LA MATEMÁTICA ALEMANA EN LA CULTURA DEL SIGLO XIX

JOSÉ L. MONTESINOS SIRERA
I.B. Villalba Hervás

«Todo concepto de Dios es vana palabrería.
Pero la idea de Dios es la idea de todas las ideas»
Fr. Schlegel

INTRODUCCIÓN

Alemania es, en 1800, un conglomerado de casi 250 «estados»: reinos y principados, condados y obispados, ciudades libres, etc. Todos ellos forman el **Sacro Imperio Romano Germánico**, entidad política aún con reminiscencias feudales y que va a saltar hecha pedazos ante el avance de los ejércitos napoleónicos, portadores de las ideas de la Ilustración y de la Revolución Francesa. **Napoleón Bonaparte**, el vencedor de Marengo, desde sus treinta años contempla el siglo que comienza, dispuesto a conquistar el mundo. **Beethoven**, **Hölderlin y Hegel**, todos ellos nacidos también en 1770 celebrarán en algún momento la figura del indómito corso. En Weimar, **Goethe** acaba de cumplir la cincuentena y observa el cambio de siglo con serenidad no exenta de nostalgia. Lejos quedan los tiempos de su «**Werther**» (1774), con la que alcanzó fama universal e impulsó el movimiento romántico. **I. Kant**, respetado y admirado, es un anciano que aún pasea por los puentes de su ciudad natal, Köenigsberg y que es consciente de la importancia de su obra. La «**Crítica de la Razón Pura**» abre una nueva época en la historia del pensamiento al delimitar el campo de la metafísica.

Pero la **Razón**, diosa del siglo que termina, se revela impotente ante la inmensidad de lo **Real** y la complejidad de la **Vida**. Lo no racional, lo inefable, exige su parte y tiene lugar la explosión romántica ...

¿Cómo abordar nuestro tema «La matemática alemana en la cultura del siglo XIX»? ¿Cómo ligar las matemáticas con Goethe y Novalis, con Wagner y Nietzsche?: voy a intentarlo a través del concepto de **INFINITO**, presente en el número irracional de Dedekind; en la melodía sin fin del «Tristán e Isolda» wagneriano; en el anhelo de plenitud del Fausto de Goethe. El concepto de infinito es común a las Matemáticas y a la Teología, a la Música y a la Filosofía. No es por casualidad que Alemania haya dado los más grandes representantes de todas estas disciplinas a la cultura del siglo XIX.

¿Por qué esa atracción por lo desmesurado en el espíritu alemán?

La cultura griega se caracterizó justamente por lo contrario. Su Cosmos era finito, sus dioses tenían atributos de perfección, pero entre ellos no figuraba el de la infinitud. El arte que más se desarrolla es el de la escultura, en donde la armonía de las proporciones nos habla de un mundo limitado, sereno, apolíneo. Parecería pues contradictorio con todo la anterior, el constatar **la enorme influencia de la cultura griega en el mundo germánico** durante el período 1700-1900. Goethe y Schiller aspiran a una Alemania que sea la resurrección de la Grecia antigua. Pero, y aquí está la gran diferencia, **una Alemania cristiana**. El Dios de San Agustín sí tiene los atributos de infinitud (¡y los ejerce en la contemplación del infinito actual![(1)]).

Galileo y Leibniz, desafiando el precepto aristotélico, se atreven a concebir el «infinito en acto», y toda la matemática del siglo XVIII será un hacer florituras con los «infinitésimos», lógicamente aberrantes, pero de una indudable utilidad para la ciencia física. **Gauss** (1777-1852), gran figura de la matemática alemana de la primera mitad del siglo XIX (2) expresa su oposición a que se utilicen los «infinitos actuales». En una carta a Heinrich Schumacher escribe en 1831:

> *«Pero con respecto a su demostración, yo protesto sobre todo del uso que se hace de una cantidad infinita como cantidad «completa», lo que en matemáticas jamás está permitido. El infinito es sólo una «**façon de parler**», en la que propiamente debería hablarse de límites».*

Con el concepto de límite, **Bolzano, Cauchy y Weierstrass** consiguen expulsar el infinitésimo de la matemática. Aristóteles, con su moderación finitista, parece triunfar de nuevo ...

Pero es un alumno de Weierstrass: **Cantor**, quien vuelve a introducir el infinito actual en las matemáticas, aunque esta vez dotándolo de rigor. Lo que no quita el impulso metafísico y teológico de su reaparición. Así, Cantor observa que:

«La más excelsa perfección de Dios reside en la posibilidad de crear un conjunto infinito, y su inmensa bondad le lleva a crearlo».

«A mi entender, sin un granito de metafísica no es posible fundar una ciencia exacta. Tal y como yo la concibo, la metafísica es la ciencia de lo que es, es decir, de lo que existe, y por tanto, del mundo tal y como es en sí y no tal y como nos aparece». (3)

La «Teoría de conjuntos» cantoriana conmociona el mundo de los matemáticos y éstos se dividen entre los que como **Kronecker**, rechazan de plano la reaparición del infinito actual y la existencia de entes matemáticos que no se puedan construir en un número finito de pasos, y los que como **Hilbert** saludan la nueva, original y rigurosa forma de tratar con el infinito matemático y ven con ella abrirse a las matemáticas un «paraíso de posibilidades».

KANT Y GOETHE: DOS CONCEPCIONES DEL MUNDO

La ascendencia de estos dos colosos del pensamiento sobre el panorama cultural alemán es enorme. Para comprender estos influjos que unas veces se contraponen y otras se complementan, citaremos del libro: «**Kant y Goethe. Para una historia de la concepción moderna del mundo» (1906), de Georg Simmel.** (4)

Observa Simmel al analizar las dos concepciones:

«La idea de que el hombre es fundamentalmente un ser dualista, y de que el dualismo y el contraste son la forma fundamental en que el hombre capta los contenidos de su mundo...»

Para Kant, el problema no son tanto las cosas, como lo que sabemos o podemos saber acerca de ellas:

«Y así logra unificar los grandes dualismos: naturaleza y espíritu, cuerpo y alma, limitándose a unificar las imágenes cognitivas, científicas de ellas; la experiencia científica, con la

invariable igualdad de sus leyes, es el marco que abarca todos los contenidos de existencia en una forma: la de su captabilidad por el entendimiento».

Frente a esta solución **científica**, Goethe abogaría por una solución **artística**, basada en el individuo y en su sentimiento del mundo. Sentimiento de la profunda unidad entre naturaleza y espíritu.

«Visto desde un punto de vista científico-metodico, Kant es, naturalmente, el pensador objetivo, imparcial, y Goethe el subjetivo, que configura el cuadro de la existencia guiándose por su individualidad emocional. Pero filosóficamente, por el resultado concreto, es Kant el subjetivista que instala el mundo en la conciencia humana y le asigna las formas de ésta, mientras que Goethe sólo reconoce la soberana objetividad de la existencia, dentro de la cual también el sujeto y su vida son un latido de la vida universal de la naturaleza».

«La más profunda diferencia entre ambas individualidades se refleja en que para Goethe el conocimiento es espontánea función orgánica de la vida ... Para Kant, conocimiento es la síntesis de fuerzas, propiamente extrañas entre sí, procedentes desde los dintintos puntos cardinales del espíritu; en cambio ese concepto no vale para la imagen que del conocimiento se hace Goethe, a pesar de que la mentalidad de éste pueda también calificarse de sintética. Y es que él no agrupa lo antes separado, sino que sostiene un originario ser único, anterior a toda separación que requiera una síntesis ulterior. La unidad espiritual que uno y otro, en contraste con el sensualismo y con el racionalismo, toman como base del conocimiento, es, en el fondo, para Kant, de orden mecanicista, y para Goethe, por el contrario, de tipo vitalista».

Kant no compuso tratado sistemático alguno sobre Filosofía de la Matemática; sin embargo toda su obra está impregnada de la problemática matemática y su pensamiento al respecto influyó poderosamente en la obra de los matemáticos posteriores.

Quiero destacar que para Kant, **hacer matemáticas, es un acto dinámico y**

constructivo, a través de la experiencia. En matemáticas es la razón la que genera los conceptos, pero la construcción matemática no queda en el ámbito de la razón pura, sino en el de la intuición posible; su campo es el de la sensibilidad y posee unos límites perfectamente claros: los de la Naturaleza. Kant diferencia **el conocimiento filosófico**, que es un conocimiento racional derivado de conceptos, del **conocimiento matemático**, que es un conocimiento obtenido por **construcción de los conceptos**. Es ésta una diferencia formal clave, porque tanto la filosofía como las matemáticas tratan de algunos temas comunes: por ejemplo, la naturaleza y la estructura del **Continuo**.

La vida y la obra de Goethe son una buena ilustración de los profundos cambios que sacuden Europa entre 1750 y 1830. En «Werther» (1775), Goethe es el joven romántico, insatisfecho con la sociedad que le rodea. En «Los años de aprendizaje de Guillermo Meister» (1796), es el burgués que aspira a asimilar los ideales aristocráticos de formación de una personalidad armoniosa y cultivada en todas sus facetas. Es el **Kulturmensch** (el hombre de cultura).

Con el cambio de siglo, el Goethe maduro se va inclinando poco a poco hacia el clasicismo. En «Los años de andanzas de Guillermo Meister» (1829) hay ya en él una nueva concepción del individuo, basada en la renuncia a la personalidad total y en la búsqueda de especialización. Al **Kulturmensch** sucede el **Fachmensch** (el especialista). En el «Fausto», hace una reflexión sobre la Ciencia y sobre el ansia de sabiduría y sus limitaciones. El viejo Fausto, y con él Goethe, se consuelan del fracaso en su intento de aprehender la totalidad del saber y sueñan:

> «*Declina el sol y se hunde en el ocaso; el día ha fenecido; pero el radiante astro, siguiendo su carrera veloz, despierta en otros parajes una nueva vida. ¡Ah!, ¡que no tenga yo alas para elevarme más arriba de la tierra y lanzarme anhelante en pos, siempre en pos de él! Entonces vería, en un perenne crepúsculo vespertino, el mundo silencioso a mis pies, abrasadas las cumbres todas de los montes, plácidos los valles, y el arroyuelo argentino correr trocada en oro su corriente. La abrupta sierra, con todos sus despeñaderos, no atajaría entonces mi carrera, semejante a la de los dioses. Ante los ojos atónitos, extiéndese ya el mar con sus abrigados senos. Pero el dios tiene trazas de hundirse y desaparecer por fin en lontananza. Con todo, despiértase un nuevo impulso, y con apresurado vuelo sigo adelante para saciarme de su eterna luz. Ante mí el día; detrás de mí la noche; el cielo arriba,*

> *las olas abajo. ¡Qué delicioso sueño! Y en tanto, el astro desaparece».*

EL ROMANTICISMO EN LA PRIMERA MITAD DEL SIGLO XIX

El Romanticismo como fenómeno literario-filosófico-cultural nace en Alemania, en el último tercio del siglo XVIII, alrededor del movimiento «**Sturm und Drang**». En la antítesis **clásico-romántico**, corresponde al primero de estos dos términos una concepción de la realidad inmutable, eternamente dada, regida por las normas de una racionalidad fuera del espacio y del tiempo, siempre y en todo lugar igual a sí misma. El romanticismo presupone, al contrario, el descubrimiento de la individualidad como única realidad verdadera que sea posible conocer y experimentar concretamente.

