El Rigor en el Análisis del Siglo XIX: de CAUCHY a WEIERSTRASS

JESÚS HERNÁNDEZ
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid

1. INTRODUCCIÓN

Tal y como suele decirse, el cálculo infinitesimal fue una creación debida a Newton y Leibniz, quienes unificaron y desarrollaron considerablemente toda una serie de métodos y procedimientos dispersos usados por autores anteriores para tratar aisladamente problemas concretos. Entre los griegos, como se sabe, no hay antecedentes del cálculo diferencial y las tangentes a las cónicas son consideradas de manera puramente geométrica. Sí hay, en cambio, formas de calcular áreas y volúmenes, e incluso una manera rigurosa de hacerlo, el llamado método de exhausción o «exhaustivo», que ciertamente algo tiene que ver con la noción del límite, y que fue conocido e inspiró a los matemáticos posteriores.

A Newton y Leibniz siguió un siglo XVIII en el cálculo infinitesimal y sus aplicaciones a la mecánica y a la física en general se desarrollaron extraordinariamente, a partir de los «*Principia*» de Newton, llegándose a instrumentos tan generales como el Cálculo de Variaciones. Pero la justificación –le demos el sentido que le demos– de los procedimientos empleados parecía dejar que desear en cuanto a solidez y claridad, y ello no ya desde los criterios de nuestros días, sino también desde los de la época. Fueron abundantes las críticas al uso de los «infinitamente pequeños» o «infinitésimos», a las «cantidades evanescentes», entre ellas las brillantes del obispo Berkeley, que tuvieron amplio eco. Y los intentos de respuesta a estas críticas, entre los que destacan los nombres de Taylor y Mclaurin, no resultaron demasiado convincentes.

A finales del siglo XVIII había pues, un cálculo muy desarrollado y que resultaba importantísimo para la física y la astronomía. Y había también una cierta necesidad de afirmarlo sobre bases más sólidas y algunas ideas acerca de cómo podría hacerse, por ejemplo usando el concepto de límite. Pero algunos autores que parecieron vislumbrar estas ideas –se ha citado mucho a D'Alembert en este sentido– no las desarrollaron y otros, como Euler, dedicaron mucho más esfuerzo a obtener resultados que a presentar el cálculo de una forma que no se prestase a las críticas que se habían hecho.

Esta sería la tarea del siglo XIX. Partiendo de la obra de Lagrange, sin duda el matemático del XVIII más preocupado por los fundamentos, Cauchy desarrolló en una serie de escritos, el más famoso de los cuales es el «*Curso*» de 1821, una visión del cálculo que suponía un gran avance sobre todo lo anterior en cuanto a la precisión en las definiciones y el rigor de las demostraciones en los teoremas. Un poco antes Gauss había dado, con su estudio de la convergencia de la serie hipergeométrica, un ejemplo de rigor a la hora de investigar la convergencia de las series de funciones y la determinación del dominio de validez de dicha convergencia; un poco después, Abel hizo aportaciones importantes al estudio de la convergencia de las series de potencias.

Otro texto fundamental para el análisis del siglo XIX fue la «*Teoría analítica del calor*», de Fourier, publicada en 1822, un año después del «*Curso*» de Cauchy. Las ideas allí expuestas en torno a las series que hoy llevan su nombre contribuyeron a extender y precisar la noción de función y su continuidad, la posibilidad de desarrollar funciones en serie trigonométrica y las condiciones para ello, y la noción de integral, que Cauchy presentaría en una forma parecida a la de hoy, más tarde perfeccionada por Riemann. Una razón fundamental para el desarrollo de la idea de integral fue la demostración rigurosa de resultados de convergencia para las series de Fourier, entre los que hay que citar un famoso teorema de Dirichlet.

A Cauchy se ha atribuido la presentación de nociones como límite, continuidad, convergencia, derivada, integral, etc., en una forma parecida, o casi idéntica, a la nuestra, y el establecimiento del rigor en el cálculo. Esto, que es en buena parte cierto, no lo es del todo, tal como intentaremos mostrar con algún detalle. El ciclo abierto por Cauchy, y otros, puede decirse que se cierra con Weierstrass, quien desde su cátedra de Berlín ejerció una enorme influencia, sometió a crítica diversas nociones y contribuyó a dar a la teoría de funciones, reales y complejas, una forma sistemática con un rigor nunca visto antes y con el que acababa de perfilarse el de Cauchy. A esto habría que añadir la presentación rigurosa de los números complejos a partir de los reales, debida en buena parte a Hamilton, y la aceptación general de su interpretación geométrica como puntos del plano. Y, hacia 1870, la presentación casi simultánea por varios autores de distintas teorías de los números reales en las que quedaban justificadas rigurosamente sus propiedades. De este modo quedaba abierta la vía para la teoría de conjuntos de Cantor quien con su fino estudio de las propiedades de la recta real, abriría el camino de la topología y de la teoría de la medida. Pero esta es ya otra historia que va más allá de los límites de esta conferencia.

2. EL RIGOR A PRINCIPIOS DEL SIGLO XIX. LAGRANGE

Si tomamos como punto de referencia los comienzos del siglo XIX, encontraremos varias diferencias importantes con respecto a la situación de la matemática en nuestros días. En lo que sigue intentaremos dar una idea aproximada acerca de cómo tuvo lugar esa evolución a lo largo de una parte del camino, hasta casi el final del XIX. Comenzaremos por señalar varios **núcleos** conceptuales relevantes para nuestros fines:

a) Funciones: se consideran funciones dadas por expresiones analíticas explícitas (por **fórmulas**), pero las formulaciones más generales son pocas, aisladas y sujetas a discusión (véase lo dicho más abajo sobre la polémica a propósito de las soluciones de la ecuación de la cuerda vibrante);

b) Conjuntos: en la matemática se **manejan**, desde luego, distintos conjuntos de números, funciones, cónicas, figuras geométricas, etc., pero no parece que antes de Bolzano haya habido ningún intento notable de precisar conceptualmente estas nociones;

c) Series: se utilizan ampliamente, incluyendo algunas aplicaciones importantes, como la solución de ecuaciones diferenciales, pero las cuestiones relativas a la convergencia son dejadas de lado a menudo. Las series divergentes son usadas con una gran libertad, lo que da lugar a diversas paradojas;

d) Series de Fourier: la utilización del método de separación de variables por D'Alembert para resolver la ecuación de la cuerda vibrante, y otros problemas, llevaron a considerar la posibilidad de representar funciones «Cualesquiera» mediante series trigonométricas haciendo intervenir senos y cosenos, lo que originó una larga y complicada polémica entre algunos de los matemáticos más importantes de la época acerca de qué funciones podían ser consideradas;

e) Números reales: los números racionales e irracionales son usados consistentemente, es decir, sin dar lugar a paradojas, pero sin disponer de una definición clara de ellos a partir de la cual se obtengan sus propiedades;

f) Números complejos: venían siendo usados bajo distintas denominaciones (imposibles, imaginarios, etc.), sobre todo en la resolución, de las ecuaciones algebraicas. Gauss había dado varias demostraciones del llamado Teorema Fundamental del Álgebra (el resultado que dice que todo polinomio de grado n tiene exactamente n raíces complejas), pero todavía no se había llegado a la interpretación geométrica como puntos del plano que es hoy habitual. La extensión de algunas funciones conocidas al campo complejo resultó problemática, como lo muestra la polémica que tuvo lugar en torno a las paradojas a que dio lugar el logaritmo complejo;

g) Derivadas e integrales: las derivadas y diferenciales son manejadas y permiten obtener numerosos resultados. La integral es presentada como operación «inversa» de la derivada.

La situación puede iluminarse con una famosa cita de Abel, quien en 1826 habla de

> «*...la tremenda oscuridad que encontramos sin duda en el análisis. Carece tan absolutamente de plan y sistema que es notable que tantos lo hayan estudiado. Lo peor de todo es que nunca ha sido tratado con precisión. Pocos teoremas del análisis superior han sido demostrados de una forma lógicamente satisfactoria. En todas partes encuentra uno esa miserable forma de concluir que va de lo particular a lo general, y resulta*

> *sumamente extraño que tal procedimiento haya dado lugar a tan pocas de las llamadas paradojas*».

Pasamos ahora a examinar con un poco más de detalle algunos de los puntos anteriores.

Las funciones empleadas por los matemáticos del siglo XVIII venían dadas por una expresión analítica, una fórmula. Euler hablaba de «*una expresión formada, de cualquier modo, de la misma cantidad y de números o cantidades constantes*». Gauss considera expresiones analíticas finitas, y cuando habla de la función hipergeométrica F(a,b,c,x) como función de a, b, c y x, añade «*en tanto que puede considerarse como función*». En su tratado de 1797, Lacroix dice que «*Toda cantidad cuyo valor depende de uno o varios distintos se llama función de las últimas, tanto si uno sabe mediante qué operaciones se va de las últimas a las primeras como si no*».

