LEONARD EULER: LA SINFONÍA DEL INFINITO

JOSÉ MANUEL GONZÁLEZ RODRÍGUEZ
Profesor Titular de Universidad
Departamento de Economía Aplicada

De igual manera que ocurre con el desarrollo de la Ciencia en general, en la evolución de la Matemática se suceden épocas de innovación impetuosa con otras en las que sólo o fundamentalmente se difunden y consolidan los descubrimientos previos. En este segundo tipo de épocas suelen aparecer figuras destacadas que intervienen en el progreso de los conocimientos matemáticos reordenando, apuntalando y desarrollando las invenciones anteriores. Así ocurrió con Euclides, recopilador y organizador de la Geometría Griega o con Vieta, redescubridor del álgebra árabe y renacentista. En el siglo XVIII, tras el avance notorio que supuso la revolución del Cálculo Infinitesimal de Newton y Leibniz, nos encontramos con Leonard Euler, matemático prolífico donde los haya (escribió más de 886 trabajos, esto es unas 800 páginas anuales a lo largo de toda su vida profesional) quien intervino en todas las ramas de la Matemática, reorganizando los conocimientos anteriores (en sus tratados sobre Mecánica resume por primera vez las aportaciones de Newton, ya en lenguaje moderno), innovando todas las especialidades de la ciencia, reinventando toda la simbología matemática, etc.

No existe rama o especialidad matemática moderna en la que no se reconozca la intervención de Euler, bien a través de algún teorema que lleve su nombre, bien en alguna fórmula que hubiera utilizado por primera vez, o bien en los símbolos clásicos acuñados por él. Nació Euler en Basilea en 1707 y murió en San Petersburgo en 1783, con lo que su vida transcurrió a lo largo del siglo XVIII, durante la cual pudo abordar con todo detalle la mayor parte de las aportaciones científicas de todo orden de dicha centuria. Adquirió su vasta cultura científica ya desde joven, gracias fundamentalmente a su amistad con la familia Bernoulli y a la completa educación que recibió (motivado por el ejemplo de su padre, pastor calvinista), estudiando materias tan variadas como: teología, medicina, astronomía, física o lenguas orientales. Sus contactos con los hermanos Bernoulli le permitió moverse por Europa, frecuentando las Academias de más prestigio y participando en la mayoría de las controversias que se sucedieron durante este siglo dieciochesco.

En particular, desarrolló su actividad investigadora en San Petersburgo y Berlín, ciudades donde vivió la mayor parte de su vida. A San Petersburgo acudió Euler en 1730, donde llegó a ocupar la cátedra que dejara Daniel Bernoulli en una primera época, durante el reinado de la emperatriz Ana y que volvió a retomar en 1766, bajo el reinado de Catalina la Grande.

Entre los años 1741 y 1766 Euler ocupó un puesto similar en la academia de Berlín, reinando Federico el Grande de Prusia, gran benefactor de intelectuales varios, Voltaire quizá el más destacado. En todo este tiempo Euler participa activamente en todo el ambiente cultural del siglo, interviniendo en polémicas célebres como fueron la resolución de la ecuación de ondas, abordada por primera vez por D'Alembert en 1747; el desarrollo de funciones en serie de senos, propuesta por Lagrange en 1759 o la correcta formulación de los conceptos de infinito e infinitesimal que partiera de la controversia abierta por el obispo George Berkeley en 1734; polémicas estas que fueran en gran parte acicate del desarrollo del Análisis Matemático en el siglo XIX.

Por otra parte, optó con frecuencia a concursos convocados por diversas Academias Científicas; y, así, obtuvo doce veces el premio que concedía cada dos años la Academia de París, una de las veces compartido con MacLaurin y con Daniel Bernoulli con una memoria que trataba sobre el comportamiento de las mareas.