Para el romántico, la Naturaleza ya no es materia inerte y extraña gobernada por leyes mecánicas ciegas, sino un complejo orgánico con vida propia, cuyo ritmo no es extraño a la vida del hombre. Así, sólo afinándose con estos ritmos y recogiendo la respiración secreta de la naturaleza, podrá penetrarse en el sentido de las cosas, experimentar lo inefable, comunicar con el absoluto. En el ámbito de la literatura y del arte esta antítesis entre **antigüedad** (clásica) y **cristianismo** (romántico), se traduce en imágenes corpóreas y sensibles de la realidad en el primer caso, y en un místico deseo de infinito en el segundo, que en alemán se expresaría con la palabra **Sehnsucht**, difícilmente traducible a otros idiomas: «mal del deseo», deseo que se nutre de sí mismo y se satisface en la imposibilidad misma de satisfacción.

Novalis (1772-1801), uno de los promotores del movimiento romántico y genial poeta, afirma: «*A través de la poesía nace la más alta simpatía y cooperación, la más íntima unión de lo finito y lo infinito*». En los «Himnos a la noche» (1800), Novalis se distancia de la actitud nostálgica hacia la cultura clásica griega y opone a ésta una conquista espiritual que en la cultura occidental se inicia con el cristianismo: la reconciliación con la muerte. La **noche** es la concha oscura, antesala para el alma que ansía el retorno a la madre universal.(5)

> «... *Se habían ocultado los dioses,/ sola y sin vida/ quedaba la naturaleza,/ exánime entre el severo número/ y la férrea cadena,/ que se habían tornado leyes/ ... Ya no fue la luz/ la morada de los dioses/ y el signo de los cielos./ El velo de la noche/ pusieron sobre sí ellos;/ la noche se hizo/ el fecundo seno/ de las revelaciones*».
>
> (del Himno V de los Himnos a la Noche)

Hölderlin (1770-1843), uno de los más grandes poetas alemanes de todos los tiempos. Durante su estancia en el seminario de Tubinga entra en contacto con el mundo griego: poesía, arte, mito. Alli tiene como compañeros y amigos a dos gigantes del pensamiento de la época: **Hegel y Schelling**. Ferviente admirador del mundo helénico, a la vez que cristiano creyente, Hölderlin elabora toda una teoría que le permite armonizar las dos tendencias, en la que «*El helenismo y el cristianismo no son más que momentos históricos de un mismo proceso evolutivo de la humanidad*».

> «*Bajo la sombra de los plátanos,/ donde el Iliso corría entre las flores,/ los jóvenes soñaban con la gloria;/ donde Sócrates conquistaba los corazones/ y Aspasia pasaba entre los mirtos,/ mientras los clamores de un gozo fraterno/ resonaba en el Agora ruidoso/ y mi Platón forjaba paraísos;...*»
>
> (del poema «Grecia»)

> «*¡A tí Madre Asia, te saludo!/ bajo la sombra de los bosques legendarios/ descansas y rememoras tus hazañas/ ... Así el Verbo nos llegó del Oriente/ ... y de pronto, desde lo alto de los Alpes/ se despeña sobre nosotros la Extranjera,/ la que Despierta/ la Voz que forma a los humanos./ Al principio el estupor heló las almas/ de todos los presentes y la sombra/ cubrió los ojos de los mejores./ Pero grande es el poder del hombre/ y con su arte domina el oleaje, las rocas/ y el ímpetu del fuego,/ y aunque la espada no rehuye en su audacia,/ el fuerte cae de rodillas/ ante la presencia del divino./ Y casi semejando a la fiera/ que llevada por su gozosa juventud/ ronda sin tregua en la montaña,/ sintiendo en el ardiente mediodía/ la plenitud de su pujanza./ Pero cuando declina la sagrada luz/ entre los jugueteos de las brisas,/ y cuando su alegre espíritu/ llega a la tierra venturosa, entonces/ el animal cae vencido/ por el cúmulo de bellezas repentinas/ y se adormece a medias,/ antes de que aparezcan las estrellas ...*
>
> (del poema «En las fuentes del Danubio»)

En 1806, Hölderlin es presa de una oscura demencia de la que ya no se recuperaría, muriendo años después, exiliado en las sombras. Pero mucho antes, había ya escrito que: «***El hombre es un Dios cuando sueña y un mendigo cuando reflexiona***».

Es un amigo de Hölderlin, **Friedrich Schelling** (1775), quien dota de base filosófica al romanticismo. La belleza, afirma, es «*lo infinito, representado de modo finito*», y el arte constituye la revelación de lo divino que existe tanto entre las cosas como en el espíritu humano. Schelling encabeza la reacción contra el kantismo, contra la tradición nacida en el siglo XVII, para la cual el saber humano quedaba reducido a las formulaciones mecánicas y matemáticas dominantes en las ciencias naturales.

Para Schelling el Arte no es una imitación de la naturaleza ni la realización de un ideal abstracto concebido por el pensamiento puro, sino que es la representación del principio oculto que anima a las cosas. La Naturaleza es un espejo del espíritu universal y el Arte es su imagen más elevada y más clara. Su objeto es revelarnos esa fuerza divina que actúa en el mundo y que reside también en el fondo de los seres y de las oposiciones aparentes del mundo real.

La influencia de Schelling en el desarrollo de algunas ramas de las ciencias naturales fue notable (la Biología y la Química), desde su cargo de presidente de la Academia Real de Ciencias de Munich. Allí se entrega a los más audaces sueños sobre una humanidad futura, que lleve la Ciencia a la fuente de la Poesía y cree una nueva mitología:

«*Ahora bien, si el único arte es aquel que logra convertir en objetivo con valor universal, lo que el filósofo no puede representar más que subjetivamente, para extraer esta conclusión cabe esperar que la filosofía, que fue producida y nutrida por la poesía en la infancia del saber, y junto con ella todas las ciencias que por intermedio suyo han llegado a la perfección, una vez que han alcanzado su plenitud, volverán como otros tantos ríos a aquel universal océano de la poesía, de donde habían salido. No resulta difícil decir de un modo general cuál será el intermediario del retorno de la ciencia a la poesía, ya que tal intermediario existió en la mitología, antes de que ocurriese esta separación, que en la actualidad parece inconciliable. Sin embargo, cómo puede nacer una nueva mitología, que no sea creación del poeta individual, sino de una nueva estirpe, que actúe casi como si fuera un único poeta, constituye un problema cuya solución sólo se puede esperar de los futuros destinos del mundo y del curso posterior de la historia*».

LA ENSEÑANZA EN EL ESTADO PRUSIANO. LA UNIVERSIDAD ALEMANA DEL SIGLO XIX

La situación de Prusia tras la derrota frente a Napoleón en 1806 es vivida por los contemporáneos como una época de crisis. **FICHTE**, en su «**Discursos a la nación**

alemana», elabora un programa en el que sostiene la tesis de que Alemania se recuperaría de la derrota político-militar a través de un relanzamiento moral y cultural.

En el ocaso del Sacro Imperio Romano Germánico, en pleno apogeo del pensamiento de la Ilustración y ante la necesidad de reemplazar una «economía de toda la casa» por la economía capitalista, en la que es necesario elevar el nivel básico de cualificación existente en la sociedad, **el Estado Prusiano alza la bandera de la educación**, creando un Ministerio de Instrucción Pública autónomo y estableciendo la obligatoriedad de la enseñanza. Ya en 1794, el Código Civil General para los Estados Prusianos imponía a todos los padres de familia la obligación de procurar una adecuada instrucción para sus hijos. Es de destacar que este sistema educativo ya no va a estar organizado de forma privada, confesional o profesional-corporativa, sino que es definida como «pública» y en la mayoría de los casos controlada estatalmente.

El **Bachillerato**, introducido en 1788 y reconocido a partir de 1834 como legitimación para acceder a la Universidad, se convertirá en Alemania en el eje central de articulación del sistema educativo. Por cada 1000 habitantes hay en Prusia/Alemania 1,5 estudiantes de bachillerato en 1830; 4,0 en 1870; 9,6 en 1890; 11,4 en 1910. En Rusia y Francia, en 1910 hay tan sólo 3,3 estudiantes de bachillerato. En 1843 ya hay alrededor de 25.000 maestros que imparten la enseñanza en escuelas elementales a casi 1,4 millones de escolares, cuyo número llega a ascender en 1878 a 4,2 millones. Alrededor de 1900 en Alemania la asistencia general a la escuela se realiza prácticamente sin excepciones. El número de maestros asciende a más de 140.000.[(6)]

En lo relativo a la enseñanza universitaria, aquel interés por los procesos educativos, cristaliza en la fundación de la **Universidad de Berlín** (1810) por **WILHELM VON HUMBOLDT** (1767-1835). Este erudito y eminente estadista fue Director del Ministerio Prusiano de Instrucción. Hermano mayor del más famoso de los Humboldt: Alexander, el naturalista y viajero, crea la Universidad de Berlín bajo un nuevo espíritu humanista y liberal. Modelo de Universidad moderna, desempeñará un papel importante en el espectacular desarrollo de la matemática alemana del siglo XIX: dos grandes generaciones de maestros que formarán escuela pertenecerán a la misma. **Jacobi, Dirichlet y Steiner** en la primera mitad de siglo y **Weierstrass, Kummer y Kronecker** en la segunda. Es destacable también por sus importantes contribuciones a la matemática, la Universidad de **Göttingen**, creada por el Rey de Inglaterra Jorge I en 1736. En ella, investigarán y enseñarán grandes matemáticos como **Gauss, Dirichlet, Riemann, Klein y Hilbert**.

La creación de revistas especializadas contribuyó también grandemente al desarrollo de las matemáticas. En particular, la creación del **Journal für die reine und**

angewandte Mathematik, el famoso **JOURNAL DE CRELLE**, fundada en 1826 por Leopold A. Crelle (1780-1855), matemático e ingeniero prusiano.