Un poco antes, en 1787, la Academia de San Petersburgo, sin duda por influencia de Euler, propuso la cuestión siguiente:

> «*Si las funciones arbitrarias a las que se llega integrando ecuaciones [diferenciales], en tres o varias variables, representan cualquier curva o superficie, bien sea algebraica o trascendente, bien sea mecánica, discontinua o producida por un movimiento voluntario de la mano; o bien si estas funciones incluyen sólo a las curvas continuas representadas por una ecuación algebraica o trascendente*»,

lo que es buena muestra de la imprecisión reinante. El premio fue ganado por L. Arbogast, seguidor de Lagrange, y que, en la línea de Euler, distinguía entre funciones «discontinuas», en el sentido de que pueden estar definidas por leyes o fórmulas distintas –es decir, que para nosotros podrían ser continuas– y las «discontigüas», que serían nuestras funciones discontinuas con saltos finitos. Además, la noción de función «continua» en el sentido de Arbogast parece incluir la «contigüidad», en el sentido de incorporar a la gráfica de la función trozos verticales uniendo los saltos.

Pero sin duda fue J.L. Lagrange (1736-1813) el matemático importante de la época que más atención dedicó al problema de los fundamentos del análisis, volviendo una y otra vez sobre él a lo largo de los años. Ya en una carta a Euler de 1754 dice que «*había desarrollado la verdadera metafísica de sus principios tanto como es posible*», pero no da detalles. En 1760 vuelve sobre ellos y en 1772 declara que la única manera de hacer rigurosos los conceptos del cálculo es reducirlos al álgebra, es decir, en definirlos en términos de conceptos algebraicos. Para Lagrange había, en 1772, una «teoría de series» algebraica que proporcionaba para toda función un desarrollo en serie.

> «*El cálculo diferencial, considerado en toda su generalidad, consiste en encontrar directamente y mediante procedimientos simples y sencillos*» las funciones p, q, r en el desarrollo general
>
> $$f(x+h) = f(x) + ph + qh^2 + rh^3 + \ldots$$
>
> para una función dada f. Para Lagrange, era la «*presentación más clara y sencilla nunca vista*» y ello «*independientemente de toda metafísica y de cualquier teoría de las cantidades infinitamente pequeñas y evanescentes*».

Sin embargo, los fundamentos no eran la preocupación principal en su artículo de 1772 y las observaciones sobre ellos eran breves y dispersas. Tampoco se intentaba obtener a partir de los fundamentos los algoritmos básicos del cálculo.

En 1784 la Academia de Berlín había convocado, sin duda con intervención de Lagrange, un premio para «*una teoría clara y precisa de lo que se llama infinito en matemática*». Reproducimos, por ser significativa, parte de la convocatoria

> «*Es bien sabido que la matemática superior usa continuamente cantidades infinitamente grandes e infinitamente pequeñas. Sin embargo los geómetras, e incluso los analistas antiguos, han evitado cuidadosamente todo lo que se acerca al infinito, y algunos grandes analistas modernos sostienen que la expresión "magnitud infinita" es contradictoria.*
>
> *La Academia espera, entonces, que pueda ser explicado cómo ha sido posible deducir tantos teoremas verdaderos de una suposición contradictoria, y que sea posible encontrar un principio que sea seguro, claro –en una palabra verdaderamente matemático– que pueda sustituir adecuadamente al «infinito»*».

El resultado fue un tanto decepcionante. El premio fue otorgado a un trabajo de S. L'Huilier, el menos insatisfactorio de los presentados. La Academia no quedó muy contenta, y en el acta del premio se hace constar que todas las contribuciones carecían de «*claridad, sencillez y rigor particular*», y que todos los concursantes «*habían olvidado explicar cómo era posible deducir tantos teoremas verdaderos de una suposición contradictoria*».

Años después, en 1797, se publican las «*Refléxions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*», de L. Carnot y, sobre todo, las «*Fonctions analytiques*» de Lagrange, cuyo título completo era «Teoría de las funciones analíticas, alejada de cualquier consideración de cantidades infinitamente pequeñas o evanescentes, o de límites, o de fluxiones y reducida al análisis algebraico de cantidades finitas», escrita como libro para servir de texto en la Escuela Politécnica de París.

El libro comienza con una crítica de los anteriores intentos de fundamentar el cálculo. Los infinitésimos no eran rigurosos en absoluto y Leibniz y los Bernoulli «*no se preocupaban de demostrar los principios*». La compensación de errores de que hablaba Berkeley permite obtener resultados correctos, pero desgraciadamente no puede tomarse como fundamento «*ya que sería difícil dar una demostración* [de ella]». Las fluxiones de Newton eran inaceptables porque hacían intervenir el movimiento y la velocidad. En cuanto al concepto de límite, era demasiado vago, y más geométrico que algebraico, como sucede con la idea de una curva como límite de una sucesión de polígonos. Tampoco le parece satisfactorio el intento de Euler y D'Alembert de demostrar que «*las diferencias que se suponen infinitesimales deben ser absolutamente nulas y que sus razones, que son las únicas cantidades que intervienen realmente en el cálculo no son sino límites de razones entre cantidades finitas o indefinidas*».

Según Grabiner, Lagrange hace además otra crítica, implícita, a los demás intentos de fundamentar el cálculo: el de no proporcionar todos los resultados conocidos. De este modo, la finalidad principal del libro de Lagrange sería la de establecer rigurosamente el cálculo más que descubrir resultados nuevos; por otra parte, éstos no faltan, como muestra el importante ejemplo de la obtención del resto para la fórmula de Taylor. Esta forma de actuar, junto con las correspondientes técnicas algebraicas, en particular el manejo de desigualdades, influyó en Bolzano y Cauchy, quienes lo citan explícitamente. Para Lagrange (en la edición de 1813).

> «*Llamamos función de una o varias variables a cualquier expresión del cálculo en la que entran dichas cantidades de una manera arbitraria... La palabra función fue utilizada por los primero analistas para denotar las potencias de una cantidad en general. Desde entonces esta palabra se ha extendido para*

designar cualquier cantidad formada de una manera arbitraria a partir de otra cantidad...»

y estas funciones podrán siempre desarrollarse en serie de la manera escrita más arriba «*donde p, q,... serán nuevas funciones de x, derivadas de la función primitiva f e independientes de h*». «*La formación y el cálculo de estas distintas funciones según Lagrange son, a decir verdad, el auténtico objeto de nuevos tipos de cálculo, es decir, del llamado cálculo diferencial*».

Lagrange llega incluso a dar una especie de demostración equivocada de que siempre existe ese desarrollo, salvo para valores aislados de la variable x. De hecho reconoce que hay unas pocas funciones para las que no es así, pero cree que esas funciones no se pueden estudiar mediante los métodos del cálculo.

De este modo $p = f'(x)$, $q = \frac{1}{2}f''(x)$,... donde f', f'',... son las derivadas de la función f.

Algo más tarde, en sus *Leçons* de 1801, Lagrange sigue mostrando un notable dominio en la manipulación de las desigualdades algebraicas, el mayor antes de Cauchy. Esta vez los aplica al estudio de la serie binómica (es decir, a la serie $(1+x)^m$, donde m es un racional no entero, o un irracional) y señala que «*de este modo podemos estar a cubierto de las dificultades que pueden venir de la falta de convergencia de la serie*». Mediante el criterio del cociente muestra que la serie binómica converge cuando $|x| < 1$ y saca la conclusión de que esa serie «*no podrá utilizarse con seguridad, sea cual sea su alcance, más que teniendo en cuenta los límites que acabamos de dar*». Según Pringsheim, Lagrange disponía ya de todos los elementos necesarios para dar una justificación rigurosa de la serie de Taylor.