Los trabajos más célebres de Euler se recogen en su Mechanica, publicada en 1736; donde se presenta por primera vez la mecánica newtoniana en forma analítica;

en la Introducio in analysim infinitorum, de 1748, la más conocida de sus obras, que, traducida al francés y al alemán, se convirtió rápidamente en el texto por excelencia de Análisis; y las Institutiones calculi differentialis, de 1755 e Institutiones calculi integralis, de 1770, que recogen todos los trabajos y resultados acumulados en ese vasto campo, así como numerosas contribuciones personales. En lo que se refiere al método utilizado por Euler, al alcance de su rigor o a la pericia de su intuición, debemos destacar que en una memoria escrita a los 18 años el autor concluye que no es necesario verificar los resultados mediante la experimentación. Además, como veremos más adelante, Euler opera formalmente con series e infinitesimales, obteniendo resultados que en algunos casos contradicen el rigor absoluto de la Matemática. En este sentido, debemos considerar a Euler como uno de los matemáticos que, con el más alto grado de intuición, aborda problemas y obtiene resultados con mucha facilidad sin frecuentar el rigor necesario. Justamente este procedimiento, básicamente formal, hubo de ser pulido y refinado posteriormente mediante la introducción de un trabajo de confirmación riguroso, trabajo que emprenderán ya en el siglo XIX matemáticos como Cauchy, Weierstrass o Cantor.

Pues bien, como quiera que los estudios de Euler rozan todas las ramas de las Ciencias Exactas, descartamos la posibilidad de detallar cada una de sus aportaciones; y nos restringiremos a analizar cuatro tópicos en los que trabajó, tópicos donde se aprecia tanto su talante científico, como la importancia de sus investigaciones.

Comencemos con la simbología euleriana. En este campo habremos de anotar que Euler fue el matemático que más renovó la escritura de los signos matemáticos, de tal modo que la mayor parte de la notación actual se la debemos a su invención. Así lo recoge Ch. Boyer:

... El uso de las letras minúsculas a, b, c, para los lados de un triángulo y de las correspondientes letras mayúsculas A, B, C, para los ángulos respectivamente opuestos a ellos, proviene de Euler, así como la adopción de las letras r, R y s para los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita y el semiperímetro del triángulo, respectivamente. La bella fórmula 4rRs = abc que relaciona esas seis longitudes es también uno de los muchos resultados elementales que se le atribuyen.... La notación lx para el logaritmo de x, el uso tan familiar hoy de la sigma mayúscula griega para representar una suma y, quizá la más importante de todas, la notación f(x) para una función de x, utilizada en los Commentarii de San Petersburgo de 1734-1735, son otras de las notaciones de Euler que seguimos utilizando en la actualidad. Se puede afirmar, pues, sin ninguna duda, que nuestro sistema de notaciones matemáticas es hoy lo que es debido más a Euler que a ningún otro matemático a lo largo de la historia.

Ch. Boyer, pág. 557

En esta ingente contribución euleriana a la formalización matemática moderna sobresale el uso de los símbolos que aparecen en la famosa fórmula:

$$\exp(\pi i) + 1 = 0 \ ^{(1)}$$

paradigma de la síntesis teórica de la Matemática, en la que figuran los cinco números más importantes y las más importantes operaciones y relaciones de toda esta ciencia. La génesis del uso e invención de los números reales trascendentes e y π y del complejo imaginario puro i nos la resume Collette como sigue:

... En una carta de 1731 dirigida a Goldbach, Euler utiliza su letra e para «el número cuyo logaritmo hiperbólico es igual a uno», y es en su Mechanica, publicada en 1736, donde esa letra e aparece impresa por primera vez.

Aunque Euler no fuera el primero en utilizar la letra π para representar la razón de la circunferencia al diámetro en una circunferencia, pues ya había aparecido con anterioridad en la Sinopsis palmariorum matheseos de William Jones (1675-1749), publicada en 1706, su uso se extendió y mantuvo gracias a Euler, que adoptó el símbolo π en 1737.

El símbolo i para designar la raíz cuadrada de -1 es una notación introducida por primera vez por Euler en 1777. En sus primeros trabajos, utilizaba el símbolo i para designar un «número infinito», un poco a la manera de Wallis. Así, Euler escribió $e^x = (1 + x/i)^i$ mientras que actualmente se escribiría

$$e^x = \lim_{h \to 0} (1 + x/h)^h \ ^{(2)}$$

J. P. Collette, pág. 197

Justamente la fórmula anterior, que nos sirve en la actualidad para definir el número e, base de los logaritmos neperianos, nos va a permitir aclarar dos de los aspectos más sobresalientes de los trabajos de Euler. Hablamos en primer lugar de su ingeniosa intuición y de la forma puramente formal con la que el matemático suizo trataba los problemas. Cuando la función exponencial exp(x) se quiere extender desde el campo de los números reales x al de los números complejos a + bi comparece la conocida notación euleriana:

$$\exp(ib) = \cos b + i \operatorname{sen} b \ ^{(3)}$$

que establece una relación entre la exponencial y las funciones trigonométricas seno: senb y coseno: cosb; relación que Euler obtuvo en las formas equivalentes de:

$$2.\cos b = [\exp(ib) + \exp(-ib)]\ ,\ 2i.\mathrm{sen}\, b = [\exp(ib) - \exp(-ib)]$$

ó

$$ib = \log(\cos b + i\,\mathrm{sen}\, b)$$

descubiertas por él en 1748, 34 años después de los trabajos que publicaran Cotes y De Moivre.

