LA INFLUENCIA DE LAS IDEAS ARGUESIANAS EN EL DESCUBRIMIENTO DE LEIBNIZ DEL CÁLCULO INFINITESIMAL *

Javier Echeverría
Profesor de filosofía de la Ciencia
Universidad del País Vasco

1. Introducción

El gran éxito de la geometría cartesiana y del Cálculo Infinitesimal de Newton y Leibniz durante el siglo XVII oscurecieron los trabajos de Desargues, Pascal y otros autores sobre Geometría Perspectiva. Sin embargo, la noción arguesiana de *punto del infinito,* así como el hexagrama de Pascal y la teoría de la involución de Desargues, que luego fueron precedentes de la obra de Monge y de la aparición de la Geometría Proyectiva o Sintética en el siglo XIX, interesaron en su momento a algunos pocos matemáticos del siglo XVII, y entre ellos a Leibniz. Nada se ha comentado sobre el papel que las ideas arguesianas jugaron en el descubrimiento por parte de Leibniz del Cálculo Diferencial. La reciente edición del texto completo del

* Este artículo ha sido preparado en el marco de un proyecto de investigación financiado por la Universidad del País Vasco (1993-1995) y dirigido por el Prof. Miguel Sánchez-Mazas sobre «Nuevas ideas, nuevos documentos y nuevas lecturas de la Lógica y la Matemática de Leibniz». Agradezco al Leibniz-Archiv de Hannover, y en particular a los Profesores Heinekamp y Breger, las facilidades que siempre se me han concedido para consultar y utilizar los materiales guardados en la Landesbibliothek de Hannover.

De Quadratura Arithmetica por parte de Eberhard Knobloch [1] muestra que, aparte de los trabajos de Fermat, Roberval, Gregory, St. Vicent y otros muchos sobre las cuadraturas y las investigaciones de los matemáticos ingleses sobre las series numéricas, las ideas perspectivas de Desargues y de Pascal también jugaron un papel en el descubrimiento leibniciano del Cálculo Diferencial. El presente artículo tiene como objetivo aportar algunos documentos poco conocidos al respecto y comentar esta influencia, que en principio puede parecer sorprendente. Se muestra así que la Geometría Perspectiva del XVII no se redujo a la práctica de pintores, arquitectos, escenógrafos y artesanos (corte de piedras, relojes de sol, etc.), sino que también incidió en uno de los principales avances de la matemática teórica a finales del siglo XVII.

2. *Leibniz, lector de Desargues y de Pascal*

Es sabido el interés que Leibniz siempre mostró por las ideas de Desargues y de Pascal sobre Geometría Perspectiva. Entre otros, Jean Mesnard y René Taton han reconstruído minuciosamente la búsqueda por parte de Leibniz de papeles y documentos de Desargues y Pascal durante su estancia en París (1672-1676) [2]. Taton señala que:

> «ce n'est pas sur sa propre initiative, mais pour répondre à des demandes pressantes du mathématicien anglais John Collins, demandes répercutées auprès de lui par H. Oldenbourg, sécretaire de la Royal Society, qu'il s'est efforcé de retrouver et de consulter les oeuvres perdues ou egarées de Desargues et de Pascal, avant de prendre lui-même un intérêt évident à l'étude des pièces qu'il put découvrir [3].

Leibniz, efectivamente, había sido informado en 1673 por Collins y Oldenbourg sobre la posible existencia de una obra de Desargues titulada *Leçons de Tenèbres;* le encargaban buscar un ejemplar de dicho libro en París, caso de que existiera y fuera localizable:

> «There came lately to our view and perusall a folio *Treatise of perspective* written by Mons. Heuret, wherein he censures and rejects the Conickes of Mons. Desargues, entituled, *Lecons de tenebres,* whereof we understand, there were but 50 Coppies in all printed, and it will be extreame difficult to procure one of them [4]».

1. G. W. Leibniz, *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis,* ed. E. Knobloch, Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht, 1993, 160 pp.

2. Ver Jean Mesnard, «Leibniz et les papiers de Pascal», *Studia Leibnitiana Supplementa* XVII, Wiesbaden: Steiner 1978, pp. 45-48 y René Taton, «L'initiation de Leibniz à la Géométrie», *Ibid.*, pp. 103-129.

3. R. Taton *o.c.*, p. 108.

4. Carta de Collins en el envío de Oldenbourg a Leibniz del 20 de abril de 1673. *Akademie-Ausgabe* III, 1, Br. 13, p. 55.

El interés de Collins por las ideas de Desargues se refería a la posibilidad de construir los tres tipos de cónicas mediante un mismo método, partiendo de una esfera cuyo centro sería el ojo O y que a continuación sería cortada de tres maneras diferentes, obteniendo la elipse, la parábola y la hipérbola. Este tipo de tratamiento de la teoría de cónicas le resultaba desconocido a Leibniz, que por aquella época era un aprendiz en Matemáticas. Tras leer algunas obras al respecto, su interés por las propuestas de Desargues pasó a ser muy grande, motivo por el cual se aplicó a la búsqueda de documentos de Desargues al respecto.

En el mismo envío, Collins y Oldenbourg también le pedían a Leibniz que tratara de buscar los trabajos de Pascal sobre la obra geométrica de Apolonio, trabajos que Pascal nunca había publicado, pero de los que se tenía noticia a través de Huret:

> «Whereas Mersennus saith concerning Paschall the Son, quod unica propositione universalissima, 400 Corollaris armata, totum Apollonium complexus est; we understand that this treatise is yet unprinted, but proceedes in Desargues Method (whose scholar he was) and Mons. de Pres a Bookseller in Paris hath informed, that the manuscript of it remaines with one of the brothers of him, the said de Pres at Auvergne [5]».

Dos años después, Collins y Oldenbourg le insistieron a Leibniz sobre su interés por los trabajos geométricos de Desargues, Pascal y Roberval, señalando la posibilidad de que las escalas perspectivas de Desargues pudieran servir para resolver ecuaciones algebraicas mediante un método contrapuesto al de Descartes. Collins quería saber si el método de Desargues podía aplicarse también a las ecuaciones trascendentes:

> «We think it worth that a Conicall treatise deriving the same from Projections of the Sphere should be fitted up out of Desargues *Lecons de tenebres*, and out of the remaines of Paschall and hope that it will be done here, and that the remaines of Fermat de *Locis Planis Solidis Linearibus et ad Superficiem de Porismatibus et Contactibus Sphaerarum*, as also the remaines of Lalover will be printed, and when should willingly know [6]».

Leibniz y Tschirnhaus trataron de satisfacer estas peticiones y buscaron en París escritos de Desargues, Pascal y Roberval. Los resultados de esas indagaciones han sido comentados por Hofmann, Costabel, Itard, Mesnard et Taton [7]. Por mi parte,

5. *Ibid.*, p. 56.