Los intentos de Lagrange de reducir el cálculo al álgebra, sin recurrir a la geometría ni al movimiento, pueden entenderse como el final de un largo proceso que se extiende durante el siglo XVIII. Ya D'Alembert había reprochado a las fluxiones de Newton el hacer intervenir la idea de movimiento, ya que el cálculo tiene «*como objeto únicamente las cantidades algebraicas*». Euler había dicho que su tratado de cálculo diferencial «*estaba dentro de los límites del análisis puro*», ya que no usaba dibujos en sus explicaciones. Lagrange abre la vía de rigorización del análisis mediante el álgebra que seguirían Bolzano y Cauchy, y tampoco hay ningún dibujo en el **Curso**. Bolzano habla de la necesidad de no hacer intervenir la geometría en el análisis y de dar «*demostraciones puramente analíticas*» de sus teoremas; para él, «*sería una terrible ofensa al buen método derivar verdades de la matemática pura (o general), es decir, aritmética, álge-*

bra o análisis a partir de consideraciones que corresponden a la matemática puramente aplicada (o especial), como la geometría».
Grabiner ha insistido en el interés de Lagrange por los teoremas gnerales y en su deseo de mostrar que los resultados interesantes, sean la no resolubilidad de la ecuación de quinto grado, la exactitud de una aproximación o la ecuación del movimiento de un sistema físico, son casos particulares de algún principio más general. Esto le distinguía de sus contemporáneos, mucho más orientados hacia los problemas concretos. El también se ocupó de problemas numéricos concretos y fue justamente el interés por mejorar los métodos de aproximación lo que abrió el camino a Bolzano y Cauchy.

Bottazzini, en su introducción al *Curso*, recuerda el juicio de Bourbaki sobre el uso de las series durante el siglo XVIII:

> «*En esta época [a principios del XVII] se introduce el método de los desarrollos en serie, que muy pronto, en manos de algebristas impenitentes, toma un carácter solamente formal y distrae la atención de los matemáticos de los problemas de convergencia que plantea el sano uso de las series en el dominio de los números reales». D'Alembert «manifiesta sus dudas sobre el empleo de series no convergentes. Pero la autoridad de los Bernoulli y sobre todo de Euler, hace que tales dudas sean excepcionales en la época».*

Esta presentación de Bourbaki fue corregida años después por uno de los miembros más conocidos, J. Dieudonné, quien dice que

> «*Contrariamente a una opinión muy extendida, no hay que creer que los analistas del siglo XVIII sean indiferentes a las cuestiones de aproximación y de convergencia; casi todos ellos se interesan por el cálculo numérico».*

para concluir que:

> «*Las acusaciones de «falta de rigor» que hubieron de sufrir los analistas del siglo XVIII por parte de sus sucesores viene sobre todo, de hecho, de la dificultad que tuvieron para definir de modo preciso las nociones básicas del cálculo infinitesimal, de las que*

tenían a menudo una buena concepción intuitiva, y en marcar la distinción, a veces sutil, entre nociones aparentemente próximas; en el siglo XIX fueron condenados de modo demasiado expeditivo teniendo en cuenta sólo lo incorrecto de su lenguaje, sin examinar con cuidado el contexto».

En particular, Euler fue un absoluto maestro en el uso de las series, divergentes incluidas, de los métodos para sumarlas y de sus transformaciones: una de éstas le permitía por ejemplo asignar a la serie

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

la suma $\frac{1}{2}$. Pero en este dominio la reflexión sobre las maneras de justificar los resultados fue muy por detrás de la cantidad de éstos a lo largo de todo el XVIII.

En el siglo XVIII se inicia igualmente el estudio de las series trigonométricas, es decir, de aquellas series de funciones de la forma

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

donde los a_n y b_n son números reales, que habían aparecido tanto en problemas de astronomía como en teoría de la interpolación. Sabemos hoy que si la serie representa una cierta función $f(x)$, entonces los coeficientes vienen dados por

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx$$

y estos coeficientes son obtenidos de modo más o menos oscuro y mediante distintas manipulaciones formales por Euler y Clairaut en distintos casos.

A las mismas se llegó también en el estudio de las soluciones $u(x,t)$ de la ecuación en derivadas parciales que describe el movimiento de una cuerda vibrante, que es la $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, donde u_{xx} y u_{tt} designan derivadas parciales de la función u, y c es una constante real positiva. Utilizando el método llamado de separación de variables, debido a D'Alembert, se obtenían soluciones de la forma

$$u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

donde f y g eran funciones que venían determinadas por la posición y la velocidad de la cuerda en el instante inicial $t = 0$ (x es aquí la variable especial). Esto dio lugar a una complicada polémica, en cuyos detalles no podemos entrar aquí, entre D'Alembert, Euler, D. Bernoulli y Lagrange sobre qué clase de funciones f y g podían permitirse en las soluciones, y a la convocatoria del premio de 1787 de la Academia de San Petersburgo antes mencionado.

J. B. Fourier (1768-1830) presentó en 1807 a la Academia de Ciencias de París su primera memoria sobre la transmisión del calor, de la que daría una versión ampliada en 1812, y que finalmente se convirtió en 1822 en el célebre *Théorie analytique de la chaleur* (Teoría analítica del calor). Allí Fourier, además de encontrar la ecuación en derivadas parciales que rige la propagación del calor, llega mediante la aplicación de la separación de variables a una serie de la forma anterior, y deduce de un modo bastante embrollado que parece usar la existencia de un desarrollo de Mclaurin para la función f y una integración término a término no justificada el valor de los coeficientes. Esto le lleva a extender considerablemente la noción de función, diciendo

> «*En general, la función f(x) representa una sucesión de valores u ordenadas cada una de las cuales es arbitraria. Como la abscisa x recibe una infinidad de valores, hay un número igual de ordenadas f(x) y todas ellas tienen valores numéricos concretos, ya sean positivos, negativos o nulos.*
>
> *No suponemos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común a todas ellas; se suceden unas a otras de una manera arbitraria, y cada de una de ellas viene dada como si fuera una cantidad aislada.*»

Esta definición parece bastante más general que las anteriores y hasta puede entenderse como la de una función «arbitraria», pero esto último no es claro a partir del uso que hace Fourier de ella. También aclara y dilucida considerablemente las cuestiones, involucradas en la polémica acerca de las soluciones de la ecuación de la cuerda vibrante, sobre funciones definidas por distintas fórmulas sobre distintos intervalos, precisión del dominio de definición de una función dada por una fórmula, extensiones pares e impares a $(-\pi, \pi)$ de una función definida sólo en principio sobre $(0, \pi)$, etc. Todo esto supone una vuelta al punto de vista geométrico. Digamos también que Fourier llenaba con trozos verticales los saltos de las funciones discontinuas en la memoria de 1807, suprimiendo más tarde dichos dibujos.

Fourier parecía convencido de que «cualquier» función podía expresarse como una serie trigonométrica con coeficientes definidos por las fórmulas anteriores, e incluso hizo un intento de demostración, aun sin precisar las condiciones que había de cumplir f. (Sin embargo, sí probó la convergencia en algún caso particular). En 1820 Poisson publicó una demostración poco rigurosa, y en la que tampoco se precisaban las hipótesis. Por su parte, Lagrange criticó la falta de rigor de la memoria de 1807 de Fourier y parecía estar convencido de la imposibilidad de representar funciones cualesquiera mediante series de Fourier.

En 1809 Laplace obtuvo una fórmula integral para la solución de la ecuación del calor sobre un intervalo infinito de valores de x, y un poco después (1811) Fourier, de nuevo usando manipulaciones no rigurosas de series e integrales, lo que se llama fórmula integral de Fourier o transformada de Fourier, llegándose a expresiones como

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{+\infty} f(u) \cos(q(u-x)) \, du \, dq$$

que presentan múltiples dificultades si se quieren demostrar rigurosamente: intervalos de integración infinitos, cambios del orden de integración, etc. Resultados semejantes fueron obtenidos de manera tal vez independiente por Poisson y Cauchy.

Casi a la vez, en 1812, llevaba a cabo Gauss una de las primeras investigaciones rigurosas sobre la convergencia de series de funciones a propósito de la serie hipergeométrica F(a,b,c,x) según los valores de los parámetros a, b y c. Pero Gauss, que estudió de modo exhaustivo este caso particular, no intentó elaborar una teoría general.

Los números complejos venían usándose, desde siglos atrás, sobre todo a propósito de la resolución de ecuaciones algebraicas –hallar todas las raíces de un polinomio con coeficientes, en general reales, de grado n– pero su **status** matemático era sumamente vago y a menudo fueron considerados como una mera ayuda o artificio de cálculo que permitía obtener los resultados deseados, que a veces se intentaba formular sin hacer mención de los complejos. Otras aplicaciones importantes surgieron en el siglo XVIII, tanto en la mecánica de fluidos (D'Alembert) como en el cálculo de integrales definidas para funciones reales (Euler, Laplace). En palabras de M. Kline, la situación puede resumirse como sigue

> *«La obra de Euler, D'Alembert y Lagrange supuso un avance notable en la teoría de funciones. Sin embargo, había una limitación esencial en dicha obra: todos ellos separaban la parte real y la parte imaginaria de f(x + iy) a la hora de hacer el trabajo analítico. En realidad la función compleja no era la entidad básica. Es claro que estos matemáticos se sentían incómodos manejando funciones complejas. Laplace, en su libro de 1812, indica: «Esta transición de real a imaginario puede ser considerada como un*

método heurístico, que es como el método de inducción largo tiempo usado por los matemáticos. Sin embargo, si se usa el método con cuidado y prudencia, siempre es posible probar el resultado obtenido. Laplace insiste en que es necesario comprobar los resultados».