Como se desea que la exponencial compleja verifique las mismas propiedades que cumple en el caso real deberá tenerse:

$$\exp(a + ib) = \exp(a).\exp(ib)$$

y, conocido el valor real de exp(a), a número real, propone para exp(ib) la siguiente notación compleja:

$$\exp(ib) = f(b) + ig(b) \quad (4)$$

siendo f y g dos funciones del parámetro b, en principio desconocidas, y cuya expresión se desea encontrar. Derivando formalmente en (4), y dando por cierto que la derivada de la función exponencial compleja deberá conservar las propiedades que ya verifica en el caso real, obtenemos:

$$i.\exp(bi) = f'(b) + ig'(b) \quad (5)$$

derivando de nuevo en (5), será:

$$i.i.\exp(bi) = f''(b) + ig''(b) \quad (6)$$

ó

$$-\exp(bi) = f''(b) + ig''(b), \text{ ya que el cuadrado de i es -1}$$

Comparando entonces (6) con (4) encontraremos las siguientes relaciones que han de satisfacer nuestras desconocidas funciones f y g:

$$f(b) = -f''(b) \quad (7)$$
$$g(b) = -g''(b) \quad (8)$$

siendo además: $f(0) = 1$ y $g(0) = 0$
$f'(0) = 0$ y $g'(0) = 1$

Entonces, como quiera que las ecuaciones (7) y (8) establecen lo que se denomina un problema de valores iniciales para las ecuaciones diferenciales (7); problema que se resuelve con dos valores únicos para las funciones f(b) y g(b) y que ya era familiar para Euler, pues en 1743 publicó un trabajo en el que obtienen la expresión general de las soluciones de toda Ecuación Diferencial Ordinaria Lineal y de Coeficientes Constantes; las dos soluciones que resuelven nuestro problema son:

$$f(b) = \cos b \quad y \quad g(b) = \operatorname{sen} b$$

funciones trigonométricas que ya aparecen en la expresión (3).

Sirva este ejemplo de ilustración del método utilizado por Euler, quien, procediendo de forma puramente formal, sin especial rigor, obtiene resultados ciertos. Mas no siempre el método funciona con igual éxito y, en particular, cuando Euler trabaja con las series no distingue adecuadamente entre series convergentes y series divergentes; usa con frecuencia valores de la variable que no pertenecen al campo de convergencia de la serie y obtiene resultados disparatados como el que sigue:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \ldots = 1/2 \quad (9)$$

pues, según él, ya que en el desarrollo de la serie geométrica:

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots \quad (10)$$

basta escoger el valor de x: $x = -1$ y sustituir en (10) término a término.

En este caso, la serie (9) es oscilante, no converge; y en el desarrollo (10) no se puede sustituir el valor $x = -1$, ni ningún otro menor pues estaríamos rebasando su campo de convergencia.

El segundo rasgo característico de la investigación de Euler que nos propone la expresión (1) tiene que ver con la aplicabilidad de los resultados teóricos que éste obtiene. La mayor parte de las investigaciones emprendidas por Euler pretenden resolver algún problema práctico concreto; y, en consecuencia, la resolución de dicho problema supondrá la aportación de un material teórico que cabe aplicar en la resolución de muchos otros. Pongamos dos ejemplos que, partiendo de las investigaciones eulerianas, permiten resolver dos cuestiones actuales ligadas a la Economía.

El primero de los ejemplos nos habla del cálculo del interés continuo, aquel que acumula un capital inicial C cuando la tasa de interés i se añade en cada instante a éste para así producir nuevos intereses y capitales.