6. Envío de Oldenbourg a Leibniz del 4 de julio de 1675. *Akademie* III, 1, Br. 56, p. 262.

7. Ver referencias en la bibliografía.

he mostrado que Leibniz leyó también a algunos de los discípulos y de los adversarios de Desargues: además de Philippe La Hire, Bosse, Aleaume y Dubreuil fueron leídos atentamente por Leibniz, como puede comprobarse por sus notas marginales en los ejemplares de diversos Tratados de Perspectiva que se conservan en Hannover [8]. Puede conjeturarse incluso que Leibniz habría podido leer la *Optique de Pourtraicture et de Peinture* que publicó Grégoire Huret en 1670 con el fin de oponerse a los métodos perspectivos de Bosse y de Desargues. De hecho, Huret manifiesta su más radical oposición a la identificación arguesiana de las líneas convergentes et las líneas paralelas:

> «Monsieur Pascal fils a écrit, que le dit sieur Desargues a fait voir que les paralleles sont toutes semblables à celles qui aboutissent en un point & qu'elles n'en different point, ce qui est non seulement contraire à la 35. definition & au 14. axiome des Elemens, mais aussi à la veritable connoissance de tout le monde [9]»,

mientras que Leibniz elogia con toda claridad la propuesta arguesiana:

> «Car Messieurs des Argues et Pascal ont fort bien fait de prendre les ordonnées generalement par des lignes convergentes ou paralleles, d'autant plus que les paralleles peuvent estre prises pour une espece de convergentes, dont le point de concours est éloigné infiniment [10]».

La aceptación leibniciana de la noción de punto del infinito constituye uno de los puntos más importantes en lo que concierne a la influencia de Desargues y de Pascal sobre Leibniz: diversos manuscritos confirman la alta estima que mostró Leibniz hacia este tipo de propuestas [11]. Comentando este pasaje, Taton sugirió la posibilidad de que Leibniz hubiera leído directamente el *Brouillon-Project* de Desargues [12]. Por lo que se refiere a Pascal, se sabe que Leibniz leyó y a veces hizo copia de varios documentos de Pascal sobre Geometría a partir del 4 de junio de 1675 (primer envío de los hermanos Périer a Leibniz) y hacia finales de diciembre de 1675 o principios del año 1676 (segundo envío de los hermanos Périer). Mesnard ha considerado que

8. Ver J. Echeverría, «Recherches inconnues de Leibniz sur la Géométrie Perspective», en A. Heinekamp (ed.), *Leibniz et la Renaissance*, Wiesbaden: Steiner 1983, pp. 191-201.

9. Gregoire Huret, *Optique de portraiture et peinture*, Paris 1670m l'autheur, page 156, section 359.

10. Leibniz a Gallois, finales de 1675, *Akademie* VI, 1, Br. 73, p. 359. Taton criticó la fecha propuesta por Hofmann para esta carta, hacia finales de 1675, y propuso 1676 como fecha más aproximada.

11. Ver, por ejemplo, los manuscritos 853, 857, 861A y 862 del *Catalogue Critique* de Rivaud.

12. Ver R. Taton, *o.c.*, pp. 119-120.

la lectura de las Cónicas de Pascal habría sido para Leibniz una fuente muy importante en lo que respecta a tres puntos de sus investigaciones matemáticas sobre Geometría Perspectiva:

— la identificación entre líneas paralelas y convergentes.

— la unidad de las cónicas.

— el hexagrama místico, mediante el cual había encontrado Pascal una solución puramente geométrica (no analítica ni cartesiana) del célebre problema de Pappus [13].

Y Mesnard concluye de todo ello:

> «Ce qui s'en dégage, c'est que Leibniz a été surpris et frappé d'admiration par des découvertes qui pourtant remontaient à plus de trente ans» ... «Mais le philosophe tire encore davantage d'enseignements, selon la ligne naturelle de son esprit, du fait que Pascal fait abstraction du calcul et pratique une géométrie de situation: sa méthode 'optique' envisage la transformation des figures par le mouvement et la diversité des apparences sensibles selon la perspective adoptée. Leibniz exprime le souhait qu'une telle méthode puisse être généralisé audelà des coniques [14]».

Además de las *Cónicas*, Leibniz encontró entre los papeles de Pascal el escrito *De l'esprit géométrique*, cuya lectura ha desempeñado un importante papel en la formación del proyecto leibniciano de un *Analysis Situs* o *Characteristica Geometrica* [15]. De hecho, sabemos que Leibniz leyó la *Introduction à la Géométrie* de Pascal, donde puede leerse la expresión «*situs punctum*», e hizo los comentarios siguientes entre sus notas:

> «En géométrie, toute méthode de découverte par le biais de la situation, et donc sans calcul, consiste à embrasser simultanément plusieurs objets en même situation; ce qui se fait, tantôt par le moyen d'une figure qui en comprend plusieurs, où se découvre l'usage des solides, tantôt par le moyen du mouvement, ou de la mutation. De plus, entre les mouvements et les mutations, il paraît qu'on peut s'appliquer très utilement à la mutation d'apparence, ou transformation optique des figures; il faut voir si par ce moyen nous ne pourrions pas dépasser le cône et nous élever aussi à des considérations plus hautes [16]».

13. Ver Jean Mesnard, *o. c.*

14. J. Mesnard, *Ibid.*, p. 54.

15. Hipótesis sugerida por Jean Ytard (1964), pp. 283-284 y aceptada por Mesnard y Taton. No hay que olvidar que el primer escrito de Leibniz sobre la Característica Geométrica está fechado en enero de 1676, es decir en la época en que Leibniz se dedicaba a leer los papeles de Pascal. Ver al respecto la edición de J. Echeverría y Marc Parmentier, Leibniz, *La Caractéristique Géométrique*, París, Vrin, 1994.

16. P. Costabel, «Traduction française des notes de Leibniz sur les 'Coniques' de Pascal», *Revue d'Histoire des Sciences* XV (1962), p. 265. Ver también B. Pascal, *Oeuvres*, ed. Mesnard, vol. 2, p. 1127.