La forma de proceder de algunos matemáticos, entre ellos Euler, parece suponer la interpretación geométrica hoy usual de los números complejos como puntos del plano: al número complejo a + bi, con a y b números reales e i tal que $i^2 = -1$, le corresponde el punto de coordenadas (a,b). Sin embargo, la identificación no llegó a consumarse, ni tampoco la interpretación geométrica de las operaciones (suma y multiplicación) con los complejos.

La interpretación geométrica de los números complejos como puntos del plano o, mejor, como segmentos dirigidos (vectores) fue alcanzada independientemente por dos autodidactas, el noruego C. Wessel en una memoria de 1797 que permaneció olvidada durante un siglo, y el suizo J. R. Argand en un trabajo de 1806. Gauss, que había dado varias demostraciones del Teorema Fundamental del Álgebra en las que no se usaban realmente las funciones complejas sino que se separaban las partes real e imaginaria, estaba también en posesión de esta idea, como muestra una famosa carta a Bessel de 1811. Aunque todavía en otra carta de 1825 consideraba que «*la verdadera metafísica de $\sqrt{-1}$ es elusiva*», publicó finalmente sus ideas en 1831 diciendo que «*el significado intuitivo de los números complejos queda completamente establecido y no hace falta más para admitir esas cantidades en el domino de la aritmética*».

3. EL RIGOR DE CAUCHY Y EL ANÁLISIS MATEMÁTICO

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) es una de las grandes figuras de la matemática del siglo pasado y a él suele atribuirse en las historias de la matemática tradicionales la introducción del rigor en el domino del análisis matemático. Hizo aportaciones considerables a distintas ramas de la Matemática y de la Física Matemática, se le atribuye la creación de la teoría matemática de la elasticidad, que según dice Freudenthal en su excelente artículo biográfico sería su mayor logro pero gran parte de su muy abundante obra está dedicada al análisis, y de una parte de ella –quedarán fuera las ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales– nos ocuparemos en esta sección.

Al comienzo de su carrera y tras algunos resultados aislados en otros dominios, como por ejemplo una demostración del teorema de Euler sobre los poliedros, escribió en 1814 una memoria sobre el uso del cálculo de residuos de funciones complejas para hallar el valor de integrales definidas reales, y hacia 1816 encontró por sí mismo –parece– la fórmula de representación de la transformada de Fourier, así como la de la transformada inversa, con motivo de una memoria sobre la propagación de ondas en la superficie de un líquido. Y en 1821 publica el primero de sus grandes tratados. el «*Cours D'Analyse*» (Curso de Análisis) mejor dicho, su primera parte, «*Análisis algebraico*»; las siguientes no llegaron a publicarse- para la Escuela Politécnica de París. Más tarde publicó los «*Resumé des Leçons sur le calcul infinitésimal*» *(1823)* y «*Leçons sur le calcul différentiel*» (1829), con los que cambia la concepción del análisis. Según Boyer

> «*Puede decirse con toda tranquilidad que con Cauchy los conceptos fundamentales del cálculo reciben una formulación rigurosa. Por esta razón se considera normalmente a Cauchy como el fundador del cálculo diferencial exacto en el sentido moderno*».

Este *Curso* puede considerarse como la primera piedra del proceso que se ha dado en llamar «aritmetización del análisis», en él éste terminaría por asentarse finalmente sobre bases rigurosas, definiéndose las nociones fundamentales del cálculo en términos de desigualdades con números reales, los cuales serían a su vez construidos a partir de los racionales (y éstos de los naturales). Hablando del *Curso* dice F. Klein que

> «*...proporciona un fundamento aritmético, libre de objeciones en todos los puntos críticos; aquí empieza, a partir de esta obra fundamental, la llamada "aritmetización" de toda la matemática*».

Cauchy explicita sus intenciones en la introducción. Citemos, una vez más, un texto que lo ha sido otras muchas

> *En cuanto a los métodos, he intentado darles todo el rigor que se exige en geometría, de manera que no haya que recurrir nunca a razones tomadas de la generalidad del álgebra. Las razones de esta especie, aunque bastante comúnmente admitidas, sobre todo en el paso de las series convergentes a las series*

divergentes, y de las cantidades reales a las expresiones imaginarias, sólo pueden ser consideradas, me parece, como inducciones propias para hacer presentir algunas veces la verdad, pero que no van muy de acuerdo con la exactitud tan ponderada de las ciencias matemáticas. Incluso hay que observar que tienden a atribuir a las fórmulas algebraicas una extensión indefinida, mientras que, en la realidad, la mayoría de estas fórmulas subsisten únicamente en ciertas condiciones, y para algunos valores de las cantidades que aparecen en ellas. Determinando estas condiciones y estos valores, y fijando de una manera precisa el sentido de las notaciones y su uso, hago desaparecer toda incerteza; y entonces las diferentes fórmulas sólo presentan relaciones entre cantidades reales, relaciones que siempre es fácil verificar mediante la sustitución de las cantidades mismas por números. Es cierto que para ser constantemente fiel a estos principios me he visto forzado a admitir varias proposiciones que tal vez parezcan un poco duras a primera vista. Por ejemplo, enuncio en el Capítulo VI que una serie divergente no tiene suma... Pero los que lean mi obra reconocerán, espero, que las proposiciones de esta naturaleza, que conllevan la necesidad agradable de poner más precisión en las teorías, y de aportar restricciones útiles a afirmaciones demasiado extensas, son provechosas para análisis, y proporcionan temas de investigación que no carecen de interés. Así, antes de sumar una serie, he debido examinar cuándo puede sumarse una serie...»

Este rigor ya fue apreciado en su momento. N. H. Abel (1801-1829), quien no fue demasiado bien tratado por Cauchy, consideraba que su curso es «*una obra excelente, una que debe ser leída por todos los analistas que amen el rigor matemático*».

Cauchy afirmó en alguna ocasión que los métodos de los griegos eran un modelo de rigor matemático, pero sus técnicas tienen menos que ver con el método exhaustivo de aquellos –que había sido traducido en algunos argumentos de paso al límite del siglo XVIII, por ejemplo de L'Huiller– que con el manejo de desigualdades algebraicas más refinadas de Lagrange. Pero Cauchy desconfiaba, como acabamos de ver, de las interpretaciones automáticas de expresiones simbólicas: para que sea válida una relación entre series, éstas han de ser convergentes.

Cauchy parece haber visto que la vaga noción de límite del siglo XVIII podía ser entendida en términos de desigualdades, y que una vez hecho esto era posible basar el cálculo sobre la noción de límite, reduciendo a ella los resultados relativos a funciones continuas, series, derivadas, etc. Grabiner sugiere que la apreciación de lo primero parece haber sido el resultado de un proceso gradual a partir de la consideración de problemas concretos como integrales definidas, aproximaciones, series, y que hasta que comenzó a enseñar en la Politécnica no se ocupó de cuestiones de rigor en términos generales.

Una cosa son, sin embargo, las declaraciones de principios y otra, a veces bien distinta, la manera de aplicarlas –o de no hacerlo– en cada caso concreto. Se ha escrito mucha historia de la matemática usando sólo las primeras y olvidando lo segundo. En lo que sigue vamos a ver con un poco de detalle la aplicación por Cauchy de sus principios. Consideramos, por comodidad, distintos apartados:

I) Noción de función: la idea de función de Cauchy difiere bien poco de la de muchos de sus contemporáneos. En el *Curso* se dice

> «*Cuando las cantidades variables están ligadas entre ellas de tal manera que, dado el valor de una de ellas, es posible concluir el valor de todas las demás, estas distintas cantidades son en general concebidas como expresadas por medio de una ellas, que toma entonces el nombre de variable independiente; y las otras cantidades expresadas mediante la variable independiente son lo que se llama funciones de esa variable*».

II) Límite: en el *Curso*, Cauchy da la siguiente definición de límite

> «*Cuando los valores que va tomando sucesivamente una variable particular se aproximan indefinidamente a un valor fijo de tal manera que acaban por diferir de él tan poco como queramos, entonces este último valor recibe el nombre de límite de todos los anteriores*».

A partir de aquí Cauchy da a continuación su definición de infinitésimo

> «*Decimos que una cantidad variable se hace infinitamente pequeña cuando su valor numérico disminuye indefinidamente hasta converger al límite cero*».