SITUACIÓN DE LA MATEMÁTICA A COMIENZOS DEL SIGLO XIX

La matemática a comienzos del siglo XIX goza de buena salud y es ya una disciplina altamente respetada por su condición de «verdadera» y exacta. Francia, y en particular París, son el centro neurálgico de su desarrollo, que tienen en **Cauchy** a su máximo representante. En Alemania, otra gran figura de las matemáticas, Gauss, trabaja en Göttingen, creando una escuela que junto al poderoso esfuerzo educativo puesto en marcha a instancias de Fichte y von Humboldt entre otros, culminará en la impresionante eclosión de la matemática alemana de fin de siglo, base de toda la matemática actual.

Crecida impetuosamente durante el siglo XVIII, la matemática es un gigante con los pies de barro. La **necesidad de una fundamentación** es sentida por todos. El uso de cantidades infinitesimales que se desvanecen, auténticos «fantasmas» denunciados por **Berkeley** a mitad del siglo XVIII, va poco a poco repugnando a la sensibilidad y buen criterio de los matemáticos. El concepto de **límite** va perfilándose paulatinamente hasta que con Weierstrass y su notación (ε-δ) asume la formulación de todos hoy conocida.

La matemática, al igual que las otras ciencias, tiende a independizarse en ese proceso de especialización, que va a dominar todo el siglo, y que tan bien supo captar Goethe. Concretamente, la matemática tenderá a sacudirse el yugo de lo «real», e irrumpirá lo «abstracto» dando curso libre a la creatividad, al igual que en las artes plásticas. Después de dos mil años de intentos frustrados de demostrar el famoso quinto postulado de Euclides a partir de los cuatro primeros, se empieza a sospechar de su independencia con respecto a ellos. Pero es tan duro aceptar lo contingente e hipotético de la Geometría Euclídea, que Gauss no publicará sus resultados sobre geometrías no euclídeas y habrá que esperar al segundo tercio del siglo para que la comunidad matemática contemple incrédula las investigaciones de Bolyai y Lobachewski.

El otro gran tema pendiente es el de **la estructura matemática del continuo,** del número real. En el siglo IV (a.c), **Eudoxo**, el gran dominador del infinito en la matemática griega, había sorteado con magistral pericia las dificultades creadas, por el descubrimiento de magnitudes inconmensurables, para la teoría de la semejanza en geometría. Con su **Teoría de las proporciones** (Libro V de los «Elementos» de Euclides) Eudoxo justificó el uso de razones de magnitudes inconmensurables, sin osar por supuesto considerar a estas razones como números. **Galileo**, temeroso en el cumplimiento del rigor matemático, aún usa de la ciertamente engorrosa definición V del Libro V de Euclides [7], y es **Descartes**, quien acogiéndose a la garantía y bondad del Dios cristiano, usa libremente y sin rigor los números irracionales, práctica que se extenderá hasta que **Dedekind**, con un procedimiento muy similar al empleado por Eudoxo, «**invente**» el número real, dándole certificado riguroso de existencia.

Ligado con lo anterior está el concepto de **función de variable real**, verdadero paradigma de la matemática en la era moderna. Inicialmente ligada a su representación gráfica y a la Geometría, va lentamente convirtiéndose en función-correspondencia, a medida que van surgiendo «patologías» en el comportamiento de su gráfica. Justamente, estudiando ciertos dominios de funciones reales, esto es, ciertos subconjuntos de números reales, **Cantor** se interesará por la comparación de conjuntos infinitos, creando con la **teoría de conjuntos y sus números transfinitos**, un lenguaje matemático que insertará rigurosamente el infinito en una totalidad actual y estática.

LA MATEMATICA ALEMANA (1800-1850)

Destacaremos en este período las figuras de **Bolzano, Dirichlet y Riemann**, haciendo especial hincapié en el primero, injustamente tratado hasta hace poco tiempo por la historiografía de la matemática.

BOLZANO (1781-1848)

Bernhard Bolzano, matemático, filósofo y teólogo, este cura checoeslovaco nació y vivió en la ciudad de Praga. Desde muy temprana edad se interesó en los fundamentos de la geometría; en particular por los conceptos de **punto, línea, superficie y sólido.** Para ello tuvo que hacer frente también al siempre problemático concepto de **continuidad**.

Durante el período de 1796 a 1804 se forma intelectualmente, siguiendo estudios de matemáticas y filosofía. Esta interrelación va a ser una constante en toda su vida creativa, estando siempre más interesado en la fundamentación lógica de las matemáticas ya existentes que en la creación de nuevos resultados. El propio Bolzano, en un relato autobiográfico, nos habla de dos obras que tuvieron gran influencia en su pensamiento: el libro de Baumgarten «**Metaphysica**» (1779) que es un compendio de la filosofía de Leibniz-Wolff; y un libro de texto de matemáticas muy famoso en la Alemania de la segunda mitad del siglo XVIII su autor: **Abraham Kästner**. En él aprendió Bolzano la aritmética y la geometría, la trigonometría esférica y la perspectiva.

En 1804 publica su primer libro, en el que expone sus ideas sobre la geometría elemental, que irá desarrollando a lo largo de toda su vida. En el prólogo, Bolzano resalta la importancia de la teoría y del rigor en las matemáticas y su utilidad para organizar y fortalecer la mente de los jóvenes estudiantes. Señala las deficiencias lógicas de los «Elementos» de Euclides y la carencia de unos supuestos teóricos sobre la continuidad, que Euclides usa intuitivamente[8]. Bolzano se impone como reglas metodológicas: 1°) No dar nada por demostrado, incluso cuando parezcan existir evidencias que hagan innecesaria la demostración; 2°) Una demostración no será satisfactoria si usa conceptos extraños a los contenidos en la tesis. Uno de tales conceptos extraños a la geometría, según Bolzano, es el de flujo o movimiento. Aborda el problema del postulado de las paralelas y aunque, obviamente, no consigue demostrarlo, en ningún momento duda de tal posibilidad. Aparentemente Bolzano está muy lejos de concebir una geometría no euclídea. En 1817 demuestra el importante teorema que lleva su nombre y que dice:

> «*Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones continuas y se tiene que $f(a)<g(a)$ y $f(b)>g(b)$, entonces existe un x entre a y b tal que $f(x)=g(x)$*».

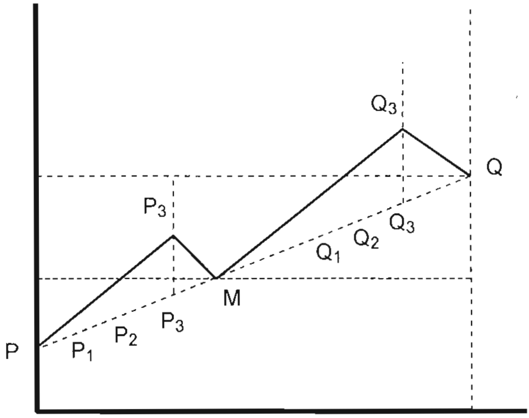
Bolzano afirma que para una demostración correcta de este teorema necesita una definición correcta de continuidad, definición que da a continuación y que es la primera en la que no aparecen los infinitésimos: «*$f(x)$ es continua en x, si $f(x+h)-f(x)$ es en valor absoluto menor que una fracción arbitraria $1/N$, siempre que tomemos h suficientemente pequeña*».

Para probar su teorema, Bolzano necesita de un Lema, básico en la construcción de los números reales, y que dice:

> «*Si M es una propiedad no verificada por todos los valores de la variable x, pero que sí lo es para todos los valores menores que un cierto u, entonces existe un U que es el mayor de los que verifican que todo x más pequeño que él tiene la propiedad M*».

Esta propiedad no consiguió probarla Bolzano, al no poseer un concepto preciso de número real. Para él, un número real es «una expresión infinito-numérica, medible». La descripción de un número real tendrá sentido solamente si permite determinarlo con un arbitrario grado de precisión por medio de números racionales. (En general, esta descripción requiere de un número infinito de operaciones aritméticas).

Alrededor de 1830, en su libro sobre funciones reales, «**Functionenlehre**», da un ejemplo de función sumamente importante desde un punto de vista histórico. La función de Bolzano va a ser una función continua en el intervalo [0,1], y no derivable para cada x perteneciente a [0,1].



Si PQ es una línea no horizontal con sus extremos en x=0 y x=1, y si M es su punto medio, se divide PM y MQ en cuatro partes iguales. Si P_1, P_2, P_3, y Q_1, Q_2,Q_3, son respectivamente estos puntos de división, sean P'_3 y Q'_3 los puntos simétricos de P_3 y Q_3 respecto de las horizontales que pasan por M y Q respectivamente.

Entonces tendremos la línea quebrada $PP'_3MQ'_3Q$. Prosiguiendo este proceso «ad infinitum», Bolzano consigue una función que deja de ser derivable en un conjunto numerable, «denso por todo» de puntos de la curva límite. Bolzano no es consciente de la extremada patología de su curva y es **Rychlik** quien en 1922 prueba que no es derivable ¡en ningún punto! de [0,1]. El manuscrito de Bolzano fue dado a conocer en 1921 por **Jàsek**. Esta función de Bolzano es ya una función dada como «correspondencia», sin ecuación representable, antecediendo en el tiempo a la definición dada por **Dirichlet** años más tarde.

En «**Paradoxien des Undendlichen**» (Paradojas del infinito), publicada póstumamente en 1851, Bolzano desarrolla sus ideas sobre el infinito. Frontalmente opuesto a los infinitésimos, acepta, sin embargo, la noción de infinito actual. Influído por las ideas de **Leibniz** [9] al respecto, ve al infinito por doquier en la realidad, vinculando la infinitud de Dios con la infinidad de los seres creados. Años antes, en su «**Wissenschaftslehre**» (1837) ya había escrito que las ideas no son en general algo «existente». Así por ejemplo las ideas de √-1 y de 0. Para concluir en que la determinación de una cosa no debe basarse forzosamente en la existencia efectiva del objeto.

Bolzano es una figura importante en la historia de la conquista del infinito actual. Veamos lo que escribe sobre la «paradoja» del «todo y la parte», que tanto impresionara a Galileo(10):

> «*Tómense dos cantidades (abstractas) cualesquiera, por ejemplo 5 y 12. Es evidente que el conjunto de todas las cantidades comprendidas entre 0 y 5 (o sea, menores que 5), al igual que las cantidades menores de 12 es infinito; con total certeza este último conjunto es mayor que el primero, siendo este último indiscutiblemente sólo una parte de aquél [...].*
>
> *Pero no es menos verdad lo que sigue: Si x denota una cantidad cualquiera comprendida entre 0 y 5, fijemos la relación entre x e y por medio de la ecuación 5y=12x. Entonces y es una cantidad comprendida entre 0 y 12 [...].*
>
> *De la ecuación anterior se sigue que a cada valor de x corresponde un sólo valor de y y viceversa. De esto resulta claro que para cada elemento* **x** *del conjunto de cantidades comprendidas entre 0 y 5, existe un y del conjunto de cantidades comprendidas entre 0 y 12, que se pueden relacionar en* ***un par*** *de forma que ninguno de los elementos constituyentes de los dos conjuntos no aparezcan al menos en un par, y ninguno de ellos aparezca en dos o más pares*».