Podemos concluir por tanto que la primera introducción de Leibniz a las ideas sobre Geometría Perspectiva tuvo lugar durante el período 1675-1676, cuando buscaba (y encontró en parte) documentos de Desargues y de Pascal, a petición de Collins y Oldenburg. Dándose cuenta de inmediato del interés matemático de este tipo de ideas, a partir de ese momento Leibniz siempre mostró interés al respecto, leyendo los tratados sobre Perspectiva de La Hire y Bosse, así como los libros de los detractores de Desargues. Como he mostrado en un artículo anterior, Leibniz leyó con atención la *Manière Universelle* de Desargues, publicada en el libro de Bosse en 1648, que constituye el gran compendio de los métodos arguesianos en aquella época. Leibniz escribió notas marginales en ese libro, interesándose en particular en los pasajes relativos a la noción de *punto del infinito.* Tras leer a Dubreuil y Alcaune, que fueron adversarios de Desargues, Leibniz tomó partido en favor de este último en su polémica contra el Secretario del Rey, Beaugrand, y sus seguidores (Curabelle y los editores Langlois y Tavernier). Leibniz escribió algunos ensayos propios sobre Geometría Perspectiva, que todavía permanecen inéditos, pero en lugar de restringirse al debate sobre los métodos propiamente perspectivos supo ir más allá, infiriendo la existencia de ideas que le fueron particularmente útiles en su descubrimiento del Cálculo Diferencial y en sus investigaciones sobre el Analysis Situs, que siempre contrapuso al Análisis Algébrico de Vieta y de Descartes [17]. Puesto que la influencia de las ideas arguesianas en el descubrimiento del Cálculo Diferencial es algo poco menos que desconocido, en el resto del artículo me centraré exclusivamente en este punto.

Antes de llegar a ello, conviene recordar que Leibniz llevó consigo su dossier Pascal cuando dejó París en 1676 para incorporarse a su puesto de bibliotecario de Hannover. Como aprovechó la ocasión de ese viaje para volver a pasar por Londres, y es sabido que allí se entrevistó con Collins, resulta verosímil pensar que habló con el matemático inglés sobre el contenido de los escritos geométricos de Desargues y de Pascal, puesto que Collins se lo había solicitado por dos veces, y Leibniz tenía algo que aportarle: la muy probable inexistencia de las *Leçons de Ténèbres* de Desargues [18]. Tras su célebre encuentro de 1676 con Collins, que ha dado lugar a tantos estudios relacionados con la polémica ulterior sobre la prioridad en el descu-

17. Ver al respecto J. Echeverría, «Cálculos Geométricos en Leibniz», *Theoria* II, VI, N. 14-15, octubre 1991, pp. 29-54, al que sigue la edición del manuscrito inédito de Leibniz *Circa Geometrica Generalia et Calculum Situs...* (*Ibid.*, pp. 55-66).

18. En una carta del mes de junio de 1676, Tschirnhaus informó a Oldenburg sobre la imposibilidad práctica de encontrar ejemplar alguno en París de las pretendidas *Leçons de Ténèbres* de Desargues. Ver J. Eh. Hofmann, *Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizchen Mathematik während des aufenthaltes in Paris (1672-1676)*, München: Leibniz Verlag 1949, p. 164.

brimiento del Cálculo Infinitesimal por parte de Newton y Leibniz, éste último siguió manteniendo correspondencia con Collins sobre la Geometría Perspectiva. En 1679, por ejemplo, Leibniz le envió a Collins un ejemplar de los *Nouveaux Elemens des Sections Coniques* de Philippe La Hire, por medio de Hansen, conjuntamente con una obra de Viviani [19]. El año anterior Collins había enviado a su vez a Joachim Heinrich von Bülow dos libros para Leibniz [20]. El interés de Leibniz por las ideas de Desargues y de sus discípulos se siguió manifestando en 1701, cuando le aconseja a Bodenhausen «in der Perspecktiv Desargues durch Bosse» [21].

Resulta pues muy probable que el único acceso directo que tuvo Leibniz a los escritos de Desargues tuvo lugar por medio de la obra de Bosse [22], aparte del resumen del contenido del *Brouillon-Project* hecho por el propio Leibniz a partir de los papeles de Pascal [23].

3. La resolución de las figuras en triángulos

En lugar del método de resolución de ecuaciones que Collins esperaba encontrar en los trabajos de Desargues y de Pascal, Leibniz extrajo una idea muy diferente, pero mucho más importante para sus propias investigaciones de aquella época: la posibilidad de analizar las figuras geométricas mediante un nuevo instrumento de análisis, basado en las rejillas perspectivas. Así como Descartes analizaba las figuras mediante cuadrados (sistema de ejes cartesianos) para reducir cada punto a ordenada y abscisa y cada recta o figura geométrica a ecuación algebraica, así Leibniz encontró en Desargues la posibilidad de analizar las figuras mediante un sistema de triángulos que, por mantener su proporcionalidad cuando se hacen evanescentes, le vino a proporcionar un nuevo instrumento matemático para el análisis de figuras infinitamente pequeñas.

19. Ver la carta de Hansen a Leibniz del 12 de junio de 1679 (*Akademie* I, 2, p. 485). El libro fue enviado el 1 de octubre de 1679 (*Ibid.*, p. 519).

20. *Ibid.*, Br. 322.

21. Carta del 17 de abril de 1701, *Briefwechseln mit Mathematikern* (ed. Gerhardt), p. 514.

22. En la Landesbibliothek de Hannover se conserva un ejemplar (signatura Leib. Marg. 175) con una recopilación en dos volúmenes de escritos de Bosse: dicha obra contiene dos textos de Desargues, con el título *Reconnoissances de Desargues*, así como su *Exemple d'une des manieres universelles touchant la Pratique de la perspective*. El primer volumen contiene varias notas marginales escritas por Leibniz. Ver J. Echeverría (1983), pp. 193-195 para los detalles de la lectura de Leibniz de dicha obra, así como de su lectura de otro ensayo de Desargues, titulado «Enseigner une méthode aisée pour apprendre & enseigner à lire & à écrire la Musique».

23. Ver L. Hd. XXXV, vol. XV, 1, Bl. 11 y la transcripción de Taton en la obra colectiva *L'oeuvre scientifique de Pascal*, París: Centre International de Synthèse 1964, p. 45.

Desde que leyó a fondo la Geometría de Descartes, es decir en 1675, Leibniz se mostró siempre convencido de que los métodos de Vieta y de Descartes eran insuficientes para analizar y estudiar algunas figuras y problemas geométricos, como las ecuaciones trascendentes [24]. Su proyecto de un *Analysis Situs* trata de superar las limitaciones del análisis cartesiano de las figuras y de desarrollar un nuevo *Análisis Geométrico de la Situación*, en el que no haya necesidad de recurrir ni a las magnitudes ni a las ecuaciones. No hay duda de que en los papeles de Pascal y Desargues supo ver la similitud de la Geometría Perspectiva con su propio proyecto, en la medida en que los teoremas perspectivos no dependen del tamaño de las figuras, sino de los alineamientos y situación respectiva de los puntos: de ahí su admiración hacia las propuestas arguesianas, que nunca dejó de manifestar, a pesar de que no volviera a ocuparse a fondo de la Perspectiva, con excepción de los manuscritos inéditos a los que aludiré en el siguiente apartado.

