altura h, el principio de Cavalieri asegura:

Volumen de la semiesfera = Volumen del cilindro - Volumen del cono

de donde:

$$\text{Volumen de la esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

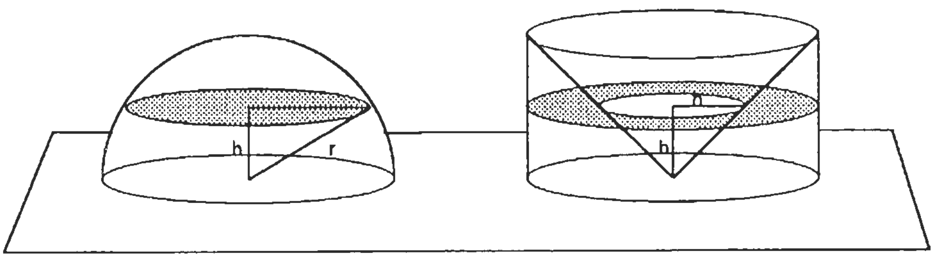


Fig. 10

Nótese que el principio de Cavalieri *no* se aplica a segmentos contenidos en el plano (Figura 11) ni tampoco, por una razón similar, a figuras planas contenidas en el espacio. Evitar estos casos podría ser el motivo que llevó a Cavalieri a distinguir los tránsitos rectos de los tránsitos oblicuos (Andersen 1985: III.7).

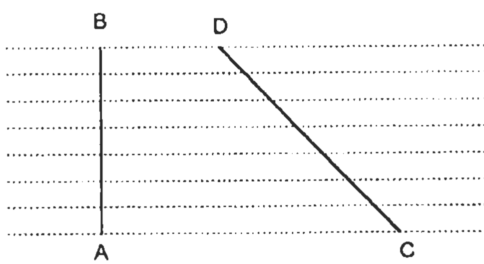


Fig. 11

La cuadratura de la parábola

Con las herramientas mencionadas anteriormente Cavalieri es capaz de conseguir una cantidad tal de resultados que sólo su resumen nos llevaría demasiado lejos. Nos limitaremos a esbozar su contribución a un resultado estrechamente vinculado con el nacimiento del cálculo: la cuadratura de la parábola y = x^n. En notación moderna:

$$\int_0^a x^n \, dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Veamos como reduce esta cuadratura a una comparación de indivisibles que logra resolver para n = 1, ..., 6 y 9, lo que le lleva a enunciar que la solución es cierta para todo n natural [12] (Andersen 1985: VI.1-3 y VIII.7-8).

Sea ABCD un rectángulo dividido en dos triángulos por su diagonal AC (Figura 12). Sea AHC la parábola y = xn con eje AD. Sea FE un indivisible del rectángulo ABCD, y sean H y G los puntos de corte de FE con la parábola y con la diagonal. En estas condiciones [13]:

$$FE : FH = BC : FH = (AB)^n : (AF)^n = (BC)^n : (FG)^n = (FE)^n : (FG)^n$$

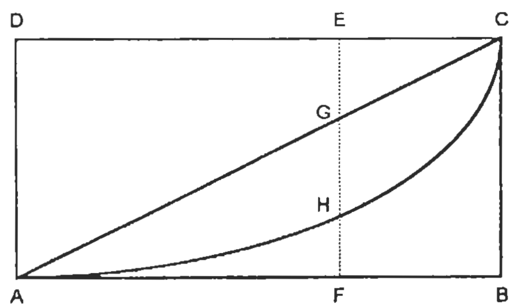


Fig. 12

12. En *Geometria* (1635, Libro II) consigue el resultado para n = 1 y 2. En 1637 le comunica por carta a Galileo haber descubierto el caso general en el que se ha visto interesado por un problema planteado por Kepler en su *Stereometria* (1615) sobre el volumen de un casco parabólico. En *Centauria* (1639) publica como apéndice una solución en la que establece el caso general, pero sólo prueba los casos n = 1, ..., 4. En *Exercitationes* (1647, Libro IV) publica una prueba de los casos n = 3, ..., 6 y 9, estableciendo de nuevo el caso general.