Cauchy desarrolló los límites y sus propiedades más que todos los matemáticos anteriores, a muchos de los cuales supera en la precisión de la definición; nótese, sin embargo que no es nuestra definición expresada en términos de ε y δ (véase más abajo). La definición elimina alguna de las restricciones innecesarias de las anteriores –en el sentido de que la variable no debía «superar» el límite, por ejemplo– pero eso ya lo habían hecho otros matemáticos, como Lacroix. Por otra parte, esta definición plantea algunos problemas sobre el papel de los infinitamente pequeños en el análisis de Cauchy, problemas que han dado lugar a largas discusiones entre los historiadores y sobre los que volveremos un poco después.

III) Continuidad: la definición de la continuidad, y el uso de que hace de dicha noción, son uno de los grandes avances de Cauchy. (La misma definición había sido dada por Bolzano en 1817). Reproducimos la definición dada en el **Curso**

> «*sea f una función de la variable x, y supongamos que, para cada valor de x intermedio entre dos límites dados, esta función admite constantemente un valor único y finito. Si, partiendo de un valor de x comprendido entre esos límites, se atribuye a la variable x un valor infinitamente pequeño α la función misma tendrá por incremento la diferencia $f(x + \alpha) - f(x)$ que dependerá al mismo tiempo de la nueva variable y del valor de x. Dicho esto, la función f(x) será, entre los dos límites asignados a la variable x, función continua de esa variable, si, para cada valor de x intermedio entre esos límites, el valor numérico [valor absoluto] de $f(x + \alpha) - f(x)$ decrece indefinidamente con el de α.* En otros términos, la función f(x) será continua con respecto a x entre los límites dados si, entre esos límites, un incremento infinitamente pequeño de la variable produce siempre un incremento infinitamente pequeño de la función misma.
>
> «*Se dice también que la función f(x) es, en el entorno de un valor particular atribuido a la variable x, función continua de esa variable, siempre que es continua entre dos límites de x, incluso muy próximos, entre los cuales está la variable de que se trata.*»

Esta definición, o definiciones, presentan varias diferencias con respecto a las nuestras. En primer lugar, tampoco está expresada en términos de «para todo $\varepsilon > 0$ ...». En segundo, se trata de una definición de continuidad **global** (en un intervalo), expresada de dos maneras aparentemente equivalentes, seguida de una definición de continuidad en un entorno de un punto. Nótese que Cauchy no da una definición de continuidad en un punto, cosa que tampoco hizo en ningún otro lugar de su obra. La interpretación de esta definición ha dado lugar a discusiones, en buena parte a propósito de algunos de los «errores de Cauchy» de que hablaremos más abajo. Un poco más tarde, Ampére da una definición de continuidad casi en los mismos términos, pero que parece coincidir más bien con lo que hoy llamamos continuidad uniforme.

IV) Convergencia de series numéricas: según la cita anterior de la introducción, las series divergentes no tienen suma y no deben usarse, lo que hace pensar que aquí también será Cauchy más preciso que sus predecesores. Si tenemos la serie

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

cuyas sumas parciales serán $s_n = u_1 + \dots + u_n$, Cauchy define la convergencia de la serie diciendo que «*si, para valores siempre crecientes de n, la suma parcial n-ésima se va acercando indefinidamente a un cierto valor límite s, entonces la serie se llamará convergente, y el límite en cuestión recibirá el nombre de suma de la serie. Por otra parte, si la suma s_n no se aproxima a ningún límite fijo cuando n crece indefinidamente, la serie se llamará divergente y no tendrá suma*».

Da el criterio de convergencia que hoy se llama de Cauchy o de Bolzano-Cauchy: para que una serie sea convergente «*es necesario y suficiente que para valores infinitamente grandes del número n, las sumas s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, etc., difieran del límite s, y en consecuencia entre sí, en cantidades infinitamente pequeñas*». Este criterio, del todo novedoso, no hace intervenir la suma s de la serie, que no es necesario conocer. Cauchy demuestra fácilmente que la condición es necesaria y, a falta de un dominio de la estructura de los reales que aún se haría esperar, no puede probar la suficiencia.

También dio la condición necesaria, pero no suficiente, de que el término general u_n tienda a cero, así como diversos criterios de convergencia (de la raíz, del cociente, del logaritmo, etc.) para series de términos positivos.

V) Convergencia de series de funciones: Cauchy se ocupó también de la convergencia de series de funciones, y la motivación para ello fue en buena parte su interés por la convergencia de la serie binómica. Aquí encontramos el más famoso de sus «errores», que presentaremos con algún cuidado.

En el *Curso* se encuentra el siguiente teorema

Teorema I. **Cuando los diferentes términos de la serie son funciones de una misma variable x, continuos con respecto a esta variable en un entorno de un valor particular para el que la serie es convergente, la suma s de la serie es también, en el entorno de ese valor particular, función continua de x.**

Así enunciado, el teorema es hoy, para nosotros falso. Pero ya en su momento dio lugar a dificultades: en 1826 Abel señaló el ejemplo de una serie de Fourier que tendería hacia una función discontinua y dijo que «*el teorema admite excepciones*», pero sin indicar el error cometido por Cauchy en su demostración.

La historia puede resumirse (mucho) como sigue: en 1829 un matemático alemán, Dirksen, señala la dificultad y una posible salida; en 1847 Stokes muestra que una serie de Fourier tiene una convergencia «infinitamente lenta» en un entorno de un punto de discontinuidad de la función; en 1848 un antiguo alumno de Dirichlet, Seidel demuestra el mismo resultado de Stokes, pero además critica explícitamente el teorema de Cauchy como equivocado; también un matemático sueco, E. G. Björling hizo críticas a Cauchy. Finalmente Cauchy, que no había contestado a ninguna crítica y había reproducido en 1833 el teorema y su demostración sin cambiar ni una coma, publica en 1853 una nota en las *Comptes Rendus* en la que tras comenzar diciendo que:

> «*Como han señalado los señores Bouquet y Briot, este teorema se verifica para las series ordenadas según las potencias ascendentes de una variable. Pero no puede ser admitido sin restricciones para otras series*»,

Mostrando un cierto fastidio, da una demostración nueva que ha sido interpretada tradicionalmente en el sentido de que Cauchy incorpora la condición adicional de que la convergencia de la serie ha de ser uniforme.

De hecho, este episodio ha sido analizado por muchos historiadores y se han ofrecido diversas explicaciones del «error» de Cauchy, muchas de las cuales van en la línea que se acaba de indicar; de entre estas últimas la más elaborada es tal vez la de Bourbaki,

> «*Cauchy, por ejemplo, creyó por un instante que una serie convergente cuyos términos son funciones continuas de una*

variable tiene como suma una función continua: la rectificación de este punto por Abel en el curso de sus importantes trabajos sobre series ...dió lugar finalmente a la elucidación por Weierstrass en sus cursos (inéditos, pero que tuvieron una influencia considerable) de la noción de convergencia uniforme»,

análisis completado en otro lugar diciendo que

«*Sin embargo, la noción de convergencia de una sucesión de funciones reales era utilizada de manera más o menos consciente desde los comienzos del cálculo infinitesimal.*

Pero se trataba de la convergencia puntual, y no podía ser de otro modo antes de que las nociones de serie convergente y de función continua hubieran sido definidas con precisión por Bolzano y Cauchy. Este último no se dio cuenta al principio de la distinción entre convergencia puntual y convergencia uniforme, y creyó poder demostrar que toda serie convergente de funciones continuas tiene como suma una función continua ...el error fue señalado inmediatamente por Abel, que probó al mismo tiempo que toda serie entera es continua en el interior de su intervalo de convergencia mediante el razonamiento que se ha hecho clásico y que utiliza esencialmente, en este caso particular, la idea de la convergencia uniforme... Sólo faltaba formular esta última de modo general, lo que fue hecho independientemente por Stokes y Seidel en 1847-1848 y por el propio Cauchy en 1853...».

No todas las versiones coinciden con la anterior, y aun dejando de lado las de aquellos que, como I. Lakatos afirman que el teorema es correcto dentro del marco del análisis no standard de A. Robinson, puede citarse a E. Giusti, quien ha defendido hace poco, con argumentos muy razonables, que para Cauchy todo, continuidad y convergencia, era uniforme, y el teorema correcto. Otros, como Grattan-Guinness y Bottazzini (en su reciente introducción a la reedición del *Curso*) han hablado de lo «*intrínsecamente vago*» de la formulación de Cauchy y de lo difícil o imposible de dilucidar la cuestión.

Dificultades semejantes ligadas a la convergencia uniforme se presentaban también en otros lugares, por ejemplo en la integración término a término de una serie convergente de funciones.