La «paradoja» está en la posibilidad de establecer una correspondencia biunívoca entre un segmento continuo y una parte propia de él. Bolzano, sin embargo, observa que:

> «*Puede parecer (que un hecho, que se verifica para los conjuntos finitos), deba seguirse verificando para conjuntos infinitos: pero un estudio más profundo revela que tal necesidad no existe, porque la razón por la que aquello acaece para los conjuntos finitos reside justamente en su finitud*».

Así pues, Bolzano «excusa» la aparente contradicción y estamos a un paso de la definición de **conjunto infinito** que hará **Dedekind** algunos decenios más tarde, aprovechando justamente el «paradójico» hecho que tanto preocupara a Galileo. El aislamiento de Bolzano hizo que su obra no se conociera hasta cincuenta años después, dada a conocer por **Hermann Hankel**.

En resumen, Bolzano prefigura los temas de la **Lógica Matemática, Teoría de Conjuntos y Topología** [11], y es un auténtico adelantado de **Weierstrass**, con el que el análisis se liberará definitivamente de la tiranía de la intuición geométrica, imponiéndose métodos autónomos de definición y demostración que lo harán un modelo de rigor y fecundidad, proceso que se ha dado en llamar **Aritmetización del Análisis**.

DIRICHLET (1805-1859)

Estudia el bachillerato en Bonn y pronto se interesa por las matemáticas. En esos momentos, París es el centro de investigación matemática más importante y allí acude Dirichlet para asistir a los cursos de **Laplace, Legendre y Fourier**. Este último ejercerá gran influencia sobre sus trabajos posteriores en series trigonométricas[12].

Inicialmente se interesa por la **teoría de números**, que será el tema preferido a lo largo de su vida. En Junio de 1825 presenta a la Academia de Ciencias Francesa su primer trabajo matemático: «**Memoria sobre la imposibilidad de algunas ecuaciones indeterminadas de quinto grado**». En ella se trataban ecuaciones diofánticas de la forma $x^5 + y^5 = A.z^5$ mediante técnicas algebraicas de teoría de números y estaba inspirada en trabajos de Legendre, quien usando métodos similares probó varias semanas después el famoso teorema de Fermat ($x^n + y^n = z^n$ no tiene soluciones enteras con $x.y.z \neq 0$) para el caso n=5. Posteriormente, Dirichlet lo probaría para el caso n=14.

Retorna a Alemania, bajo los auspicios de **Alexander von Humboldt,** quien en estos momentos desarrollaba todo un plan de potenciación de las ciencias naturales en su país. En 1828 es nombrado profesor de la Universidad de Berlín y en 1831 es hecho miembro de la Academia de Ciencias Berlinesa. Ese mismo año se casa con Rebeca Mendelssohn-Bartholdy, nieta del filósofo Moisés Mendelssohn y hermana del famoso compositor. Durante toda su vida, se moverá en los ambientes refinados y cultos de la alta burguesía. Durante los 25 años en que ejerce como profesor en Berlín, tendrá una enorme influencia en el desarrollo de la matemática alemana. Excelente profesor y hábil investigador, su atractiva y refinada personalidad atrajo a las matemáticas a muchos talentos. Entre sus alumnos: Riemann, Dedekind, Kronecker... En 1843 realiza el «viaje a Italia» que todo alemán culto y adinerado necesitaba hacer desde que a Goethe le diera por bajar al Sur tras la luz, los colores y el olor de los naranjos. Allí permanece cerca de dos años en compañía de otro gran matemático y compañero en Berlín: **Jacobi**.

Con Dirichlet comienza, tímidamente aún, el proceso de «**liberación**» de la matemática respecto de las ciencias físicas. Generaliza el concepto de función y de ahora en adelante, ésta será una correspondencia en la que a cada x de un cierto intervalo de números reales se le hará corresponder un único f(x). Se aceptarán todo género de «patologías» en la forma de la función; así, la famosa función de Dirichlet, D(x): igual a 0 si x es racional, e igual a 1 si x es irracional, será una función **discontinua en cada x**.

En 1855 y tras la muerte de Gauss, Dirichlet tiene el honor de sucederle en su cátedra de Göttingen, a donde se traslada. Allí pasará los últimos años de su vida, rodeado de la admiración de sus alumnos.

RIEMANN (1826-1866)

Bernhard Riemann era el segundo de los seis hijos de un pastor protestante. En 1846 entra en la Universidad de Göttingen para estudiar teología y filología clásica. Asiste también a cursos de matemáticas y finalmente consigue el permiso paterno para dedicarse por entero a ellas. Tendrá siempre una gran inclinación por la filosofía. En 1847 se va a la Universidad de Berlín, atraído por los cursos que allí se imparten, donde conoce a Dirichlet con quien mantendrá una amistad a lo largo de su vida. A la vuelta a Göttingen en 1849 asiste a cursos y seminarios de física y filosofía. Posteriormente entra a trabajar como asistente del físico Weber.

Los resultados de Bolyai y Lobachewski sobre geometrías no euclídeas empiezan a ser conocidos y esto potencia aún más el proceso de «liberación» de las matemáticas, en un contexto cultural y social que tiende a la libertad y al individualismo romántico. En el Arte pictórico, los **impresionistas** sustituyen la imagen objetiva de la realidad visible por la sensación momentánea que produce el objeto sobre la retina y el concepto de espacio físico se tambalea. En 1854 Riemann expone ante Gauss su trabajo «**Sobre las hipótesis que sirven de fundamento a la geometría**» para superar un examen que le habilitará como «privatdozent». Gauss quedó altamente impresionado, y no era para menos, dado el gran impacto que este escrito tendría posteriormente en la concepción y filosofía del espacio.

En él, Riemann generalizaba el concepto de **geometría intrínseca** de una superficie que Gauss había establecido en 1827 en su «**Investigaciones generales sobre superficies curvas**». Con su noción de **magnitud de dimensiones múltiples** se rompía con las tradicionales tres dimensiones del espacio ordinario. Las geometrías de Euclides y Lobachewski pasaban a ser casos particulares de la geometría riemanniana más general, correspondientes a espacios de curvatura nula o negativa.

Riemann reconoce en su escrito la influencia del filósofo **J. F. Herbart** (1776-1841), anti-kantiano y profesor en Göttingen; el «a priori» del espacio, si alguno había, era topológico más que métrico. A lo largo del siglo XIX sus espacios fueron aceptados como parte de una teoría matemática abstracta y sin valor para la filosofía del espacio. Tuvo como oponente al poderoso **Helmholtz**, uno de los más grandes científicos alemanes del siglo. Hoy día, una variedad riemanniana es un espacio n-dimensional cuya geometría intrínseca está determinada por una forma cuadrática que nos da el cambio infinitesimal en la distancia, ds. **Einstein** pudo aplicar las ideas de Riemann al continuo 4-dimensional del espacio-tiempo de su teoría de la relatividad.

Riemann, uno de los más geniales matemáticos de toda la historia, murió joven. Antes, había dejado una obra matemática no muy extensa pero de una extraordinaria calidad y había sustituido a Dirichlet en la prestigiosa cátedra que una vez ocupara Gauss en la Universidad de Göttingen.

LA INFLUENCIA HEGELIANA.
LOS MOVIMIENTOS REVOLUCIONARIOS DE 1848

La influencia del pensamiento de **HEGEL** (1770-1831) en el panorama académico y cultural alemán de la primera mitad del siglo XIX es enorme. La visión kantiana del hombre como criatura radicalmente finita, pero consciente de su propia infinita libertad en un mundo infinito, es asumida por Hegel, quien distingue entre el infinito «verdadero» y el infinito «malo» (schlecht-Unendlidchen).

Para Hegel, el infinito «malo», espúreo, es el infinito matemático, el de Aristóteles, el infinito potencial, que vendría representado en el mito de Sísifo, condenado eternamente a repetir una acción. Es el infinito de la Aritmética, el de los números naturales, una mala pesadilla y sólo un pálido reflejo del verdadero infinito: el **infinito metafísico**.

Para Hegel, como para Kant, el infinito es la absoluta y completa unidad del todo. La infinitud del todo y la infinitud de la razón serían una misma, pues para Hegel, a diferencia de Kant, todo lo que es real es racional. Como consecuencia, se tiene la unidad esencial de todo. Nada tiene sentido si se lo aisla de lo demás. La **verdad** misma residiría, en última instancia, en el todo. La verdad es también metafísicamente infinita. Hegel parece suscribir la opinión de **Nicolás de Cusa** de que únicamente la verdad, el infinito, puede conocer la verdad. El resto, lo finito, solamente puede aproximarse al conocimiento de la verdad.

Para Hegel, los presupuestos de la modernidad hunden sus raíces en el cristianismo:

> *«**El derecho de la libertad subjetiva** constituye el punto central sobre el que gira la distinción entre la antigüedad y la era moderna. **Este derecho ha sido expresado en su infinitud por el cristianismo** y ha sido constituido como principio real y general de una nueva forma del mundo».*

La filosofía de la historia de Hegel apunta en una clara dirección: «*El triunfo de Occidente sobre Oriente, de la medida europea, de la belleza individual*». El espíritu busca el Occidente; la Europa cristiana es la madurez del espíritu.

¿Por qué está la trayectoria histórica de Europa surcada de revoluciones?. Elevada al rango de valor absoluto, la **libertad** ha forjado utopías capaces de despertar el entusiasmo y mover al heroísmo. A finales de la década de los cuarenta, una recesión industrial y una sucesión de malas cosechas en la agricultura, hacen que el hambre golpee duramente a las clases más humildes en la Europa Central.

En 1848 llegan noticias de la insurrección en París, que culmina con la caída del rey burgués Luis Felipe. Como resultado, una serie de revueltas tienen lugar contra los gobiernos de la Confederación Germánica. En ciudades como Berlín y Dresde se producen situaciones insurreccionales con violentos combates callejeros, que terminan siendo dominados y dan paso a una política reaccionaria y a un crecimiento económico en la década de los cincuenta.

Es en Dresde donde un joven Kapellmeister, **Richard Wagner**, toma partido por el bando revolucionario, hecho crucial en la vida de este extraordinario artista, una de las figuras más importantes de los tiempos que se avecinan.