13. Como se deduce de la propia definición de la parábola y de la semejanza de los triángulos AFG y ABC.

Tomando las correspondientes colecciones de indivisibles, se obtiene:

$$ABCD : AHCB = TL\ (ABCD) : TL\ (AHCB) = TL^n\ (ABCD) : TL^n\ (ABC)$$

Pero Cavalieri demuestra que esta proporción es:

$$TL^n\ (ABCD) : TL^n\ (ABC) = (n+1) : 1 \text{ para } n = 1, \ldots, 6 \text{ y } 9.$$

Resolviendo así la cuadratura de la parábola en los siete casos señalados.

Veamos brevemente su demostración para los casos n = 1 y 2 (el caso n = 3 puede verse también en Struik 1969: 214-216).

Caso $n = 1$ $\qquad$ $TL\ (ABCD) : TL\ (ABC) = 2 : 1$

Sea un rectángulo ABCD dividido en dos triángulos por su diagonal AC (Figura 13). Tomando CG = FA, a cada indivisible EF del triángulo ABC le hacemos corresponder el indivisible GH del triángulo ACD. Es fácil ver que EF=GH, luego TL(ABC) = TL(ACD), y TL(ABCD) = 2 TL(ABC).

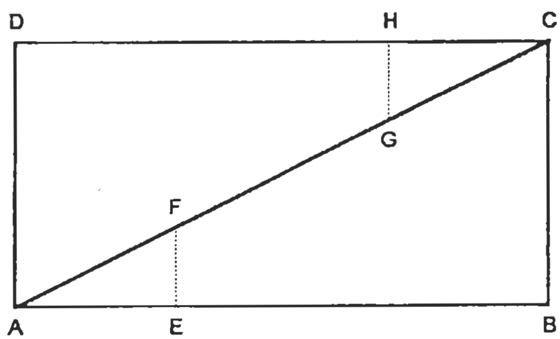


Fig. 13

Caso $n = 2$ $\qquad$ $TC\ (ABCD) : TC\ (ABC) = 3 : 1$

Construyamos ahora cuadrados sobre los indivisibles del rectángulo ABCD y sobre los indivisibles del triángulo ABC (Figura 14). Sea RV un indivisible de ABCD. Sean F y E los puntos medios de AD y BC. Sean G y M los puntos medios de AB y FE. Sean S y T los puntos de corte de RV con FE y AC.

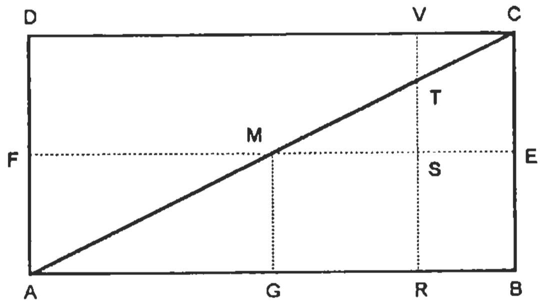


Fig. 14

En estas condiciones el Teorema II.9 de Euclides asegura: $RT^2 + TV^2 = 2 (RS^2 + ST^2)$. Pero como esto ocurre para todos los indivisibles RV de ABCD, Cavalieri mantiene, basándose en una especie de principio *ut unum* generalizado, que las correspondientes colecciones de cuadrados guardan la misma relación, es decir:

TC(ABC) + TC(ACD) = 2 TC(ABEF) + 2 TC(MEC) + 2 TC(AMF).

De donde obtiene, por congruencia:

TC(ABC) = TC(ABEF) + 2 TC(AMF) (1)

Por otra parte, es fácil ver [14] que:

TC(ABCD) = 4 TC(ABEF) (2)

y TC(ABCD) = 8 TC(AGMF)

Luego [15] TC(ABC) = 8 TC(AMF) (3)

De (2), (1) y (3) se sigue:

TC(ABCD) = 4 TC(ABEF)
= 4 TC(ABC) - 8 TC(AMF)
= 4 TC(ABC) - 1 TC(ABC)
= 3 TC (ABC). c. q. d. [16]

14. Aunque apoya la demostración en un teorema anterior más general, el II.11.

15. Según *Geometria* (Teorema II.22): la razón entre *todos los cuadrados* de un paralelogramo y *todos los cuadrados* de uno de sus triángulos diagonales, es constante. En este caso: TC(ABCD) : TC(ABC) = TC(AGMF) : TC(AMF).