Suponiendo inicialmente que estamos trabajando con un interés simple en donde durante el primer año

1 peseta se convierte en $1 + i$

C pesetas se convertirán en $C\,(1 + i) = F_1$

Transcurridos t años resultará un capital acumulado igual a:

$$C\,(1 + i)^t = F_t$$

Entonces, si la acumulación de intereses se hace m veces por año, razonando del modo anterior, y sabiendo que el periodo de capitalización es ahora de 1/m de año, el tanto por uno por periodo es i/m y el número de periodos de capitalización vale tm se obtiene:

$$F_t = C(1 + i/m)^{tm}$$

Si el número de periodos de capitalización se hace tender a infinito, o sea, si los intereses producidos se añaden en cada instante al capital para producir nuevos intereses, se obtiene lo que se denomina interés continuo. Será entonces:

$$F = \lim_{m \to \infty} C\,(1 + i/m)^{tm} = C \lim_{m \to \infty} [(1 + 1/(m/i))^{tm}] = \lim_{n \to \infty} [(1 + 1/n)^n]^{it}$$

llamando m/i = n; se observa que por ser i constante, si m tiende a infinito, también n tiende a infinito. Se tiene, pues, para el interés continuo:

$$F_t = C.\exp(it)$$

fórmula en la que aparece de nuevo la función exponencial, y que también podría haberse obtenido resolviendo la Ecuación Diferencial ordinaria de Primer Orden que comparece en el estudio de poblaciones donde se supone que el crecimiento de la población en cada instante es proporcional al número de individuos que la forman. Esta manera de resolver el problema se acerca más al modo de investigación euleriano, por cuanto es bien sabido que la técnica de separación de variables que se precisa en su resolución había sido descubierta ya por Leibniz en 1691.

El segundo ejemplo que queremos explicar tiene que ver con el uso de las funciones homogéneas en la interpretación microeconómica de la función de producción.

Una función que depende de dos variables f(x,y) se dice que es homogénea de grado m cuando al multiplicar las variables independientes por un mismo factor L, el nuevo valor de la función resultará ser igual al producto por L^m veces del valor de f(x,y). Entonces, un resultado conocido como Teorema de Euler establece que si f(x,y) es regular (diferenciable) será homogénea si y solamente si se verifica la relación:

$$x f_x (x,y) + y f_y (x,y) = m f(x,y) \quad (11)$$

donde los símbolos f_x y f_y denotan las derivadas parciales de f respecto de x y de y respectivamente.

Pues bien, supongamos que Q = f(K,L) representa la función de producción de un bien o el output que depende del capital K y de la fuerza de trabajo L que intervienen en el proceso; el hecho de que f sea una función homogénea de grado 1 se interpreta en Economía diciendo que la producción se produce en forma de rendimiento constantes a escala; y esto supone que al incrementar el empleo de todos los insumos en la misma proporción, aumenta el producto en esa misma proporción. Entonces la relación(11) quedará en la forma:

$$K \frac{\partial Q}{\partial K} + L \frac{\partial \alpha}{\partial L} = Q$$

que se interpreta en la forma: la producción total o ouput es igual al producto de las unidades del capital K por su producto marginal más el producto de las unidades de la mano de obra L por su producto marginal.

Por último, vamos a retomar el tema de los infinitos y de los infinitesimales, temas que se prodigaron en controversias y disputas tanto en el siglo de Euler como, posteriormente, en el XIX. Abordamos la contribución del matemático suizo en estas polémicas a la luz de dos grandes discusiones suscitadas ya desde la aparición del Cálculo Infinitesimal en 1680, éstas de naturaleza filosófica y con la ayuda de los aspectos matemáticos de las soluciones encontradas por Euler.

Comencemos en primer lugar con la controversia iniciada por el obispo George Berkeley en 1734, quien presentó un ataque frontal a las nuevas técnicas del Cálculo, y, en particular, al concepto newtoniano de infinitesimal. En la discusión que quedó abierta Euler interviene formalmente rechazando el concepto de infinitesimal entendido como una cantidad menor que cualquiera fijada de antemano, y sin embargo no nula. En sus Institutionis de 1755 sostenía que:

No hay duda de que cualquier cantidad puede disminuirse hasta tal punto que se anule completamente y desaparezca. Pero una cantidad infinitamente pequeña no es otra cosa que una cantidad evanescente y por tanto ella misma ha de ser igual a 0. Ello está también en armonía con esa definición de cosas infinitamente pequeñas según la cual se dice que son menores que cualquier cantidad fija; ciertamente, debería ser nula, pues si no fuese igual a 0 se le podría asignar una cantidad igual, lo que es contrario a la hipótesis. *M. Kline, pág. 570*

En esta idea insiste cuando se refiere a la recta, entendida ésta como un continuo de puntos de grosor nulo. Así en la carta 123 escrita a la princesa alemana Anhalt-Dessau, sobrina del rey de Prusia establece:

... Por pequeña que consigamos una línea, es divisible en dos mitades y a su vez cada mitad de nuevo en dos, y cada una de éstas en dos, y así sucesivamente hasta el infinito.