VI) Teorema del valor intermedio: se trata del teorema que afirma que una función continua en el intervalo [a , b] y tal que $f(a) < 0 < f(b)$ se anula en algún punto. El teorema fue demostrado igualmente por Bolzano. La demostración de Cauchy utiliza ideas, tomadas muy probablemente de Lagrange, sobre la aproximación de raíces de ecuaciones de la forma $f(x) = 0$, convirtiendo un método de aproximación en una manera de demostrar un resultado de **existencia** construyendo la solución. (Una idea semejante se usa en la teoría de ecuaciones diferenciales). La demostración presenta la misma dificultad que la suficiencia del criterio de convergencia de series a la hora de demostrar la convergencia de la sucesión obtenida.

VII) Derivadas: Cauchy (y Bolzano) definen la derivada como límite del cociente de incrementos, es decir, como hoy, pero además Cauchy explota esta idea a la hora de demostrar teoremas del análisis. Cauchy desconfiaba de los desarrollos en serie de Lagrange usando la fórmula de Taylor, quizá en parte por haber encontrado en 1822 el ejemplo de la función $\exp(-1/x^2)$ cuyas derivadas en el origen son todas nulas sin serlo la función. Cauchy da una demostración del teorema del valor medio del cálculo diferencial en la que usa el teorema del valor intermedio antes mencionado, y en la que de nuevo hay dificultades ligadas a la uniformidad.

El cálculo diferencial de Cauchy es más riguroso que todo lo anterior, aunque sin embargo, al querer actuar «**reconciliando el rigor de las demostraciones con la sencillez de los métodos**» y seguir hablando de infinitésimos pueda parecer menos riguroso de lo que es en realidad.

VIII) Integrales: la noción de integral definida es presentada de un modo muy cercano al nuestro. Si $f: [a,b] \rightarrow \mathfrak{R}$ es una función continua y se subdivide el intervalo a, b mediante puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$, la integral será el límite de las sumas

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,(x_i - x_{i-1})$$

donde c_i es un punto del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, cuando la longitud del mayor de estos subintervalos tiende a cero. Cauchy prueba la existencia de este límite pero, una vez más la prueba no es satisfactoria al ser necesario mostrar que una función continua en un intervalo cerrado es uniformemente continua en él.

También define la función

$$F(x) = \int_a^x f(s)\,ds$$

y da la primera demostración del teorema fundamental del cálculo integral $F'(x) = f(x)$ usando, una vez más, el teorema del valor medio.

Cauchy extendió ligeramente su noción de integral de forma que podía tratar algunas funciones discontinuas e integrales impropias. Como antecedentes es posible citar la posible influencia de las concepciones geométricas de Fourier y los métodos de Euler para calcular aproximadamente integrales mediante sumas.

IX) Números complejos y funciones de variable compleja: aunque Gauss había llegado a algunas de las ideas fundamentales, Cauchy debe ser considerado como el creador de la teoría de funciones de variable compleja, a la que ha aportado muchos teoremas, entre ellos el famoso «teorema de Cauchy» sobre la integral de una función analítica sobre una curva cerrada.

Cauchy se preocupó más que nadie antes de él sobre el **status** de los números complejos, que primero consideró como «expresiones simbólicas» de la forma $a+b\sqrt{-1}$, punto de vista que después cambió. De hecho, las dificultades para la interpretación geométrica de los complejos fueron un inconveniente a la hora de dar versiones más satisfactorias de su teorema.

X) Convergencia de las series de Fourier: en 1826 hizó un intento de demostrar la convergencia de las series de Fourier. La demostración utilizaba funciones de variable compleja, y no era correcta porque usaba una integración de una serie término a término y posterior reordenamiento de la serie, para cuya justificación sería necesaria precisamente la convergencia uniforme de la serie.

Más arriba hemos mencionado varias veces a Bernhard Bolzano (1781-1848), quien llegó igualmente a algunas de las definiciones y resultados más importantes de Cauchy; por cierto que se ha acusado en alguna ocasión a Cauchy de plagio por ello, aunque sin probar tal plagio. Las coincidencias entre ambos son sin duda notables, pero los antecedentes, sobre todo Lagrange, podrían bastar para explicarlas. Bolzano tuvo siempre un gran interés por el rigor, en declaraciones como los frecuentes «*sin ninguna suposición no probada rigurosamente*», y el cuidado en las definiciones y pruebas. Su definición de continuidad

> *«Una función es continua para todos los valores de x dentro o fuera de ciertos límites si, siendo x uno cualquiera de esos valores, la diferencia f(x + a) - f(x) puede hacerse más pequeña que cualquier magnitud dada si se toma a arbitrariamente pequeño»*,

es incluso más precisa que la de Cauchy. Por cierto que la coincidencia lo es también en las dificultades encontradas a la hora de tratar con los números reales; igualmente, Bolzano estuvo a punto de cometer la misma equivocación que Cauchy sobre la continuidad de la función suma de una serie de funciones continuas.

Sin embargo, la posición de Bolzano ante las matemáticas era muy distinta de la de Cauchy, y mucho más orientada hacia los fundamentos. A él se debe un ejemplo de función continua sin derivada en ningún punto muy anterior al de Weierstrass, así como nociones como la de extremo superior de un conjunto de números reales. Y, sobre todo, era distinta en la medida en que permaneció aislado en Bohemia y sus escritos –los pocos publicados y los muchos inéditos– fueron conocidos con mucho retraso.

En lo anterior hemos resumido la aportación de Cauchy a la rigorización del análisis matemático, con sus grandes virtudes y sus pequeñas insuficiencias. Pero Cauchy, además de introducir rigor en el análisis, quería **hacer** matemáticas. Como ha dicho excelentemente Freudenthal, en su biografía científica de Cauchy

> *«Lo extraño es que en sus artículos de investigación Cauchy nunca se atuvo a los criterios de rigor que había enunciado en su Cours d'Analyse. Aunque había dado una definición de continuidad, nunca probó formalmente la continuidad de una función concreta. Aunque había insistido en la importancia de la convergencia, operaba con series, con transformadas de Fourier y con integrales impropias y múltiples como si nunca hubiera planteado problemas de rigor. A pesar de la importancia que había dado al origen del límite en el cociente de incremento, desarrolló también un tratamiento formal de las ecuaciones diferenciales como el de Lagrange. Admitía series semiconvergentes y reordenamientos de series condicionalmente convergentes si le eran útiles. Restringía formalmente las funciones complejas con varios valores, como log x , $\sqrt{X}$ etc., al semiplano superior, pero si podría usarlas en el semiplano inferior olvidaba fácilmente su*

prescripción. Cauchy parece contradecirse, pero era sencillamente un oportunista en matemáticas, a pesar su dogmatismo en asuntos religiosos y políticos. Podía cultivar este oportunismo ya que, con la base de una amplia experiencia, tenía una intuición segura de qué era cierto, aunque no estuviera formulando o probado de acuerdo con los criterios del Cours d'Analyse».

4. INTEGRALES Y SERIES DE FOURIER: DIRICHLET Y RIEMANN

Hemos hablado antes del inútil intento de Cauchy de demostrar la convergencia de la serie de Fourier de una función. P. Lejeune-Dirichlet (1805-1859), quien había tratado a Fourier durante una larga estancia en París, y que conocía la obra de Cauchy, fue el primero en dar condiciones suficientes para la convergencia de la serie de Fourier de una función hacia la función, y en demostrar rigurosamente el resultado. De hecho, su prueba estaba inspirada por un intento del propio Fourier, y formulaba de manera rigurosa las intuiciones geométricas de éste, lo que requería un cuidado considerable y la introducción de una serie de técnicas cuya vigencia ha llegado a nuestros días, y que hacen de ella, como afirma Grattan-Guinness, «*una de las demostraciones más importantes de la historia de esta materia*». Las hipótesis de Dirichlet son que la función $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \Re$ es acotada, continua «a trozos» (es decir, tiene sólo un número finito de discontinuidades de salto) y sólo posee un número finito de máximos y mínimos. Dirichlet probó que la serie de Fourier de f convergía hacia $1/2\,(f(x^+) + f(x^-)$, donde $f(x^+)$ (resp. $f(x^-)$) representa el límite por la derecha (resp. por la izquierda) de f en el punto x, expresión que se reduce a f(x) cuando f es continua en x. La prueba usa identidades trigonométricas distintas de las usadas por Poisson y un estudio fino de la llamada integral de Dirichlet

$$f(x) = \int_0^a dx\, \frac{sen\, mx}{sen\, x} \quad a, m > 0\,,$$

cuando m tiende a infinito. Como dice Grattan-Guinness, es un tratamiento geométrico como el de Poisson hecho en el estilo de Cauchy (pero bien). En un artículo posterior (de 1837), Dirichlet extendió algo estas condiciones.