16. Una consecuencia inmediata de este teorema es que la pirámide de base cuadrada es un tercio del prisma correspondiente. Procediendo análogamente con colecciones de rectángulos construidos sobre trapecios consigue los resultados equivalentes a la integral del polinomio general de primer y segundo grado.

El método distributivo

Preocupado por las reticencias de Galileo y las reacciones que pudiera provocar su publicación, Cavalieri esbozó una segunda versión de su método que publicó en los Libros VII de *Geometria* y II de *Exercitationes*, y destinada a evitar los problemas relacionados con el manejo de infinitas líneas en cada colección.

Digamos tan sólo que en esta segunda versión demuestra primeramente el llamado teorema de Cavalieri de forma distributiva y sin hacer uso de las colecciones de indivisibles (la demostración procede por superposición y presenta un problema de proceso infinito). A partir de este teorema, y sin utilizar colecciones de líneas, duplica algunos de los resultados que ya había alcanzado por el método colectivo (para más detalles ver Andersen 1985: IX)[17].

Algunas objeciones al método

Como hemos señalado antes, Cavalieri sostenía desde 1621 un intercambio epistolar con Galileo sobre la fundamentación del método. En el centro de la discusión se encontraba el viejo y espinoso problema de la composición del continuo, tema sobre el que la iglesia se había pronunciado en el Concilio de Constanza (1415) considerando herético su composición por indivisibles (Galilei 1981: 107 n. 27).

La postura de Cavalieri sobre esta importante cuestión es ambivalente según se desprende de las cartas que envió a Galileo (Andersen 1985: III.5). De hecho no entra a juzgarla en profundidad por considerarla ajena a su método.

Tras ser publicada, la *Geometria* gozó de gran popularidad en los círculos matemáticos de la época dados los resultados que alcanzaba, pero su fundamentación suscitó serias objeciones. Conocemos poco las del propio Galileo pues sus cartas a Cavalieri en su mayor parte se han perdido, nos limitaremos, pues, a señalar las que partieron de Paul Guldin y de cierto autor anónimo.

Paul Guldin arremetió duramente en su *Centrobaryca* (Viena 1635-1641) contra la fundamentación del método de los indivisibles, negando que entre dos colecciones infinitas de líneas pueda existir razón. Entiende que sólo caben dos posibilidades de concebir estas colecciones como magnitudes, y que ambas son inútiles para cuadrar figuras (Andersen 1985: III.4):

a) Cavalieri entremezcla todas las líneas de TL(F), descritas por el plano que se mueve, con el espacio interior a la figura, es decir, con la propia figura.

17. La forma distributiva del teorema puede verse tambien en Struik (1969: 209-214). La página de *Geometría* que contiene la ilustración de esta versión del teorema puede verse en nuestra Figura 3.

b) La magnitud igual al espacio ocupado por TL(F) es una longitud, compuesta por todas las líneas de la figura.

A estas cuestiones Cavalieri (1647) responde que aunque TL(F) es infinito con respecto al número de líneas, es finito en cuanto a su extensión espacial. Señalando que si uno asume que el continuo está compuesto por indivisibles, entonces una figura plana y la magnitud de *todas sus líneas* son una sola y misma cosa, y si uno asume la infinita indivisibilidad —en cuyo caso sí puede mantenerse que TL(F) consiste sólo de longitudes—, como todas las líneas de TL(F) deben ser consideradas puestas en su sitio en la figura, la magnitud de TL(F) está limitada por los mismos límites que los de la figura. No termina de aclarar como debe entenderse exactamente el espacio ocupado por TL(F) si se asume la infinita divisibilidad, pero asegura que también en ese caso existe razón entre colecciones de indivisibles. En cualquier caso, argumentaría, si el continuo no está compuesto de indivisibles estará compuesto de indivisibles y algo más, y con mayor motivo las TL(F) serán magnitudes finitas con razón unas a otras.