Lo que acabo de decir aquí de una línea se aplica fácilmente a una superficie, y aun con mayor razón a un sólido que posee las tres dimensiones en longitud, anchura y profundidad. Por ello se dice que toda extensión es divisible hasta el infinito, denominándose a esta propiedad la divisibilidad hasta el infinito.

Quien pretendiera negar esta propiedad de la extensión, estaría obligado a sostener que se alcanzan finalmente partes tan pequeñas, que ya no serían susceptibles de división ulterior, y ello porque no tendrían extensión. Sin embargo, todas estas partículas tomadas conjuntamente deben reproducir el todo por cuya división hemos accedido a ellas. Por tanto, puesto que su magnitud sería cero o nada, varios ceros tomados conjuntamente daría como resultado alguna cantidad, lo cual es manifiestamente absurdo... Es pues absolutamente insostenible la opinión según la cual, en la división de una extensión o de una cantidad cualquiera, se accede finalmente a partes tan pequeñas que ya no son divisibles a causa de su pequeñez, puesto que no contienen cantidad alguna. *L. Euler, pág. 149*

Con todo, esta concepción de las cantidades infinitamente pequeñas, junto con el concepto de divisibilidad hasta el infinito conduce a Euler a enfrentar dos problemas de naturaleza diversa. Por un lado se encuentra con la controversia abierta por Leibniz y Wolff sobre la composición de los cuerpos y la teoría de las mónadas; y por otro lado le supone una contrariedad a la hora de resolver indeterminaciones que sólo aparecen en el marco formal de la Matemática.

En lo que respecta a la discusión sobre las mónadas, se había llegado en época de Euler a un galimatías filosófico, traducible en la engorrosa cita que reproducimos:

... El argumento de éstos se basa en que todo ser extenso es un ser compuesto. Y puesto que todo compuesto supone lo simple, en la medida en que los seres compuestos no pueden serlo de seres a su vez compuestos, los seres extensos -dado que son compuestos- estarán constituidos de seres simples a los que se ha dado el nombre de «mónada». *A. Rioja, pág. 34*

Entonces Euler resuelve la controversia desde dos puntos de vista distintos. En el primero de éllos Euler interviene del modo siguiente:

Es pues una verdad comprobada que la extensión es infinitamente divisible y que es imposible concebir partes tan pequeñas que no sean susceptibles de división ulterior. Los filósofos, por otro lado, no están en desacuerdo con esta verdad, pero niegan que tenga lugar en los cuerpos actualmente existentes. Dicen que la extensión, cuya infinita divisibilidad ha sido demostrada, no es más que un objeto quimérico formado por abstracción y que una simple extensión, tal como se la considera en Geometría, no podría existir en el mundo.

Por tanto, si los cuerpos, que desde luego son seres extensos o dotados de extensión, no fueran infinitamente divisibles, sería así mismo falso que la divisibilidad hasta el infinito fuera una propiedad de la extensión. Ahora bien, estos filósofos reconocen que esta propiedad conviene a la extensión, pero pretenden que no puede darse en los seres extensos. Es lo mismo que si yo quisiera decir que entendimiento y voluntad son atributos de la noción de hombre en general, pero no pueden darse en los hombres individuales existentes.

De ello V. A. extraerá fácilmente la siguiente conclusión: si la divisibilidad hasta el infinito es una propiedad de la extensión en general, necesariamente ha de serlo también de todos los seres individuales extensos; o bien, si los seres actuales extensos no son infinitamente divisibles, es falso que la divisibilidad hasta el infinito sea una propiedad de la extensión en general. *L. Euler, pág. 151*

Se trata, como se ve, de un argumento filosófico. Por contra, la segunda respuesta que da Euler tiene que ver con los aspectos matemáticos del tema, en concreto sobre la noción de límite. Retomando la controversia sobre lo compuesto y los simple, según A. Rioja, Euler argumenta del modo siguiente:

... No puede negarse que compuesto es un término relativo que perderá toda su significación si se afirma que lo compuesto está infinitamente compuesto de compuestos. Lo compuesto supone lo simple, pero ¿significa ello que lo simple es parte de lo compuesto?, ¿podemos acaso constituir el continuo espacial por la mera agregación de puntos? El punto se determina como límite, y no como parte de la línea. Así, el término o límite del segmento AB está en él, pero no forma parte de él, puesto que dicho segmento es una longitud y el término no lo es. El punto y la línea, o si se prefiere, el límite y lo limitado, no pertenecen al mismo nivel de realidad. Un segmento o una serie son dados, pero el término del segmento o el límite de la serie han de ser puestos por el matemático, o de lo contrario jamás se accederá a ellos.