LA MUSICA ROMANTICA. RICHARD WAGNER

Con el Romanticismo, la música es promovida al rango más elevado en la jerarquía de las artes. **E.T.A. Hoffmann** (1776-1822), escritor, compositor y crítico musical, en su reseña sobre la Quinta Sinfonía de Beethoven declara la equivalencia entre música y romanticismo. **La música sola es el arte verdaderamente romántico porque el infinito es su sujeto**, porque no representa sentimientos determinados, sino que suscita en el corazón humano aquella pasión infinita que deja entrever al hombre el reino supremo del absoluto. Concluye que la música ha podido desenvolverse según su naturaleza más auténtica después del advenimiento del cristianismo.

Richard Wagner (1813-1883), músico genial y generador de la modernidad estética, reúne en su persona y en su concepción del Arte las características esenciales de la segunda mitad del siglo XIX[13]. Su extraordinaria capacidad de síntesis le hace ser receptor de todas las inquietudes de su tiempo. En Dresde, en 1849, conoce a **Bakunin** y participa con éste en el levantamiento revolucionario. Compartirá con el lider anarquista la crítica del Progreso y la consideración de la Ciencia como una «teología de la edad moderna» que amenaza el destino de la humanidad.

Con el fracaso de los movimientos revolucionarios, Wagner tiene que exilarse y pasará largos años en Suiza. En su formación intelectual juega un papel importante el estudio de la tragedia griega, y este mundo mítico le será de gran utilidad en su propósito de sintetizar la mitología germánica. No puede con la dificultad de lectura de las obras de Hegel y de Schelling y se vuelca en la obra de Feuerbach, mucho más accesible por su estilo literario pleno de lirismo y nitidez[14].

En 1854, algo más de dos años después del desencanto revolucionario, conocerá Wagner un libro fundamental en su vida: «**El mundo como voluntad y representación**» de **Arthur Schopenhauer;** Allí reconoce muchas ideas ya pensadas por él, se siente comprendido por primera vez y tiene lugar una profunda autoafirmación que le llena de consuelo y de seguridad. Por vía de Schopenhauer penetra el pesimismo que va a impregnar su **tetralogía** del «Anillo de los Nibelungos» y el estudio de las religiones orientales que mezcladas con su particular cristianismo dará lugar a la creación, en los último años de su vida, de **Parsifal**.

En esta época es huesped del matrimonio Wessendock en Zurich y Wagner se enamora perdidamente de Matilde Wessendock, esposa de su protector. En este estado de ánimo, las ideas schopenhauerianas de renuncia y de descanso de la voluntad le hacen concebir la obra cumbre de la música romántica: **Tristán e Isolda**; la historia de un amor imposible, que escoje como marco de acción la **Noche**, llena de acordes sensuales y ultrasensuales, que hacen recordar a Novalis:»*¿Tiene que llegar siempre la mañana? ¿nunca termina el poder de la tierra? ¿nunca arderá de modo perenne el sacrificio del amor?* La archirromántica exaltación de la noche en esta obra mórbida, elevada, ardiente y mágica, conduce fatalmente a la Muerte, muerte de amor liberadora en la que las almas se disuelven en el Alma del Mundo.

Las armonías inmensas y oscuras del éxtasis wagneriano, seducen tanto a la gran masa como a los más distinguidos intelectuales. **Friedrich Nietzsche**, apasionado wagneriano en una primera etapa de su vida, reflejada en su primera obra «**El nacimiento de la tragedia**», rompe posteriormente con Wagner al que acusa de diletante y demagogo. En su panfleto «**Nietzsche contra Wagner**», publicado en 1888, califica la música wagneriana de opio de los sentidos y del intelecto[15].

Efectos alucinógenos, que en todo caso son muy bien recibidos por el gran poeta **Charles Baudelaire** (1821-1867) quien en una memorable carta a Richard Wagner, escrita el 17 de Febrero de 1860, expresa su admiración y agradecimiento por haberle hecho sentir *«el mayor placer musical jamás experimentado»* y *«una extraña emoción que puede ser descrita como el orgullo y la alegría de comprender, sintiéndome invadido por un verdadero placer sensual, que recuerda el del flotar en el aire o en un mar tranquilo»*, para terminar expresándole que desde que había oído por primera vez su música se decía a sí mismo, especialmente en las horas bajas, ***«Sí al menos pudiese oir esta noche música de Wagner…».***

Richard Wagner, magnífico histrión y forjador de una estética, desde su templo de Bayreuth encantó a las multitudes europeas de finales de siglo con su melodía infinita:

> *«Esa continuidad ininterrumpida del flujo musical concebido como incesante variación. Desarrollo de núcleos temáticos, en el que cada uno tiene una identidad fija y al mismo tiempo cambiante: por una parte no debe perder jamás la fuerte caracterización primaria que garantiza su función representativa; por otra parte debe ser suficientemente dúctil para someterse a infinitas transformaciones y para hacer aflorar, cuando sea necesario, afinidades latentes con otros motivos diferentes, y colocarse así en cada aparición como punto nodal de la red infinita de relaciones que es, en su conjunto, la forma del drama»*[16] .

LA MATEMÁTICA ALEMANA (1850-1900)

Destacaremos las figuras de Dedeking y Kronecker y muy tangencialmente la de Weirstrass, que junto a la de Cantor ya son tratadas en otras ponencias de nuestro Seminario.

DEDEKIND (1831-1916)

Nacido en una familia de profesores, cursa sus estudios de matemáticas en el Colleglum Carolinum, el mismo al que también asistiera Gauss en su juventud. En 1850 entra en la Universidad de Göttingen. Después de solo cuatro semestres comienza a preparar su doctorado bajo la dirección del mismo Gauss, que por entonces contaba ya 75 años. En 1855 es aceptado como privatdozent y ese mismo año **Dirichlet**, hasta entonces destacado profesor en Berlín, acepta el honor de sustituir a Gauss en Göttingen. Dedekind pronto estrecha relaciones con Dirichlet, de quien recibe gran influencia, tanto en los cursos que éste imparte, como en las reuniones sociales que tienen a Rebeca Dirichlet como anfitriona. Posteriormente, Dedekind recordará que Dirichlet había hecho de él un «nuevo hombre». Agradecido, Dedekind empleará muchas horas de trabajo en ordenar y publicar póstumamente gran parte de la obra de su maestro. A raiz de la publicación de sus lecciones sobre teoría de números: «**Vorlesungen über Zahlentheorie**», Dedekind desarrollará la teoría de **ideales de un anillo**.

En 1858 entra en el **Politécnico de Zurich**, sustituyendo a **Raabe.** Es aquí, explicando los teoremas del cálculo a sus alumnos, cuando siente la necesidad de una auténtica fundamentación de los números reales, como él mismo explica en el prólogo a su «**Stetigkeit und irrationale Zahlen**» (1872) (Continuidad y números reales):

> «*Dirigí por primera vez mi atención hacia las consideraciones que integran la materia de este ensayo en el otoño de 1858. Como profesor en la Escuela Politécnica en Zurich me ví obligado por primera vez a dar una sesión sobre los elementos del cálculo diferencial y sentí de forma mucho más aguda de lo que lo había sentido antes la falta de un fundamento realmente científico para la aritmética. Discutiendo la noción de aproximación de una magnitud variable a un valor límite fijo, y especialmente al probar el teorema de que* ***cada magnitud que crece de forma continua, pero no más allá de todos los límites, debe naturalmente aproximarse a un valor límite****, recurrí a las evidencias geométricas. Incluso ahora considero extremadamente útil y, verdaderamente indispensable, desde el punto de vista didáctico, el recurrir a la intuición geométrica en una primera representación del cálculo diferencial, si uno no desea perder demasiado tiempo. Pero nadie negará que esta forma de introducción al cálculo diferencial no puede reivindicar ser científica. Para mí este sentimiento de insatisfacción era tan abrumador que tomé la firme resolución de seguir meditando sobre la cuestión hasta que pudiera encontrar un fundamento puramente aritmético y completamente riguroso para los principios del análisis infinitesimal.*

> *Frecuentemente se hace la afirmación de que el cálculo diferencial trata de una magnitud continua y, todavía no se ha dado en ninguna parte una explicación de esta continuidad; incluso las explicaciones más rigurosas del cálculo diferencial no basan sus demostraciones en la continuidad, sino que con mayor o menor conciencia de ello, recurren a nociones geométricas o sugeridas con la geometría o bien dependen de teoremas que nunca se establecen de un modo puramente aritmético. Entre estos encontramos, por ejemplo, el teorema arriba mencionado, y una investigación más cuidadosa me convenció de que* **este teorema, o cualquiera equivalente a él**, *se puede considerar de alguna manera una base suficiente para el análisis infinitesimal. Sólo quedaba entonces descubrir su verdadero origen en los elementos de la aritmética y así, al mismo tiempo, afianzar una definición real de la esencia de la continuidad. Tuve éxito el 24 de noviembre de 1858 y, pocos días después comuniqué los resultados de mis meditaciones a mi querido amigo Durège, con quien mantuve una larga y animada discusión».*

Dedekind no lo publica en su momento y es en 1872 cuando tiene conocimiento de unos artículos de Heine y Cantor, que inciden sobre el mismo tema y entonces se decide a hacerlo pues «... *Francamente reconozco que mi propia exposición me parece más sencilla en la forma y saca a la luz el punto vital de manera más clara*». Y la exposición de Dedekind, efectivamente, además de sencilla, es magistralmente clara y profunda. En relación a la continuidad de la línea recta dice:

> «*De la mayor importancia es el hecho de que en la línea recta haya infinitos puntos que no corresponden a números racionales. Si el punto* ***P*** *corresponde al número racional* ***a****, entonces, como es bien conocido, la longitud* ***OP*** *es comensurable con la unidad de medida usada, esto es, existe una tercera longitud de la cual las dos primeras son múltiplos enteros. Pero ya los antiguos griegos sabían y habían demostrado la existencia de longitudes inconmensurables con una unidad dada de longitud; (por ejemplo la diagonal de un cuadrado de lado unidad). Si trasportamos tal longitud desde el punto* ***O*** *sobre la recta,*

obtenemos un punto que no se corresponde con un número racional. Como además, puede ser fácilmente demostrable que existen infinitas longitudes inconmensurables con la unidad de medida, podemos afirmar que la recta ***L*** *es infinitamente más rica en puntos que el dominio* ***Q*** *de los números racionales.*