Otra conocida objeción se la hizo llegar un comunicante anónimo hacia 1644, señalándole la debilidad de su método sobre un simple triángulo (Andersen 1985: III.7): Sea un triángulo no isósceles ABC dividido en dos triángulos por la altura CD (Figura 15). Tomando CD *como regula*, a cada línea *l* de TL(ACD) le podemos hacer corresponder la línea *m* de TL(BCD) con su misma longitud, luego: TL(ACD) = TL(BCD), lo que implica (Geometria Teorema II.3) ACD = BCD. De ello se deduce el resultado, absurdo, de que todos los triángulos con la misma altura son congruentes.

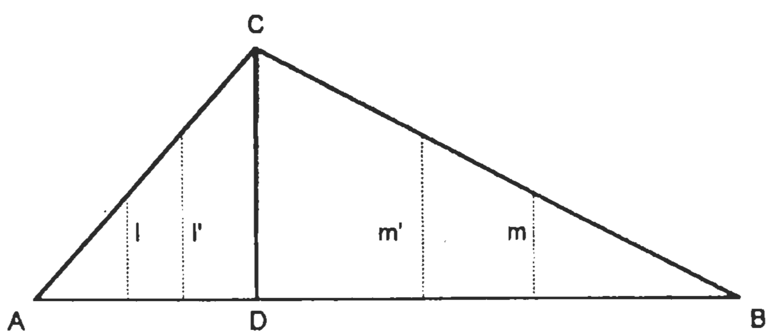


Fig. 15

Cavalieri replica que el Teorema II.3 se refiere a colecciones de líneas generadas por el mismo tránsito, lo que obviamente no es el caso, pues la distancia entre dos líneas, *l* y *l'*, de ACD no es la misma que entre las dos líneas, *m* y *m'*, que les corresponden en BCD.

Bibliografía

Andersen K.

1984 Las Técnicas del Cálculo 1630-1660. En: Grattan-Guinness (1984: 22-68).

1985 Cavalieri's Method of Indivisibles. *Archive for History of Exact Sciences* (Berlin), pp: 291-367.

Arquímedes

1986 *El Método.* Introducción y notas de L. Vega. Madrid, Alianza Editorial (LB 1151).

Boyer C. B.

1941 Cavalieri, Limits and Discarded Infinitesimals. *Scripta Mathematica,* 8: 79-91.

1959 *The History of the Calculus and its Conceptual Development.* 2nd printing [1949]. New York, Dover.

1968 *A History of Mathematics.* New York, John Wiley & Sons.

Delgado Marante A.

1992 Método de Exhaución. En: *Historia de la Geometría Griega. Actas del I Seminario Orotava de Historia de la Ciencia.* S/C de Tenerife. Consejería de Educación, Gobierno de Canarias, pp: 292-308.

Euclides

1956 *The Thirteen Books of The Elements.* Translated from the text of Heiberg with introduction and commentary by Sir T. L. Heath. 2nd ed. revised with additions [1925]. New York, Dover. 3 vols.

Galilei G.

1981 *Consideraciones y Demostraciones Matemáticas sobre dos Nuevas Ciencias* [1638]. Edición preparada por C. Solís y J. Sádaba. Madrid, Editora Nacional.

González Urbaneja P.

1992 *Las raíces del Cálculo Infinitesimal en el siglo XVII. Una investigación histórica sobre las técnicas y métodos que condujeron al descubrimiento del cálculo infinitesimal.* Madrid. Alianza Editorial (AU 716).

Grattan-Guinness I. (Compilador)

1984 *Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos 1630-1910. Una Introducción Histórica.* Traducción de M. Martínez Pérez. Madrid, Alianza Editorial (AU 387).

Heath T. L.

1981 *A History of Greek Mathematics (From Thales to Diophantus)* [1921]. New York, Dover. 2 vols. (Reimpresión corregida).

STRUIK D. J.
1969 *A Source Book in Mathematics, 1200-1800.* Cambridge (Massachusetts), Harvard University Press.

VEGA REÑÓN L.
1992 Arquímedes: El Método. En: *Historia de la Geometría Griga. Actas del I Seminario Orotava de Historia de la Ciencia.* S/C de Tenerife, Consejería de Educación, Gobierno de Canarias, pp: 393-421.