Leibniz pensaba que la gran mayoría de los matemáticos que se habían ocupado de la Geometría de los indivisibles (Cavalieri, Fermat, Wallis, etc.) habían fracasado por su dependencia respecto a las ecuaciones cartesianas: así lo manifiesta en el siguiente pasaje de una carta a Gallois:

> «La raison pourquoy ceux qui ont écrit de la Géométrie des indivisibles, et de l'Arithmétique des infinis, n'ont pas fait la même remarque, est parce qu'on est accoutumé de ne resoudre les figures que par les ordonnées paralleles, en une infinité de petits rectangles, au lieu que j'ay trouvé un moyen general de resoudre utilement toute figure en une infinité de petits triangles aboutissans à un point, par le moyen des ordonnées convergentes [25]».

Es justo a continuación cuando hace el elogio ya citado (ver nota 9) a la identificación de Desargues y de Pascal entre las líneas paralelas y las convergentes, proponiendo a continuación:

> «un theoreme fondamental, que j'ay trouvé, et qui est sans doute un des plus universels et des plus feconds de la Geometrie... Ce theoreme a des grandes suites, et il suffit luy seul pour prouver par une seule demonstration Geometrique toutes les Quadratures de l'Arithmetique des infinis, que le celebre Mons. Wallis n'a trouvé que par induction; outre quantité d'autres, que j'ay trouvées par là. Comme par exemple celle d'un certain Segment de la Cycloeide [26]».

24. Ver, por ejemplo, la carta de Leibniz a Huygens (septiembre de 1675), así como la carta (no enviada) a Malebranche de junio de 1679 o la carta a Huygens de septiembre de 1679.

25. *Akademie*, VI, 1, Br. 73, p. 359.

26. *Ibid.*

Vemos pues que Leibniz relaciona directamente los métodos arguesianos y el sistema de ordenadas triangulares a sus propias investigaciones sobre las Cuadraturas que, como se sabe, constituyen el origen de su descubrimiento del Cálculo Diferencial. Este vínculo entre los conceptos perspectivos y el Cálculo Infinitesimal puede parecer inusitado: por consiguiente, habrá que detenerse a examinar con detalle este tipo de propuesta de Leibniz.

El manuscrito inédito titulado *Qui de Geometriae utilitate* constituye, a mi modo de ver, una fuente muy importante para comprender el uso que Leibniz hace de estas coordenadas triangulares de inspiración arguesiana y pascaliana [27]. En dicho texto, en efecto, se puede leer:

> «Nimirum plerique qui Geometriam indivisibilium hactenus tractavere, figuras tantum in rectangula aut certè paralelogramma ordinatarum inter se parallelarum ope resolvere consuevere. Mihi semper Desarguesii et Pascalii mirè placuit ratio, qui in Conicis, ut universaliter loqui possent ordinatarum nomine non tantum parallelas comprehendunt sed et rectas ad unum punctum fixum concurrentes, sive convergentes, praesertim cum parallelae sub convergentium nomine, si punctum infinitè abesse dicatur, continentur. Itaque cum aliis parallelas tantum ordinatas tractassent et figuras in parallelogramma AB (B) (A), (A) (B) ((A)) ((B)) Cavaleriana methodo resolvissent (Fig. 1), ego adhibitis convergentibus resolvo figuram datam in triangula CD(D), C(D)((D)), et mox aliam exhibeo (Fig. 2) cuius ordinatae AB, (A)(B), etc. his ipsis triangulis sunt pro rationales. Quod fit: si ipsae AB ipsis CE aequantur, posito rectas DE esse tangentes curvae datae. Ita enim ut infra ostendam efficietur ut spatium CB(B) sit duplum segmenti C(D)DC, cuilibet figura ut C(D)DC alia aequivalens exhiberi potest [28]».

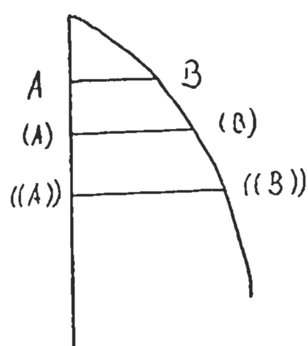

Fig. 1

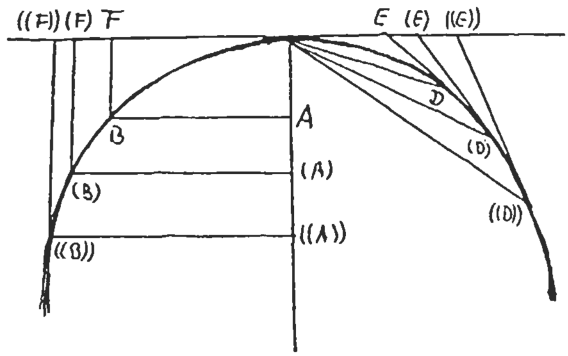

Fig. 2

27. L. Hd. XXXV, vol. VIII, 13, F. 82-85.

28. *Ibid.*

El reemplazamiento de los pequeños paralelogramos de Cavalieri por triángulos infinitesimales va a ser una de las ideas motrices del descubrimiento leibniciano del Cálculo Infinitesimal. Por consiguiente, lo que Leibniz va a hacer, será aplicar a las curvas algunos instrumentos arguesianos de origen perspectivo. La tesis central consiste en que utilizando determinados triángulos se pueden analizar las curvas y sus áreas comprendidas mejor que si se utilizan los cuadrados de Descartes o los paralelogramos de Fermat, Cavalieri y otros.

La cuadratura leibniciana del círculo (así como de la parábola, de la hipérbola y de otras figuras) no depende sólo del problema de la suma de series infinitas, como suele decirse al comentar la vía que le llevó al descubrimiento del Cálculo Infinitesimal, sino que también está fundada en la idea de reducir a magnitudes las curvas y sus áreas comprendidas por medio de una triangulación de dichas figuras. Dicha triangulación, que puede verse puesta en práctica en el De Quadratura Aritmetica, es de inspiración «perspectiva», como vamos a confirmar a continuación.

La posibilidad de estudiar las curvas y las figuras por medio de triángulos infinitamente pequeños había sido «*intuída*» por Leibniz al leer los papeles de Pascal, tal y como él mismo refirió al hablar del *triángulo característico pascaliano* y tal y como puede constatarse sobre sus propios manuscritos de 1675 y 1676. Una frase tachada de la carta de Leibniz a E. Périer, el depositario del fondo Pascal, fechada el 30 de agosto de 1676, así lo atestigua:

> «Et comme il arrive que quelques unes de ces six droites qui font l'Hexagramme sont infiniment petites, c'est de là que viennent les proprietez des touchantes des sections du cone [29]».