Si quisiésemos tratar aritméticamente los fenómenos de la línea recta, manifiestamente el dominio de los números racionales sería insuficiente y surge la necesidad absoluta de construir un conjunto ***R****, a partir de los números racionales, formado por unos* ***nuevos números*** *que permitan que este dominio recién creado tenga la misma* ***completitud****, o lo que es lo mismo, la misma* ***continuidad****, que la línea recta [...].*

¿En qué consiste esta continuidad? Todo dependerá de la respuesta a esta cuestión y sólamente a través de ella obtendremos una base científica para el estudio de todos los dominios continuos. El problema consiste en indicar una característica precisa de la continuidad que pueda servirnos como base para deducciones válidas. Estuve pensando en el tema por mucho tiempo y finalmente encontré lo que buscaba. El descubrimiento será diferentemente apreciado y es posible que una mayoría de gente pueda encontrarlo muy «ordinario». Consiste en lo siguiente. En la sección anterior insistíamos en el hecho de que todo punto ***P*** *de la línea recta produce una separación de la misma en dos partes tales que cualquier punto de una parte está a la izquierda de todo punto de la otra. Pues bien, creo que la esencia de la continuidad que buscamos está en la proposición recíproca. Esto es, en el siguiente principio:* ***Si todos los puntos de la recta están en dos clases tales que todo punto de la clase primera está a la izquierda de todo punto de la clase segunda, entonces existe uno y sólo un punto que produce esta división de todos los puntos en dos clases, quedando la recta dividida en dos partes.***

La mayoría de mis lectores estarán desilusionados en ver que el secreto de la continuidad, así desvelado, resida en esta sencilla observación. Pues bien, debo decir que me sentiré muy *feliz si todos encuentran el anterior principio obvio y en armonía con su idea de línea recta; Porque yo soy incapaz de dar demostración alguna de ella, ni creo que nadie sea capaz de hacerlo. El suponer esta propiedad de la recta, no es otra cosa que un* ***axioma****, mediante el cual nosotros atribuimos a la recta su continuidad.*

Si el espacio tiene alguna existencia real no es necesario que sea continuo; muchas de sus propiedades seguirían manteniéndose incluso si fuera discontinuo. Y si supiéramos con certeza que la recta es discontinua, nadie nos podría impedir, si quisiésemos, el rellenar esos huecos en ***nuestro pensamiento*** *y hacerla continua. Habríamos* ***creado*** *nuevos puntos de acuerdo con el anterior principio».*

Inspirado en su principio de continuidad, Dedekind introduce la noción de «**cortadura**» (schnitt) en el conjunto **Q** de los números racionales. Una cortadura (A_1,A_2) es **un par de subconjuntos no vacíos de Q, tales que todo número racional esté en uno de los subconjuntos A_1, ó A_2, y tales que todo número x perteneciente a A_1, es menor que todo y perteneciente a A_2, y A_2, no tiene mínimo.**

La idea de Dedekind es que los números reales pueden ser concebidos de la forma siguiente: Para cada cortadura (A_1,A_2), existe un único número real que «corresponde a» ó «produce» la cortadura (17).

Existen dos tipos de cortaduras según que el conjunto A_1, tenga o no máximo. En el primer caso, la cortadura «se produce» por un número racional, que es el máximo de A_1. Si A_1 no tiene máximo, entonces en el conjunto de los racionales hay un hueco, que corresponde a un número irracional. Es fácil probar que existen infinitas cortaduras no producidas por números racionales.

A continuación, Dedekind define un orden y las operaciones en el conjunto de los números reales y demuestra que el dominio **R** así definido, es **continuo**; esto es, *si el dominio R de todos los números reales se divide en dos clases U_1 y U_2 tales que todo número a_1 de U_1 es menor que todo a_2 de U_2, entonces existe uno y sólo un número real a, mediante el cual la división se produce.* Finalmente demuestra la tan deseada propiedad citada anteriormente: «*Si una magnitud crece continuamente, pero no más allá de todos los límites, debe aproximarse a un valor límite*».

Si comparamos la definición de cortadura con la de Eudoxo **[20]**, no hay duda de que la misma idea subyace en ambas, y sin embargo, Dedekind ha creado algo nuevo, porque para los griegos no tiene sentido otro concepto de número que no sea el natural. Esta similitud dio lugar a una viva polémica epistolar entre **Lipschitz** (1832-1903) y Dedekind, en la que aquél afirma no encontrar nada nuevo en la definición de Dedekind[18].

En 1887, Dedekind publica su libro «**Was sind und was sollen die Zahlen?**» (normalmente traducido por «Naturaleza y sentido de los números»), y en él contesta a la pregunta propuesta en el título, diciendo que «***los números son una libre creación de la mente humana que sirven para aprehender más facilmente la diferencia de las cosas***», y añade que «*únicamente a través de este proceso de construcción puramente lógico de la ciencia de los números y del continuo numérico, estaremos preparados adecuadamente para investigar las nociones de espacio y tiempo, poniéndolas en relación con este dominio numérico creado en nuestra mente*».

El propósito de esta memoria es el de explicar y «**reducir**» los conceptos de número cero, negativo, fraccionario, irracional y complejo al concepto primario de número natural, sin introducir concepciones ajenas a los números como el de magnitud medible; antes bien, dice Dedekind, este último concepto sólamente puede explicarse con toda claridad una vez que la ciencia de los números está contituída. Esta insistencia en distanciarse del concepto de magnitud medible y en general de lo geométrico, se constata de nuevo en el prólogo a la primera edición del «**Was sind ...**», cuando después de dar cuenta de las otras construcciones formales de los números reales, hechas contemporáneamente por Cantor y Weierstrass, Dedekind afirma que «*nada estaría más lejos de la verdad*» que decir que su teoría de las «cortaduras» estuviese asentada sobre el concepto de magnitud medible. Y como prueba dice:

> «*Si escogemos tres puntos **A, B y C,** no alineados, con la condición de que las distancias **AB, AC y BC** sean números algebraicos y admitimos la existencia en el espacio, únicamente de aquellos puntos **M,** para los cuales las razones de **AM, BM y CM** a **AB** son también números algebraicos, entonces es muy fácil ver que este espacio así concebido es discontinuo. Pues bien, a pesar de todos los «huecos» de este espacio, podrían realizarse en él todas las construcciones de los «Elementos» de Euclides. La discontinuidad de este espacio no sería notada en la ciencia euclídea.*
>
> *Si alguien afirma que no podemos concebir un espacio que no sea continuo yo me permito dudarlo, e insisto en el hecho de*

que sólamente un refinado tratamiento científico puede captar claramente la esencia de la continuidad y comprender que además de las relaciones cuantitativas racionales, están las irracionales y que entre éstas, además de las relaciones algebraicas también las trascendentes son concebibles.

Encuentro de gran belleza el hecho de que sin la noción de magnitud medible y simplemente a través de un sistema finito de razonamientos, se pueda llegar a la creación de un dominio continuo puramente numérico; y en mi opinión, únicamente a través de esta vía es posible captar clara y definidamente la noción de espacio continuo».

En este mismo libro, tras presentar el principio de inducción completa, Dedekind da la **definición de conjunto infinito**, hoy conocida por todos, como aquél susceptible de ser puesto en correspondencia biunívoca con un subconjunto propio de él. En el prólogo a la segunda edición de 1893 aclara que esa «propiedad» de los conjuntos infinitos, había sido ya expresada por Bolzano y Cantor; si bien ninguno de esos autores la usa como definición de conjunto infinito. Agudamente, Dedekind escoge como propiedad caracterizadora de un conjunto infinito aquello por lo que resulta más paradójico, en una especie de huída hacia adelante.

Hablaremos ahora de las relaciones y del contacto epistolar, que con el infinito como tema fundamental, mantuvo Dedekind con Cantor en el último cuarto del siglo XIX.

Cantor desarrolló una larga y fructífera correspondencia con su amigo Dedekind, que era uno de los pocos en entenderle y simpatizar con él.

En Noviembre de 1873, en un intercambio de cartas Cantor afirma que ha conseguido probar que el conjunto de los números racionales es «numerable», esto es, que puede ponerse en correspondencia biunívoca con los números naturales; pero piensa que ello no es posible con el conjunto de los números reales, aunque no tiene ninguna prueba de ello. El 7 de Diciembre de 1873, comunica a Dedekind que ha conseguido probar que el «**agregado**» **de los números reales es no-numerable**. Dedekind felicita a Cantor y muy poco tiempo después ambos demuestran que **el conjunto de números algebraicos también es numerable**. Este hecho confirmaba un teorema que recientemente había probado **Liouville** sobre la existencia de números trascendentes.

Animado por estos éxitos, Cantor escribe a Dedekind el 5 de Enero de 1874 preguntándose si «*¿Sería posible poner en correspondencia una superficie (tal vez un cuadrado, incluido su contorno) con una línea recta (quizás un intervalo, juntamente con sus extremos), de manera que a cada punto de la superficie le correspondiera un único punto de la recta, y recíprocamente?*». Aunque Cantor opinaba que la respuesta era negativa, no conseguía justificar esta opinión. Poco tiempo después, Cantor se casa con Wally Guttmann y la joven pareja pasa el verano en las montañas del Hartz, donde se reúnen con Dedekind, soltero empedernido y gran amante de la naturaleza y de los paseos por el bosque. Son los tiempos más felices en la vida de Cantor que se olvida por el momento del tema que le obsesiona.

Tres años más tarde, el 20 de Junio de 1877, en una carta a Dedekind vuelve a hacer alusión al tema anterior y esta vez dice que tiene fundadas sospechas de que la respuesta es afirmativa y adjunta una demostración que es sustancialmente válida, aunque Dedekind observa un pequeño fallo. Con fecha de 29 de junio Cantor le envía una nueva carta en la que el defecto ha quedado subsanado y en la que le dice que espera impaciente su respuesta pues hasta que él, su amigo, no la dé por válida, su sensación será de «**lo veo, pero no lo creo**». El hecho de poderse establecer una correspondencia biunívoca entre conjuntos de diferente dimensión era muy fuerte y atentaba contra la intuición.

El 2 de Julio de 1877, Dedekind contesta finalmente a Cantor, felicitándole por su interesante y provocador teorema y propone a su vez el siguiente: «**Si existe una correspondencia biunívoca entre dos dominios A y B continuos, y la dimensión de A en distinta a la de B, entonces necesariamente la correspondencia es discontinua**». Teorema que tuvo que esperar a 1910 para ser demostrado por el intuicionista Brouwer.