Estos resultados planteaban el problema de encontrar condiciones suficientes más generales, y la consideración de funciones con una infinidad de discontinuidades y de máximos y mínimos, pudiendo ser estas discontinuidades de tipo infinito (es decir, que la función tenga límites laterales infinitos). Al final de su artículo de 1829 habla Dirichlet de una función

> *«f(x) es igual a una constante determinada o cuando la variable toma un valor racional e igual a otra constante de cuando el valor de esta variable es irracional. La función así definida tiene valores finitos y determinados para todo valor de x, y sin embargo no es posible sustituirla en la serie [de Fourier], visto que las diferentes integrales que aparecen en dicha serie pierden todo su significado en este caso»,*

y en otro de 1837 habla de un concepto muy general de función, no ligado a ninguna expresión analítica concreta.

Otra contribución importante de Dirichlet en el dominio del análisis fue una nueva demostración de un teorema de Abel sobre series de potencias mucho más precisa que la original: esta demostración usa de nuevo ideas de Cauchy, pero con manejo mucho más riguroso de los límites dobles, justamente uno de los puntos débiles de Cauchy.

Dirichlet mantuvo un completo silencio sobre la aparente incompatibilidad entre su teorema de convergencia para las series de Fourier y el de Cauchy de la continuidad de la función suma de la serie de funciones continuas. Cabe, sin duda, especular sobre las posibles razones, tal vez meramente diplomáticas, de ese silencio, extendido al trabajo de su discípulo Seidel, antes citado, en el que se criticaba explícitamente a Cauchy.

En 1837 dio una definición de función continua más precisa que la de Cauchy, pero que se ha prestado también a discusión, en parte por haber sido reproducida a partir de un manuscrito de su alumno Meyer, y no de uno original: una función $f(x)$ es continua si para ε tendiendo a 0 la diferencia $f(x + \varepsilon) - f(x)$ tiende también a 0, y a continuación añade la «segunda» definición de Cauchy a modo de explicación. Después incluye un «teorema importante» que, en lenguaje de hoy, viene a decir que una función continua en un intervalo cerrado es uniformemente continua en él, resultado sin duda relacionado con su intento de dar una definición de integral definida para funciones continuas sin caer en el error de Cauchy.

Dentro de la teoría de series, Dirichlet demostró que es posible reordenar los términos de una serie absolutamente convergente sin cambiar la suma de la serie. También demostró que es posible reordenar cualquier serie condicionalmente convergente de manera que cambie la suma.

Los trabajos de Dirichlet tuvieron una continuación natural en los de su discípulo Bernhard Riemann (1826-1866), en cuyo trabajo de «habilitación» de 1854, que permaneció inédito hasta su muerte, aun cuando *«podemos admitir que las funciones a las que no se aplican las investigaciones de Dirichlet no se presentan en la naturaleza»*, estudia la extensión a ellas de los resultados conocidos, para lo que empieza precisando y extendiendo la noción de integral definida de Cauchy a lo que hoy se llama universalmente integral de Riemann. La integral se define para una función acotada, pero no necesariamente continua, como límite de las sumas arriba definidas, y se dice que la función es integrable –en el sentido de Riemann– cuando el límite existe. Riemann encontró condiciones necesarias y suficientes para la integrabilidad de una función en términos de la oscilación de la función y mostró que se trataba de una extensión efectiva de la integral de Cauchy; Riemann podía permitir un conjunto finito, y hasta infinito, de discontinuidades de la función f. Con este motivo dio un ejemplo notable de una función discontinua en infinitos puntos racionales de tal modo que poseía infinitas discontinuidades en cualquier intervalo, que no era integrable en el sentido de Cauchy y que sí lo era en el nuevo.

Riemann dio también un ejemplo de función continua sin derivada en ningún punto

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} \operatorname{sen} a^{n} x$$

con $a > 0$ entero «grande», que no fue publicado hasta 1890.

Demostró igualmente resultados importantes sobre la convergencia de las series de Fourier y cuestiones vecinas, ocupándose en particular de los casos «patológicos» no tratados por Dirichlet; por ejemplo, mostró la existencia de funciones integrales no representables en serie de Fourier. Todos estos trabajos dieron lugar a los estudios sobre la unicidad del desarrollo en serie de Fourier de una función, al que contribuyó Cantor, y al desarrollo de la teoría de funciones de variable real: por citar un sólo ejemplo, du Bois-Reymond dio un ejemplo de una función continua cuya serie de Fourier no era convergente en los puntos de un conjunto denso.

Riemann demostró igualmente que es posible reordenar una serie condicionalmente convergente de modo que la suma resulte ser cualquier número dado de antemano.

En 1851 Riemann presentó en Göttingen su disertación *Grundlagen fur eine allgemeine Theorie der Funktionen einer verandeslichen complexen Grosse (Fundamentos de una teoría general de funciones de una magnitud compleja variable),* que según L. Ahlfors es uno de los artículos que más han influido en el desarrollo de la matemática: *«Contiene en germen la mayor parte de la teoría de las funciones analíticas, ha originado el estudio sistemático de la topología, ha revolucionado la geo-*

metría algebraica y abierto el camino a la obra del propio Riemann en geometría diferencial».

Riemann aborda el estudio de las funciones de variable compleja haciendo intervenir las llamadas condiciones de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y \qquad u_y = -v_x$$

para las partes real e imaginaria de la función $w = u + iv$ de la variable compleja $z = x + iy$. Estas condiciones, ya conocidas por Euler y D'Alembert, fueron encontradas por Gauss en un trabajo de geometría diferencial, y también por Cauchy. (Señalemos la circunstancia, no demasiado conocida, de que la importancia que Riemann dio a estas ecuaciones tuvo mucho que ver con la capacidad de Euler de obtener resultados correctos operando con series divergentes).

De las condiciones de Cauchy y Riemann se deduce inmediatamente $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$, y análogamente $\Delta v = 0$, es decir, las funciones u y v son armónicas. De este modo se pone de manifiesto la relación con las ecuaciones en derivadas parciales y con la teoría del potencial en dos dimensiones, y con el llamado, por el propio Riemann, principio de Dirichlet, que asegura la existencia de una función que hace mínimo un cierto funcional y que toma un valor dado en el borde del dominio.

5. LOS NÚMEROS REALES Y COMPLEJOS

Como ya se anticipó, hasta 1870 no se da una presentación del todo satisfactoria para nuestros criterios, se entiende –de los números reales,– en el sentido de una definición precisa de dichos números a partir de la cual sea posible dar cuenta de todas sus propiedades y de las de las operaciones habituales (suma y multiplicación) con ellos.

Y, en un fenómeno frecuente en la historia de la matemática, no surge una sola, sino cuatro o cinco, en cierto modo equivalentes pero distintas en muchos aspectos. Bastante antes, en 1837, Hamilton había dado una presentación de los números complejos como pares de números reales, pares ordenados entre los que definía las operaciones de suma y multiplicación probando sus propiedades; una vez más, Gauss había tenido antes la misma idea. De este modo, los números complejos quedaban fundados a partir de los reales.

Cabe preguntarse, en primer lugar, por la razón de esta multiplicidad. Había, desde luego, motivos para ello, pero ese **precipitado** solicita una explicación precisa. Se ha indicado ya alguno de los motivos: la necesidad de un mayor conocimiento de la «estructura fina» de los reales se había echado en falta en varias situaciones, como en la prueba de la suficiencia del criterio de convergencia de Cauchy-Bolzano, y en la demostración del teorema del valor intermedio. Algo parecido sucedió en el estudio de la convergencia de las series de Fourier por Dirichlet. A lo anterior puede añadirse el trabajo de Liouville sobre aproximación de números irracionales en relación con su hallazgo de números reales trascendentes –es decir, que no son raíz de ningún polinomio con coeficientes enteros–, a los que seguirá años después la demostración de la trascendencia de e y π.

Las presentaciones de que vamos a ocuparnos tienen un precedente notorio: la teoría de proporciones contenida en el libro V de los *Elementos* de Euclides, teoría debida a Eudoxo. Dejando de lado el problema de cual sea su relación con lo que sigue, digamos que diez años después de que en 1859 Weierstrass aceptara la necesidad de una teoría de los irracionales, en 1869 C. Méray (1835-1911) hizo una construcción de los irracionales a partir de los racionales a la que siguió la de Cantor, a la que siguió la de Heine, y la de Dedekind. La de Cantor estaba estrechamente ligada a sus trabajos sobre series de Fourier.