Esta carta de Leibniz resulta muy importante, a mi modo de ver, porque en ella Leibniz resume para Périer, como éste le había encargado, el contenido de los tratados sobre las cónicas de Pascal, con vistas a decidir sobre la conveniencia de publicar esos documentos de Pascal o no. Al hacer la recensión y evaluación del segundo tratado, Leibniz escribe:

> «Apres avoir expliqué la generation des sections du Cone, faite optiquement par la projection d'un cercle sur un plan qui coupe le cone des rayons, il explique les proprietez remarquables d'une certaine figure composée de six lignes droites, qu'il appelle Hexagramme Mystique, et il fait voir par le moyen des projections que tout Hexagramme Mystique convient à une section conique; et que toute la section conique donne un Hexagramme Mystique. J'ay mis au devant

29. *Akademie* III, 1, Br. 90, p. 589, variante de la línea 4.

> ces mots: *De hexagrammo mystico et conico*. Une partie de cette piece se trouve repetée et inserée mot à mot dans une autre, sçavoir les definitions (avec leur corollaires) et les propositions (mais sans les demonstrations) se trouvent repetées dans le traité *De loco solido* dont je parleray cy dessous. Je croy même que les figures du traité *De loco solido* suppleeront au defaut de quelques unes qui manquent dans celuy cy: *De hexagrammo* [30]».

Los hexagramas de Pascal permiten, por consiguiente, una caracterización de todas y cada una de las cónicas, con la peculiaridad adicional de que, para Leibniz, pueden ser infinitamente pequeños.

La carta de Leibniz a Périer constata también la propuesta de un «magnum problema» en uno de los papeles de Pascal: «Dato Puncto in sublimi et solido conico ex eo descripto, solidum ita secare, ut exhibeat sectionem conicam datae similem [31]». Veremos a continuación que este tipo de terminología pascaliana va a ser retomado por Leibniz en sus propias investigaciones sobre Geometría Perspectiva. Podemos pues concluir que la influencia de Pascal, e indirectamente de Desargues, es efectiva. Leibniz transfirió alguno de los métodos e ideas arguesianas a sus propias investigaciones matemáticas, y en particular a sus estudios sobre la cuadratura de las figuras curvas.

4. Investigaciones inéditas de Leibniz sobre la Perspectiva

En un artículo publicado en 1983 he dado noticia de la existencia de una serie de seis manuscritos inéditos de Leibniz sobre Geometría Perspectiva, que continúan sin haber sido publicados [32]. Se trata de un conjunto de estudios estrechamente conectados, en los cuales Leibniz intenta demostrar dos teoremas generales sobre Geometría Perspectiva que, en su opinión, proporcionarían los auténticos fundamentos de dicha ciencia. Tras demostrar ambos teoremas en el caso más sencillo, cuando la apariencia de un objeto se reduce a un punto, Leibniz los amplía a figuras más complicadas: triángulos, poliedros, líneas tangentes al cono y, finalmente, el hexagrama de Pascal. A lo largo de esas investigaciones la terminología pascaliana está presente; en el fragmento «Perspectivae Planae Compendium seu delineationis in plana superficie», por ejemplo, puede leerse la expresión «oculum spectatoris ponere in sublimi [33]», que acabamos de constatar en el texto de Pascal a la hora de proponer el «magnum problema».

30. *Ibid.*, pp. 588-589.

31. L. Hd. XXXV. vol XI. 17. f. 12 retro.

32. Ver J. Echeverría (1983).

33. L. Hd. XXXV. vol. XI. 17. Bl. 12 retro.

Del conjunto de seis manuscritos inéditos, a mi modo de ver los más relevantes son el «Origo Regularum Artis Perspectivae qualis sine libro ac magistro inveni» y el ensayo «Scientia Perspectiva», que parece haber sido escrito por Leibniz con vistas a una posible publicación, que desgraciadamente nunca tuvo lugar.

El fragmento titulado *Origo Regularum* propone una figura (ver Fig. 3) en la que se supone un ojo O, una tabla ADB y un objeto R cualesquiera. A continuación, se reducen el ojo y el objeto a dos puntos y la tabla a una superficie plana, colocándolos entre sí a distancias finitas. Leibniz introduce luego un nuevo sistema de coordenadas (triangulares, por supuesto), que le permite definir el punto R por medio de tres magnitudes, al igual que la posición del ojo O y de la apariencia Q del objeto sobre la tabla. A esas tres magnitudes, a las que podríamos llamar coordenadas arguesianas, las denomina *longitudo, latitudo et altitudo.*

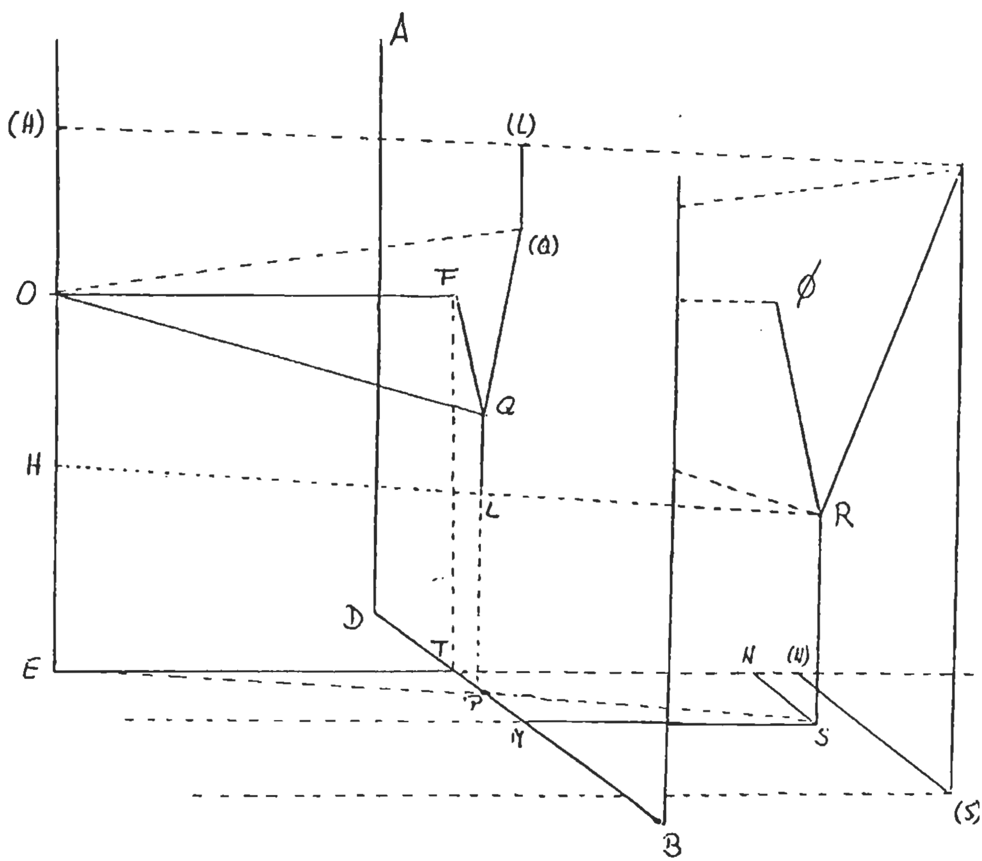

Fig. 3

Puesto que los triángulos OHR y QLR son semejantes entre sí, podemos inferir la proporción OH/LQ = HR/LR; pero como HR=HL (que a su vez es igual a OF+MS, se concluye el primer *teorema fundamental:*

Th. 1: La altitud del ojo (OH) es a la altitud de la apariencia (LQ) como la suma de las longitudes (OF+MS) es a la longitud del objeto (SM).