WEIERSTRASS (1815-1997)

Karl Weierstrass es una de las más importantes figuras de la matemática alemana, por su capacidad de síntesis y su sentido del rigor, que culmina el proceso de la **aritmetización del análisis** (ver **[12]**). Excelente maestro, siempre dispuesto a orientar y dirigir a sus alumnos en sus trabajos de post-graduados. Con Weierstrass y sus seguidores comienza lo que posteriormente se llamará **matemática** «**pura**» en la que se tiende a la generalización como un fin en sí mismo. Hay una predisposición contra la geometría y la intuición y se empieza a ser indiferentes ante la aplicación de la matemática a problemas empíricos. Como Gauss, Weierstrass pensaba que las matemáticas debían estar al servicio de los problemas físicos, pero no ser esclava de ellos.

Weierstrass, corpulento, católico y bonachón, tuvo que ganarse la vida duramente impartiendo hasta treinta horas de clase semanales en el instituto de enseñanza secundaria de Braunsberg. El poco tiempo libre que le queda lo dedica a la investigación de las matemáticas. En 1856, un artículo suyo titulado «**Teoría de las funciones abelianas**» publicado en el Journal de Crelle le hace famoso en los círculos matemáticos. Un poco más tarde y a la edad de 40 años entra como profesor asociado en la Universidad de Berlín, donde tendrá que esperar hasta 1864 para ocupar una Cátedra.

Weierstrass es de los pocos matemáticos de la Universidad de Berlín que en esos momentos acepta los nada «académicos» trabajos de Cantor; lo que le significa un empeoramiento en sus relaciones con Kronecker, ya deterioradas por divergencias en cómo se debía contruir correctamente el Análisis.

La historia parece haberle dado la razón y a lo largo de los últimos cien años su influencia Weierstrass-Cantor ha sido profunda, pero como dice **I. Grattan-Guinness [11]** en 1978, las consecuencias de este predominio en **la enseñanza de las matemáticas** a todos los niveles son más que dudosas en cuanto a su bondad. En la enseñanza universitaria se enseñan las matemáticas de manera impecable pero sin la suficiente motivación, con altos niveles de rigor que no se contrastan con otros menores para así mostrar su valor. Se rechazan las bellas y elegantes intuiciones de la geometría y se arrebata a las matemáticas la atmósfera de descubrimiento y creación. En la enseñanza primaria y secundaria los estragos causados por la teoría de conjuntos y las llamadas «matemáticas modernas» durante el período 1960-1980 han sido denunciados por matemáticos y pedagogos. Grattan-Guinness aboga por una reforma educativa en que se vuelva a considerar la **Geometría** como una parte central en la enseñanza de las matemáticas, tanto en la escuela como en la universidad.

KRONECKER (1823-1891)

Nacido en una rica familia judía que le proporciona una esmerada educación, Kronecker será un amante de la cultura y un fino «bon vivant» que dedicará gran parte de su tiempo a las matemáticas de una manera desinteresada y ello se lo permitirá su cómoda posición de rentista. Recibe la enseñanza primaria en su casa de la mano de escogidos preceptores. Ya en el gymnasium (Instituto), tiene como profesor de matemáticas a **E.E.Kummer**, quien es determinante en su formación intelectual. Posteriormente serán amigos, y compañeros en la tarea de impartir la docencia en la Universidad de Berlín.

En 1841 se matricula en esta Universidad y allí asiste a las clases de **Dirichlet** y **Steiner**. Se interesa por la filología clásica y sigue los cursos de **Schelling**. Estudiará las obras de **Descartes, Spinoza, Leibniz, Kant, Hegel y Schopenhauer** (será un ferviente hegeliano y no apreciará la filosofía de Schopenhauer). Entre sus muchos intereses culturales se cuenta el de la **música** y abre los salones de su magnífica casa berlinesa a la celebración de veladas y encuentros a los que acuden destacadas figuras de la música. **Félix Mendelssohn**, cuñado de **Dirichlet**, será un asiduo a estas reuniones, en las que Kronecker se permitirá tocar el piano para sus invitados.

En 1845 presenta su tesis doctoral: «**De unitatibus complexis**», que es un estudio sobre algunas unidades que aparecen en los cuerpos ciclotómicos, cuerpos de números algebraicos relacionados con el problema de dividir una circunferencia en n arcos iguales. Muy poco tiempo después, Kronecker tiene que hacerse cargo de los negocios de la familia por el fallecimiento de su tío el banquero y en los siguientes ocho años realiza esta labor eficientemente y obtiene notables éxitos financieros. En 1848, se casa con su prima **Fanny Prausnitzer**, convirtiéndose ahora en propietario del banco. En 1853, cansado de ganar dinero, vuelve de nuevo a la especulación matemática y filosófica.

En 1855 **Dirichlet** se va a Göttingen para ocupar la plaza vacante tras el fallecimiento de Gauss. **Kummer** ocupa la plaza dejada por Dirichlet, y un año más tarde es también llamado a Berlín Weiersstrass que hasta entonces era un profesor de instituto en provincias. En 1860 Kronecker es nombrado miembro de la Academia de Ciencias Berlinesa, lo que le permitirá la posibilidad de impartir cursos, no remunerados, en la Universidad. Nunca tuvo demasiados alumnos, pues sus clases eran difíciles de seguir, y en ellas Kronecker daba libre curso a su inspiración. Se dedica especialmente al Algebra y a la Teoría de números y es seguramente el matemático de la época que más y mejor ha desarrollado la **Teoría de Galois** sobre la resolución algebraica de ecuaciones. Es creador junto a Dedekind y Kummer de la teoría de **anillos e ideales**, pero Kronecker pasará a la Historia de la matemática como el más destacado «purista» y defensor de la ortodoxia tradicional de su época. Kronecker es **finitista, constructivista y algorítmico**.

No acepta la existencia del infinito actual y abomina de la teoría de conjuntos cantoriana y de su clasificación de «los infinitos». En ésto no se distingue mucho de la oposición tradicional que desde los tiempos de Aristóteles se venía ejerciendo contra el infinito actual. Kronecker tiene una visión algorítmica y constructiva de las matemáticas y para él es esencial que una formulación matemática pueda ser resuelta algorítmicamente, esto es, a través de un procedimiento computacional mediante el cual pueda ser terminado en un número de pasos, al que «a priori» pueda serle determinado una cota superior. Critica a Dedekind su concepción no algorítmica de ideal de un anillo (no dar un procedimiento mediante el cual se pueda determinar si un determinado elemento del anillo está en el ideal), y piensa que esta postura es **innecesaria**. Pero, como dice **Harold Edwars** en **[6]**, las razones de Dedekind son ideológicas: aceptar la necesidad del algoritmo en el Algebra sería abrir la puerta a un requerimiento similar en el Análisis y las «cortaduras» de Dedekind no pasarían por ese filtro algorítmico.

Hay pruebas documentales de que Kronecker, ya como editor del **Journal de Crelle**, en 1870, obstaculizó la publicación de un artículo de **Heine** por la consideración que en éste había de «*una serie trigonométrica arbitraria*». Para Kronecker solamente tenía sentido una serie infinita explícitamente y constructivamente dada. No admitiría tampoco el comienzo de un teorema, tan normal en nuestros días, que dijese: «*sea un número real arbitrario ...*». Cuando se «*trata*» con el infinito se debe ser muy específico, tanto como para que quede virtualmente reducido a lo finito. Un concepto matemático no está bien definido, dice Kronecker, si no se puede en cada caso particular decidir si la definición es verificada o no. Así, el concepto de número irracional no estaría bien definido (la constante de Euler?).

Kronecker, profundo conocedor también de la teología cristiana, interpreta, contrariamente a Cantor, un Dios que no ama el infinito actual. Según su famosa frase, «***Dios creó solamente los números naturales*** *y todo el resto lo han hecho los hombres*» y así, el Dios de Kronecker es un Dios sereno y apolíneo que no quiere ver a su criatura más amada desvariando y perdida en el laberinto del infinito.

Kronecker es un clasicista y prefiere la música de Brahms a la de Wagner. Apasionado pero no grandilocuente, su voz se hará sentir tanto en los ámbitos científicos berlineses - donde cada vez irá contando con más poder - como en París y Londres a donde viaja frecuentemente, invitado por la **Academie Française y por la Royal Society**, de las que terminará siendo miembro. Y esa voz defenderá la ortodoxia de la matemática frente a esas peligrosas nuevas ideas que pueden llevarla al desastre. Esta actitud provocará conflictos y tensiones entre los que le rodean. En particular, sus relaciones con el gran matemático Weierstrass se harán cada vez más difíciles. En 1885, Weierstrass con setenta años, cansado y enfermo, escribe a su amiga la matemática **Sonia Kowalewski**:

> «... *Y lo peor es que Kronecker usa su autoridad para proclamar que* ***todos*** *los que hasta ahora han trabajado para establecer la teoría de funciones son* ***pecadores ante los ojos del***

Señor *... Cuando Kronecker es capaz de decir lo que sigue, y que repito palabra por palabra: «Si me alcanza el tiempo y las fuerzas no me abandonan, probaré al mundo matemático que la aritmética, y no sólo la geometría, puede abrir el camino al análisis y aún con más rigor. Y si yo no puedo hacerlo, los que vengan después de mí mostrarán lo incorrecto de* ***todas*** *esas conclusiones a las que el* ***así llamado*** *análisis ha llegado en estos momentos».*

Tal veredicto de un hombre tan eminente y al que admiro sinceramente por sus logros en la investigación matemática, es no sólo una humillación para aquellos a los que estigmatiza, sino que es una llamada a las jóvenes generaciones a que abandonen a sus maestros y se unan a la disciplina de un nuevo sistema que ***deberá*** *ser fundado».*

La figura de Kronecker aparece hoy como reaccionaria y antipática, sobre todo por el apabullante triunfo de las matemáticas cantorianas una vez superadas las crisis de los fundamentos, que cual enfermedades infantiles pusieron en grave aprieto el edificio de las matemáticas. (Para algunos autores, como **Morris Kline**, la matemática sigue estando en crisis [**16**]).

Se ha exagerado la responsabilidad de Kronecker y de su manifiesta oposición a las ideas de Cantor, en la progresiva enfermedad mental de éste. Los modernos biógrafos de Georg Cantor, entre los que destaca Joseph Dauben [**4**], dan cuenta de lo temprano que se instala la enfermedad, que se manifiesta con frecuentes crisis maníaco-depresivas, en una personalidad ciclotímica. Dauben afirma que entre la enfermedad mental de Cantor y las matemáticas existen importantes conexiones:

«Ciertos documentos sugieren que ocasionalmente la enfermedad le proporcionó periódicos respiros de los asuntos cotidianos, durante los cuales pudo insistir con ahinco en sus ideas matemáticas, ya fuera en la soledad del hospital, ya en la tranquilidad de su casa. ***La enfermedad pudo también alentar su convicción de que los números transfinitos le habían sido comunicados por Dios****».*

Así pues, la enfermedad de Cantor y las matemáticas se alimentaban entre sí, en una extraña y divina simbiosis. Volviendo a la figura de Kronecker hay que resaltar su importancia como impulsor de una corriente de pensamiento crítico que obliga a analizar en profundidad los fundamentos de la matemática. **Poincaré, Brouwer, Hermann Weil,** son grandes matemáticos que conectaron con Kronecker dando lugar a una escuela matemática denominada **Intuicionista**[19].