Estas teorías son bastante semejantes. En la de Cantor los números reales se construyen a partir de los racionales, definiendo como sucesiones fundamentales de números racionales (a_n) aquellas tales que

$$\lim_{m,n \to \infty} |a_n - a_m| = 0$$

y diciendo que dos de ellas (a_n) y (b_n) son equivalentes si

$$\lim_{n \to \infty} |a_n - b_n| = 0$$

Las clases determinadas por esta relación de equivalencia son los números reales. A partir de aquí es posible mostrar que los reales forman un cuerpo con las propiedades conocidas, y en particular la de ser **completo**, es decir, que toda sucesión fundamental tiene límite. De este modo el número real se «identifica» con el límite de las sucesiones de racionales que tienden a él.

La teoría de Dedekind, presentada en el opúsculo *Continuidad y números irracionales,* de 1872, es algo diferente. Dedekind introduce las **cortaduras,** es decir, divisiones de los racionales en dos clases tales que todo miembro de una es menor que todo miembro de la otra: de este modo no sólo aparecerían cortaduras determinadas por números raciones, sino también otras que lo eran por irracionales.

La idea subyacente en la definición de sucesión fundamental ya había aparecido en Lagrange, hecho poco conocido que señala Bottazzini en su introducción al curso de Cauchy. Años después, la dificultad en que habían tropezado Bolzano y Cauchy se convierte en una definición de número irracional y en la fuente de sus propiedades.

6. EL RIGOR DE WEIERSTRASS

Karl Weierstrass (1815-1897) es el nombre que suele asociarse con la culminación del rigor en análisis matemático en general, y en el de teoría de funciones reales y complejas en particular. Weierstrass ejerció una influencia muy grande sobre la matemática de la época desde su cátedra de la Universidad de Berlín, a la que llegó después de ser profesor de Instituto. Esta influencia tuvo lugar muchas veces más a través de sus lecciones que de sus escritos, ya que con frecuencia publicaba sus resultados muchos años después de obtenerlos y hacerlos públicos, y algunos hubieron de esperar a la publicación de sus *Obras completas* en los últimos años de su vida.

Weierstrass sometió a dura crítica mucho de lo hecho antes que él, y proporcionó contra ejemplos importantes que han quedado en la historia de las matemáticas. El más conocido es seguramente el de una función continua en un intervalo sin derivada en ninguno de sus puntos, dado en 1872. Se trata de la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$$

donde a es un entero impar, $0 < b < 1$, y $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$

La serie es uniformemente convergente y por tanto la función es continua. De este modo quedaba claro que no era cierta la idea «*aceptada hasta tiempos recientes*» de que una función continua era derivable (salvo en un número finito de puntos), opinión que parecía ser aceptada por Gauss, Cauchy y Dirichlet, quienes «*han ejercido la crítica más rigurosa en todos los campos de la matemática*». Sólo Riemann, decía Weierstrass no estaba de acuerdo con tal afirmación, y daba como ejemplo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n^2 x)}{n^2}$$

Weierstrass dudaba de que la intuición de Riemann fuera correcta –y tenía razón, pero hubo que esperar hasta 1970 para demostrarlo– y proponía otro ejemplo, que por cierto estaba sugerido por la teoría de funciones de variable compleja, cosa poco conocida.

Otro contraejemplo importante, e influyente sobre la matemática de su tiempo, fue el presentado en 1870 a la Academia de Berlín a propósito del principio de Dirichlet.

Si se considera el funcional

$$J(u) = \int_{-1}^{1} (xu'(x))^2 \, dx$$

y se quiere hallar su mínimo para las funciones u continuas y con derivada continua en [-1,1], y tales que

$$u(-1)=a \neq u(1)=b$$

resulta que el extremo inferior de los valores de J es cero, mientras que si v es una función para la que se alcanza dicho extremo, entonces v ha de ser constante, lo que es imposible. De este modo no sólo se mostraba la importancia de la distinción entre extremo inferior y mínimo (extremo inferior que se alcanza), ya señalada por Bolzano, sino que se resaltaba la importancia del rigor en aspectos **internos** propios de la actividad matemática. Por cierto que, según F. Klein, «*Weierstrass me contó una vez que Riemann no había atribuido en absoluto importancia al hecho de haber obtenido sus teoremas de existencia mediante el «Principio de Dirichlet». Por eso tampoco le hizo impresión la crítica de Weierstrass al «Principio de Dirichlet*». La historia de la justificación rigurosa del principio de Dirichlet es larga y tortuosa, y tiene que ver con partes importantes del análisis.

A Weierstrass se debe la formulación precisa que hoy manejamos de las nociones fundamentales del cálculo, llevada acabo a partir del período 1841-1856. Descontento con expresiones como «la variable tiende a su límite», presenta las definiciones de límite y continuidad en términos de ε y δ, como se dice ahora: para todo $\varepsilon > 0$, existe un ... También prueba algunos teoremas que no habían tenido demostración rigurosa, como el hoy llamado de Bolzano-Weierstrass según el cual una función continua en un intervalo cerrado alcanza su máximo y su mínimo en él. (Weierstrass conoció algunos de los escritos de Bolzano, por quien mostró respeto). Y a él se debe también el haber dado su puesto en el análisis a la distinción entre continuidad y continuidad uniforme, que había escapado a Cauchy lo que, para Freudenthal, fue su mayor fallo.

Se ha dicho que Weierstrass estaba ya en posesión de la noción de convergencia uniforme en 1842, heredándola en cierto sentido de su maestro Gudermann, pero los testimonios escritos son muy posteriores. De este modo quedaría dilucidado el problema planteado por el teorema de Cauchy de la continuidad de la suma de una serie de funciones continuas. Pero además, está fuera de duda la superioridad de Weierstrass a la hora de explotar sistemáticamente esta noción, obteniendo resultados rigurosos sobre la integración término a término de series, derivación bajo el signo integral, etc. Recordemos que también dio una presentación rigurosa de los reales.

Hizo igualmente contribuciones importantes a la teoría de funciones analíticas de variable compleja. A diferencia de la Riemann, la presentación de Weierstrass se basa fundamentalmente en las series de potencias, instrumento empleado con maestría extraordinaria, su convergencia uniforme, y la denominada prolongación analítica. La convergencia uniforme tiene también aquí un papel básico, de nuevo a propósito de integrar o derivar series término a término. De este modo se hace, contrariamente, a Riemann, un estudio **local** de las funciones que después la prolongación analítica permite extender y convertir en **global.** En cierto modo, el uso **formal** de las series por Lagrange acaba por hacerse riguroso del todo con Weierstrass y sus argumentos «ε - δ», de los que ya Cauchy había dado alguna muestra aislada en su **Curso.**

En cuanto a las series divergentes, condenadas por Cauchy y Abel, fueron considerablemente abandonadas hasta el teorema de sumabilidad de Frobenius de 1880, que generalizaba un teorema de Lagrange y Bossut de 1799. Sumabilidad debe entenderse aquí como forma de dar un sentido preciso a alguna noción generalizada de suma de una serie que coincida con los resultados conocidos y que se reduzca a la suma habitual en el caso de las series convergentes.

Años después (1949), Hardy, en un famoso tratado, diría que

> «*...aquí, como en otros lugares, Euler estaba esencialmente en lo cierto. Los rompecabezas de la época con las series divergentes vienen sobre todo, no de ningún misterio de las series divergentes en sí mismas, sino de la falta de interés por dar definiciones formales y de lo inadecuado de la teoría de funciones del momento. Es imposible enunciar adecuadamente el principio de Euler sin tener ideas claras sobre las funciones de variable compleja y la prolongación analítica*».

COMENTARIOS BIBLIOGRÁFICOS

Es posible encontrar mucha más información sobre estas cuestiones en historias generales de la matemática como

- C. B. BOYER: *Historia de la matemática.* Madrid, Alianza, 1986.
- M. KLINE: *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días,* 3 volúmenes. Madrid, Alianza, 1992.
- U. BOTTAZZINI: *I flauto di Hilbert. Storia de la matematica moderna e contemporanea.* Turín, UTET, 1990.

así como en libros mas específicos

- I. GRATTAN-GUINNESS (comp.): *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica.* Madrid, Alianza, 1984.
- J. V. GRABINER: *The origins of Cauchy's rigorous calculus.* The M.I.T. Press, 1981.

En particular el capítulo 40 de la historia de Kline y el capítulo 3 del libro de GRATTAN-GUINNESS cubren aproximadamente el material de esta conferencia. El libro de GRABINER es un estudio detallado de los antecedentes de Cauchy, y dedica especial atención a Lagrange. Sobre Cauchy puede verse también la larga introducción escrita por U. BOTTAZZINI para la reedición del curso de Cauchy

- A. L. CAUCHY: *Cours d'Analyse*. Bolonia, Clueb, 1990.

También puede verse la biografía científica de Cauchy siguiente

- H. FREUDENTHAL: Cauchy. En *Dictionary of scientific biography,* vol 3. Nueva York, Scribner's, 1971, pp. 131-148