Como los triángulos ETP y ENS son también semejantes, obtenemos la proporción NS/PT = EN/ET; pero en el rectángulo HRSE se tiene que HR/LR = SE/SP, y en el triángulo ESN vale SE/SP = EN/ET; por consiguiente, Leibniz puede enunciar su *segundo teorema fundamental:*

Th. 2: La latitud del objeto (NS o MT) es a la latitud de la apariencia (PT) como la suma de las longitudes es a la longitud del ojo.

Se sigue de los dos teoremas que, para cualquier objeto, es posible determinar completamente la posición de su apariencia sobre la tabla. Por consiguiente Leibniz puede concluir que, en base a esos dos teoremas, se puede determinar siempre la apariencia Q de un punto-objeto cualquiera sobre cualquier tipo de tabla, independientemente de la posición del ojo, del objeto y de la forma de la tabla. El paso siguiente consiste en demostrar que las relaciones de alineación y de tangencia son invariantes para estas reglas de proyección. El interés del manuscrito de Leibniz consiste precisamente en haber aplicado las técnicas proyectivas a la relación de tangencia entre dos figuras geométricas: ello será lo que le permita transferir algunas nociones arguesianas al problema de las cuadraturas.

Al final del «Origo Regularum», Leibniz puede pretender con razón haber logrado poner en práctica un método geométrico general para estudiar cualquier situación básica en Geometría Perspectiva. El fragmento *Scientia Perspectiva,* que es posiblemente el último de la serie de seis, aplica esos dos teoremas fundamentales al caso del paralelepípedo recto-rectangular y al caso del hexagrama de Pascal. Con ello se logra el objetivo básico de Leibniz cara a la Geometría Perspectiva.

Mas al comienzo de este último manuscrito, Leibniz propone una Ciencia Perspectiva completamente universal, en la cual incluye dos casos particularmente relevantes para el objeto de nuestro estudio, a saber: la situación perspectiva en la que el ojo está situado infinitamente lejos y la configuración «perspectiva» en la que el ojo está colocado infinitamente cerca de la tabla. Veremos a continuación que estas dos extensiones de los dibujos perspectivos a casos en los que la noción de infinito está implicada le van a permitir a Leibniz vincular las ideas de Desargues y de Pascal a sus propias indagaciones sobre las cuadraturas de las figuras curvas de manera precisa y rigurosa.

5. *El manuscrito «De Quadratura Arithmetica»*

Al final de su estancia en París (1675-76), Leibniz escribió y preparó para su impresión un manuscrito muy largo, titulado *De Quadratura Arithmetica Circuli, Ellypseos et Hyperbolae, cuius corollarium est Trigonometria sine Tabulis,* que era un auténtico primer tratado sobre las cuadraturas de las figuras curvas y sobre los métodos de Leibniz para llevarlas a cabo. Desgraciadamente, dicho manuscrito nunca fue publicado completo hasta la reciente edición de Knobloch de 1993. Las ediciones de Gerhardt y de Scholtz fueron parciales [34], a pesar de que se sabía que dicho manuscrito era la fuente más completa sobre la vía que llevó a Leibniz al descubrimiento del Cálculo Infinitesimal. Habiendo aparecido ya la edición completa, habría muchos puntos de interés a comentar. Sin embargo, me limitaré a mostrar que el análisis de dicho texto muestra claramente la utilidad que las ideas de Desargues y de Pascal tuvieron para Leibniz a lo largo de las investigaciones de 1675 y 1676 que le condujeron al descubrimiento del Cálculo Diferencial.

El teorema 1 demuestra la posibilidad de reducir los rectángulos a triángulos, que como vimos constituye la idea central de contraposición al álgebra cartesiana. Pero la proposición más importante al respecto es, sin duda, la de la *transmutación* (Teorema 7), en la cual Leibniz comienza a utilizar triángulos infinitesimales (figura 4).

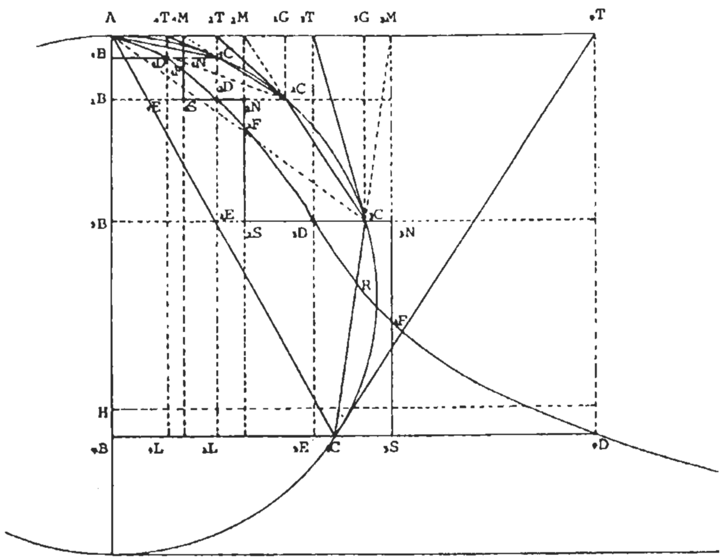

Fig. 4

34. Ver el artículo de Eberhard Knobloch «Leibniz et son manuscrit inédité sur la quadrature des sections coniques» en A. Heinekamp (ed.), *Leibniz et la Renaissance*, Firenze 1989, pp. 127-151, para una historia completa de dicho manuscrito y sus ediciones.

Tal y como dice en un Scholium ulterior: «nobis propositio septima viam dedit, cujuslibet curvae datae segmento cuidam vel sectori, utcunque parvo, duplicato, infinitis modis, figuras longitudine infinitas exhibendi aequales [35]».