La serie 1/2 + 1/4 + 1/8 +... tiende a 1, pero jamás llega a 1. Al poner un límite a una serie, el matemático le adscribe una noción que no forma parte de ella, podría decirse que los límites son metaseriales. Hay que decir, en consecuencia, que lo continuo y lo discontinuo no tienen el mismo nivel o estado de realidad matemática.

A. Rioja, pág. 35

Y, justamente con la discusión anterior, desembocamos en los aspectos matemáticos inherentes a la noción de infinitesimal, esto es a la noción de límite y, en particular, al concepto de «fluxión» o derivada y a lo opuesto al cero: el infinito. En primer lugar, Euler destierra la noción de diferencial tal como la entendían sus coetáneos y se encuentra entonces con el problema de explicar cómo dy/dx, que para él era 0/0, podía ser igual a un número bien definido. Lo hizo de la siguiente manera: dado que para cualquier número n se tiene que n . 0 = 0, entonces n = 0/0; la derivada es simplemente un método útil de determinar 0/0; para justificar el despreciar la diferencial dx al cuadrado en presencia de dx, Euler afirma que ésta se anula antes de que lo haga dx.

En la otra dimensión del problema aceptó el infinito como número, por ejemplo, como la suma 1 + 2 +..., y también distinguió órdenes de infinitos.

Como vemos, la solución matemática apuntada por Euler en la resolución de los conceptos de infinitamente pequeño y de infinitamente grande es de nuevo de naturaleza enteramente formal, entendiendo esta idea como solución puramente operativa. En definitiva, encontraremos que para Euler la resolución práctica del problema justifica el método que se utiliza, sin necesidad de precisar en demasía el rigor de la demostración. A modo de ejemplo de esta forma de operar que el matemático suizo utiliza indiscriminadamente anotamos el modo en que obtiene la derivada de la función logarítmica, tal como lo recoge en sus Institutiones (1775):

Se tiene que $dy = \ln(x + dx) - \ln x = \ln(1 + dx/x)$

pero como Euler conoce el desarrollo en serie de $\ln(1 + z)$, a saber:

$$\ln(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \ldots \quad (12)$$

basta hacer $z = dx/x$, y entonces quedará:

$$dy = dx/x - (dx)^2 /2x + (dx)^3 /3x + \ldots = \sum (-1)^n \frac{(dx)^n}{nx^m}$$

y como todos los términos que aparecen después del primero son evanescentes (en el sentido de que $(dx)^2$ se anula en presencia de dx, tenemos que:

$$d(\ln x) = \frac{1}{x}$$

En este razonamiento Euler desconoce o no tiene en cuenta ni la convergencia de la serie[(12)] para todo valor de z; ni justifica la sustitución de z por cualquier expresión del tipo dx/x; ni el proceso de inversión en el límite. En definitiva, obvia cuestiones de rigor totalmente imprescindibles a la hora de justificar el acertado uso de sus demostraciones.

BIBLIOGRAFÍA

1. C. Boyer, The History of the Calculus and its conceptual development, Dover, New York, 1959
2. C. Boyer , Historia de la Matemática, Alianza Universidad Textos, N.° 94, Madrid, 1986
3. J. P. Collette, Historia de las Matemáticas, Siglo XXI de España Editores, SA, Madrid, 1985
4. L. Euler, Reflexiones sobre el Espacio, la Fuerza y la Materia, Alianza Editorial, Madrid, 1985
5. Grattan Guninnes, Del Cálculo Infinitesimal a la Teoría de Conjuntos, Alianza Universidad, Madrid
6. M. Kline, El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, Alianza Universidad, Madrid, 1992
7. A. Rioja, Comentarios y presentación de la obra: «Reflexiones sobre el Espacio, la Fuerza y la Materia» de L. Euler, Alianza Editorial, Madrid, 1985