Esta es la novedad técnica esencial que Leibniz propone en relación a sus predecesores en el Análisis de los Infinitésimos: reducir los rectángulos infinitesimales (o elementales, como él los llama) a triángulos infinitesimales, sumando a continuación las áreas de dichos triángulos conforme a un sistema de ordenadas convergentes. Por supuesto, ello le llevará a obtener series numéricas diferentes, para cuya resolución tendrá algunas dificultades. Pero para nuestro objeto podemos prescindir de esos desarrollos ulteriores del *De Quadratura Arithmetica* para subrayar las alusiones que, precisamente en este momento, hace a Desargues y a Pascal en el Scholium del Teorema 7, que el propio Leibniz considera como el fundamental de su tratado:

> «Quod ad ipsam attinet propositionem, arbitror unam esse ex generalissimis, atque utilissimis, quae extant in geometria, usque adeo enim universalis est, ut omnibus curvis, etiam casu aut pro arbitrio sine certa lege ductis, conveniat; et data qualibet figura alias exhibeat numero infinitas, quarum singularum dimensio pendeat ex priore vel contra. Sed et inter foecundissima Geometriae theoremata haberi potest [36]».

Estamos pues ante el mismo «teorema fecundo» del que Leibniz hablaba a Gallois. Pues bien, las ideas arguesianas sirven de fundamento a dicho teorema, como Leibniz explicita a continuación:

> «Porro cum clarisimi geometrae, qui Conica universaliter tractare coepere, ordinatarum ad curvas nomine comprenhendant non tantum rectas parallelas, quales sunt 1C 1B, 2C 2B, 3C 3B, ut vulgo fieri solet, sed etiam rectas A 1C, A 2C, A 3C, quae omnes ad unum punctum commune A, convergunt (quod vel ideo recte fit, quoniam ipsaemet parallelae sine errore pro convergentibus sumi possunt, ita tantum ut punctum concursus earum seu centrum commune infinite abesse fingatur, quemadmodum alter parabolae focus aut vertex). Hinc jam ope theorematis hujus nostri feliciter evenit, ut harum quoque novarum ordinatarum, nempe convergentium, usus esse possit ad quadraturas [37]».

Vemos también que, al haber identificado arguesianamente las líneas paralelas y las convergentes, admitiendo por tanto la noción de *punto del infinito*, es posible obtener un nuevo método para analizar y cuadrar las curvas, basado en el sistema

35. *Ibid.*, p. 132.

36. Ed. Knobloch, pp. 35-36, líneas 418-422.

37. *Ibid.*, p. 36, l. 433-442. Knobloch señala en nota que esos «clarissimi Geometrae» son Desargues y Pascal, como evidencia el pasaje tachado por Leibniz a continuación en el manuscrito (*Ibid.*, p. 36 y p. 131).

de triángulos y en las ordenadas convergentes; puesto que el ojo puede estar supuesto en un punto del infinito, la relación entre las nociones perspectivas y el cálculo integral se hace de repente perfectamente clara. Basta con colocar el punto A de la figura 4 en el infinito y analizar a continuación una curva cualquiera f(x) mediante los triángulos mixtilíneos para obtener, sumando los triángulos que tienen su vértice en el infinito, la integral indefinida de f(x)dx.

Para calcular esa suma (o integral) en el caso de una y otra cónica (o curva) habrá que resolver no pocos problemas técnicos ligados a la suma de series numéricas: Leibniz retomará al respecto algunas de las investigaciones de los matemáticos ingleses. Pero la idea básica que llevó a Leibniz a solucionar el problema de las cuadraturas de las curvas parte de nociones extraídas de la Geometría Perspectiva de Desargues y de Pascal. El método de la *transmutación,* que luego denominará Leibniz método de la *metamorfosis,* surge de sus investigaciones sobre la *Ciencia Perspectiva.*

Para terminar, conviene recordar que ulteriormente Leibniz irá introduciendo las notaciones diferenciales, lo cual le permitirá generalizar enormemente dicho método: los rastros de la Geometría Perspectiva desaparecerán por completo cuando Leibniz publique en 1684 su *Nova Methodus.* Mas el estudio de sus notas de lectura, así como de sus borradores y manuscritos primeros sobre las cuadraturas y el Cálculo Diferencial, muestran que la influencia de Desargues y de Pascal fue muy efectiva en un momento clave del desarrollo de las investigaciones matemáticas de Leibniz.

Bibliografía

Aleaume: *La perspective speculative et pratique: mise au jour par Estienne Migon*, París: Tavernier & Langlois 1643.

Anonyme: «Girard Desargues, de Lyon», *Magasin Pittoresque* 1849, pp. 166-168.

F. Amodeo: *Nuova analisi del trattato delle coniche di Gerard Desargues*, rendiconti Accademia Napoli 1906. *Origine e sviluppo della geometria proiettiva*, Napoli: Pallerno 1939.

K. Andersen: «Desargues' Method of Perstective», *Centaurus* 34 (191), pp. 44-91.

A. Birembaut: «Quelques documents sur Desargues», *Rev. Hist. Sci.* 14 (1961), pp. 193-204.

R. Bkouche: «La Naissance du projectif: de la perspective à la géométrie projective», en R. Rashed (ed.), *Mathématiques et Philosophie de l'Antiquité à l'Age Classique*, París: CNRS 1990.

A. S. Blum: *Abraham Bosse et la société française au XV eme siècle*, París: A. Morancé 1924.

E. Bodemann: *Die Leibniz-Handschriften*, Hannover-Leipzig: Hahn 1895.

A. Bosse: *Manière universelle de Mr. Desargues pour pratiquer la Perspective*, París 1648.

N. A. Court: «Desargues and his strange theorem», *Scr. Math.* 20 (1954), pp. 5-13 y 155-164.

P. Costabel: «Note sur l'annexe au Brouillon-Project: Desargues», en *Atc. VIIene Congr. Hist. Sci.*, Jerusalem 1953, pp. 241-245. «Traduction française des notes de Leibniz sur les Coniques de Pascal», en *L'oeuvre scientifique de Pascal*, París: Centre International de Synthèse 1964, pp. 85-101.

G. Desargues: *Oeuvres (ed M. Poudra), París: Leiber 1864.*

J. Dhombres et J. Sakarovith (eds.): Desargues en son temps, París, Blanchard, 1994.

J. Dubreuil: *La perspective practique*, París: Tavernier & Langlois 1642.

J. Echeverría: «L'Analyse Géométrique de Grassmann et ses rapports avec la Caractéristique Géométrique de Leibniz», *Studia Leibnitiana* XI/2 (1979), pp. 223-273. *Edition critique des manuscrits de Leibniz concernant la Caractéristique Géométrique en 1679*, 8 microfichas, Univ. de Lille III 1984. «La Geometría leibniciana: de la Perspectiva al Analysis Situs», *Actas II Congreso Sociedad Española de Historia de las*

Ciencias, Jaca 1982, vol. III, pp. 69-78. «Recherches inconnues de Leibniz sur la Géométrie Perspective», en A. Heinekamp (ed.) *Leibniz et la Renaissance*, Wiesbaden: Steiner 1983, pp. 191-201. «Géométrie et Topologie chez Leibniz», en *V. Internationaler Leibniz-Kongress: Vorträge*, Hannover: Leibniz-Gesellschaft 1988, pp. 213-220. «Cálculos Geométricos de Leibiniz», *Theoria* II, VI, N. 14-15 (1991), pp. 29-66. «Leibniz, interpréte de Desargues», en J. Dhombres et J. Sakarovith 1994, pp. 283-294.

J. ECHEVERRÍA ET M. PARMENTIER (EDS.): G. W. Leibniz, *La Caractéristique Géométrique*, París, Vrin, 1994.

G. ENESTRÖM: «Gérard Desargues und D.A.L.G.», *Bibl. Math.* III:14 (1914), pp. 253-258.

J. V. FIELD AND J. J. GRAY: *The Geometrical Work of Girard Desargues*, New York: Springer 1987.

A.R. HALL: *Philosophers at war: the quarrel between Newton and Leibniz*, Cambridge: Cambridge Univ. Press 1980.

K. HARA: «Nouvelles observations sur les écrits mathématiques de Pascal», *Historia Scientarum* 26 (1984), pp. 1-17 y 27 (1984), pp. 11-25.

J. EH. HOFMANN: *Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik*, Leibniz Verlag: München 1949. *Leibniz à Paris 1672-1676. His growth to mathematical maturity*, London: Cambridge Univ. Press 1974. *Register zu G.W. Leibniz Mathematische Schriften und Briefwechseln mit Mathematikern*, Hildesheim: Olms 1977.

G. HURET: *Optique de portraiture et peinture*, París 1670.

J. ITARD: «L'introduction à la Géométrie de Pascal», en *L'oeuvre scientifique de Pascal*, París: Centre International de Synthèse 1964, pp. 102-119.

W. M. IVINS: «Two first editions of Desargues», *Bull. Metrop, Mus. Art* 33-5 (1942). «A note on Girard Desargues», *Scr. Math.* 9 (1943), pp. 33-48. «A note on Desargues 'theorem'», *Scr. Math.* 13 (1947), pp. 203-210.

E. KNOBLOCH (ED.): G. W. Leibniz, *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis*, Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht, 1993.

D. LANIER ET J. P. LE GOFF: «L'héritage arguésien», en *Les Cahiers de la Perspective, Points de Vue*, 5, juin 1991, pp. 43-116.

J. P. LE GOFF: «Vers l'édition des Oevres Complètes de l'architecte et géomètre lyonnais, Girard Desargues», *Cahiers de la Perspective, Point de Vue*, 5, juin 1991, pp. 7-13, con una «Bibliographie Arguésienne Abrégée», *Ibid.*, pp. 14-19.

G. W. LEIBNIZ: *Sämtliche Schriften und Briefe, Akademie-Ausgabe,* Darmstadt-Berlin, 1923... *MMathematische Scriften* (ed. C.I. Gerhardt), Halle: 1858-1863. *Der Briefwechseln von G.W. Leibniz mit Mathematikern* (ed. C.I. Gerhardt), Berlin 1899. *Opuscules et fragments inédits* (ed. L. Couturat), París 1903.

PH. DE LA HIRE: *Nouvelles méthodes en Géométrie plane*, París 1673. *Nouveaux elements des Sections Coniques*, París 1679. *Sectiones Conicae*, París 1685.

A. MAIRE: *Bibliographie de l'oeuvre scientifique de Blaise Pascal*, París: Hermann 1912

J. MESNARD: *Pascal et les Roannez*, Bruxelles: Desclée de Brouwer 1965. «Leibniz et les papiers de Pascal», *Studia Leibnitiana Supplementa* XVII (1978), pp. 45-58.

A. DE MONTAIGLON: *Procès-Verbaux de l'Académie Royale de Peinture et de Sculpture* (1648-1792), París: J. Bauer, 1875-1892, 10 vols. (vol. I: 1648-1672).

K. MÜLLER: *Leibniz-Bibliographie,* Frankfurt: Klostermann 1967.

C.Y. PANC: «Leibniz in Paris», *Scripta Mathematica* XX:1-2 (1954), pp. 37-50.

J. PARES: «La Gnomonique de Desargues à Pardies», *Cahiers d'Historie et de Philosophie des Sciences* 17 (1988), pp. 1-181.

BL. PASCAL: *Oeuvres Complètes*, París: Seuil 1963.

M. POUDRA: *Historie de la perspective ancienne at moderne*, París 1864.

P. RITTER: *Kritischer Katalog der Leibniz-Handschriften*, Berlín 1908.

A. RIVAUD: *Catalogue critique des manuscrits de Leibniz*, Poitiers: Soc. Fr. d'imprimerie et de librairie, 1914-1924.

J. P. SCHOBINGER: *Kommentar zu Pascals Reflexionen über die Geometrie im allgemeinen,* Basel-Stuttgart: Schawabe 1974.

B. A. SWINDEN: «Geometry and Girard Desargues», *Math. Gaz.* 34 (1950), pp. 253-260.

P. TANNERY, «Sur un opuscule de Desargues», en *Mémoires scientifiques,* vol. VI, Nr. 8 (1890), pp. 115-118.

R. TATON: «Découverte d'un exemplaire original du *Brouillon-Project sur les Coniques* de Desargues», *Revue d'Histoire des Sciences* 4 (1951), pp. 176-181.

— «Documents nouveaux concernant Desargues», *Arch. Int. Hist. Sci.* 4 (1951), pp. 620-630.

— «La première oeuvre géometrique de Philippe de La Hire», *Revue d'Histoire des Sciences* 6 (1953), pp. 93-111.

— *L'oeuvre mathématique de Desargues*, Paris: PUF 1951, reimp. 1981 y 1988.

— «L'oeuvre de Pascal en Géométrie Projective», en *L'oeuvre scientifique de Pascal*, Paris: Centre International de Synthèse 1964, pp. 17-72.

— «L'initiation de Leibniz à la Géométrie», *Studia Leibnitiana Supplementa* XVII (1978), pp. 103-129.

R. TATON ET J. MESNARD: «Edition critique de la lettre de Leibniz à Périer du 30 août 1676», en *L'oeuvre scientifique de Pascal*, Paris: Centre Internationale de Synthèse 1964, pp. 73-84.

G. VALENTIN: «Zwei Briefe von Desargues und Bosse», *Bibliotheca Mathematica* IIIeme s., Nr. 13 (1912), pp. 23-28.

G. WALLET: «L'origine du calcul différentiel chez Leibniz», *Cath. Fundamenta Sci.* 98 (1980), pp. 1-18.

H. WIELEITNER: «Ueber die 'Plani-Coniques' von de La Hire», *Arch. Gesch. Naturwiss. Unterricht* 5 (1913), pp. 49-55.