Hilbert, el gran matemático alemán del siglo XX, en un famoso artículo sobre el infinito, apoya decididamente la forma de hacer análisis de Weierstrass y afirma que la teoría de los números transfinitos de Cantor es «*uno de los más bellos productos que ha fabricado la mente humana*». No obstante, considera que el concepto de infinito matemático está aún pendiente de ser completamente clarificado y acepta que el infinito actual es un producto de nuestra mente, sin realización en el mundo físico. Con la aparición de las paradojas de **Zermelo y Russell** en la teoría de conjuntos, el mundo de las matemáticas se tambalea. Pronto se encuentran vías satisfactorias de salvar las contradicciones y en el futuro, dice Hilbert:

> «*Tendremos que analizar cuidadosamente las vías de crear nuevos conceptos y los modos de inferencia que son provechosos; los cuidaremos y defenderemos, haciendo uso de ellos cada vez que lo necesitemos.* ***Nadie será capaz de apartarnos del paraíso que Cantor creó para nosotros***»

El lógico y filósofo austríaco **Ludwig Wittgenstein** (1889-1951), considera que el uso correcto del término infinito es para caracterizar la forma de cosas finitas o generalizar las posibilidades sin fin que las cosas finitas presentan. Consecuentemente, describir algo como actualmente infinito es no solamente un error, sino que además es una incoherencia del lenguaje. En su libro «**Observaciones sobre los fundamentos de las matemáticas**» escribe en relación a la frase anteriormente citada de Hilbert:

> «*Imagina que la teoría de conjuntos hubiera sido inventada por un satírico como una especie de parodia de la matemática. Que después se hubiera encontrado un sentido racional y se la hubiera incorporado a la matemática. (Puesto que, si uno la puede considerar como el paraiso de la matemática, ¿por qué otro no como una broma?)*».

Hemos hecho un recorrido, necesariamente incompleto, por la matemática alemana del siglo XIX, tras los pasos del infinito. Como dice **Jan Sebestik** (20): «*Una matemática en sí instalada* ***en el corazón del infinito que contempla con los ojos de Dios.*** *Esta matemática que parece haber llegado hoy al término de su recorrido; nadie puede, sin embargo, decir hoy si culminará su separación con la teología para devenir simplemente una matemática humana*»

Y PARA TERMINAR, UNA CONSIDERACION INTEMPESTIVA

Hermann Broch (1881-1951), judío vienés, matemático, filósofo y reputado escritor, se refugia en 1938 en los EE.UU., huyendo de la persecución nazi. En su novela «**Los no culpables**» (1949), Zacarías es un profesor de matemáticas de instituto, ebrio de infinitud y que a comienzos de los años treinta está muy lejos de pensar, como tantos otros alemanes, el triste destino de su pueblo y los horrores que todos ellos iban a desencadenar. Proféticamente dice:

> «*[...] Pues somos el pueblo del Infinito, el pueblo, pues, de la muerte, mientras que los demás se han quedado en la Finitud, en el espíritu materialista, en el espíritu venal, prisioneros de lo conmensurable, pues únicamente quieren conocer la vida y no la muerte, y por eso, aunque en apariencia se puedan elevar con tanta facilidad y tan por encima de sí mismos, luego no son capaces de superar los límites de lo Finito. Por su salvación debemos infligirles el castigo de la Infinitud preñada de muerte. ¡Formidable lección, qué duda cabe, durísima lección!. Es difícil escucharla, y más difícil aún impartirla, dado que a nosotros, los maestros, no sólo nos ha sido impuesta la dignidad del juez, sino además la indignidad del verdugo. Sucede que en el infinito todo subsiste a un mismo tiempo: dignidad e indignidad, lo santo y lo que está por redimir, la benevolencia y la malevolencia, y en ello reside justamente la maldición de la gracia que nos fue impuesta, la doble función en el ejercicio de la cual nos volvemos odiosos para nosotros mismos así como a los demás: todos los golpes que nos vemos forzados a propinarles se vuelven contra nuestro corazón; todos los castigos que debemos infligirles son castigo para nosotros mismos. Nuestro magisterio universal es una maldición de la gracia, y con todo nos hemos hecho cargo de él por amor de la veracidad que mora en la Infinitud y por*

consiguiente en nosotros: hemos asumido esa tarea como alemanes y no hemos querido rehusarla, sabedores de que somos los únicos en desconocer la hipocresía».

El drama de Hermann Broch es el de sentirse al mismo tiempo víctima y verdugo, el de contemplar atónito el sutil pero firme nexo entre un poema de Hölderlin, un aria de «la Walkiria» wagneriana y el extremo horror de **Auschwitz**.

Thomas Mann, premio Nobel de Literatura en 1922, wagneriano y antinazi, casado con Katia Pringsheim,(hija de Alfred Pringsheim, catedrático de matemáticas en Munich, judio y heredero de una gran fortuna, aficionado y patrocinador de la música de Wagner), es compañero de exilio de Hermann Broch. Menos caústico que éste, afronta también la responsabilidad de su pueblo. En «**Doktor Faustus**», escrita durante la segunda guerra mundial se describe la gran importancia que la música juega en el alma alemana, con la consiguiente carga de irracionalidad. En una carta al director de la revista «**Common sense**», en 1940, Thomas Mann acepta «*la complicada y dolorosa interrelación que indiscutiblemente existe entre la esfera wagneriana y la calamidad nacional-socialista ... El nacional-socialismo, con toda su inefable vileza empírica, es la trágica consecuencia de la mítica inocencia política del espíritu alemán*».

Más adelante dice: «*No nos engañemos. El nacional-socialismo tiene que ser derrotado. Estas palabras tienen un sentido muy concreto, y un sentido espiritual también. Porque no hay más que una Alemania, no dos, una buena y la otra mala. Y Hitler, con toda su barbarie, no es fruto de la casualidad. **El nunca habría sido posible sin ciertos condicionantes psicológicos más profundos** que la inflación, el paro, la especulación capitalista y la intriga política*».

Cuando comenzamos la elaboración de esta ponencia, no estaba previsto este final, pero es que como dice **J. L. Borges: «Hay un concepto que es el corruptor y el desatinador de los otros. No hablo del mal, cuyo limitado imperio es la ética; hablo del infinito**».

NOTAS

(1) En el capítulo XVIII del Libro XII de «**La ciudad de Dios**», –en el que Agustín de Hipona trata de los ángeles–, leemos una «**réplica a quienes sostienen que ni la ciencia de Dios es capaz de abarcar lo infinito**»:

«*En cuanto a la afirmación de que ni siquiera la ciencia de Dios puede llegar a comprender lo infinito, sólo les queda para sumergirse en la vorágine de su profunda impiedad* ***tener la osadía de decir que Dios no conoce todos los números****. Que son realmente infinitos es totalmente cierto. Porque en cualquier número que creas haber llegado al fin, ese mismo lo puedes aumentar ... ¿Así que Dios, por esta infinidad propia de los números, no llegaría a alcanzarlos todos; su ciencia solamente llegaría a una cierta cantidad de números, ignorando el resto? ¿qué insensato podrá sostener esta afirmación? Supongo que no se atreverán a despreciar los números y decir que no tienen que ver con la ciencia de Dios. Platón, gran autoridad entre ellos, presenta a Dios formando el mundo con números ... .*

La infinitud del número, aunque en realidad no exista ningún número que exprese una cantidad infinita, no escapa a Aquel cuya sabiduría sobrepasa todo número. Ahora bien, si todo lo que abarca la ciencia queda contenido por la comprensión del sabio, tenemos que toda infinitud queda de algún modo contenida por Dios, ya que no es incomprensible para su ciencia ...

(2) Obviaremos la figura de Gauss en esta exposición, por haber sido ya tratada en una ponencia del Seminario «Orotava» año III: **Gauss: Mathematicorum Princeps**. Mariano Martínez Pérez.

(3) Cantor, como muchos de los matemáticos alemanes, es un estudioso de la teología cristiana. Aunque de religión protestante, se acercó progresivamente a la religión católica, con algunos de cuyos miembros oficiales en Roma mantuvo correspondencia en relación con su teoría de los números transfinitos. Conoce y comenta el párrafo de San Agustín (nota 1) y en momentos de duda o vacilación sobre la veracidad de su teoría, acude a la garantía de Dios:

«*Mi teoría se yergue firme como la roca; las flechas que contra ella se lancen, rápidamente se volverán contra su arquero. ¿Cómo puedo yo saberlo? Porque la he estudiado desde todos los ángulos durante muchos años; porque he examinado todas las objeciones que hayan podido hacerse contra los números infinitos, y sobre todo porque, por así decirlo, he seguido sus raíces hasta la causa primera e infalible de todas las cosas creadas*».

(4) Este tema está ampliamente desarrollado en «**Las huellas de Fausto**», **de José M. González García**.

(5) Ver la edición bilingüe de «**Himnos a la noche**» en traducción de José María Valverde y prólogo de Rafael Argullol.

(6) Información y datos sacados de «**Lo que nos enseña la investigación histórica reciente acerca del sistema educativo alemán**». Heinz-Elmar Tenorth. Revista de Educación. Mayo-Agosto 1991.

(7) Galileo, para probar en uno de sus teoremas físicos la igualdad $t_1/t_2 = s_1/s_2$. (t_1, t_2 tiempos; s_1 y s_2 espacios), y ante la posibilidad de que t_1/t_2 y s_1/s_2 sean magnitudes inconmensurables, se ve en la obligación de demostrarla aplicando la **def. V del Libro V** de los «Elementos» de Euclides,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \forall m,n \in N \qquad ma > nb \Rightarrow mc > nd$$

$$ma = nb \Rightarrow mc = nd \qquad ma < nb \Rightarrow mc < nd$$

Para una excelente exposición de la Teoría de las Proporciones de Eudoxo y de su relación con Dedekind, ver la ponencia de **Antonio Martinón en [20]**, pags. 310-340.

(8) En la **prop. 1 del Libro I** de los «Elementos», Euclides usa ya el hecho de que dos circunferencias se cortan en un punto sin demostrarlo y sin postulado de continuidad.

(9) Dice Leibniz:

«*Estoy hasta tal punto a favor del infinito actual que, en lugar de admitir que la naturaleza lo aborrece, sostengo que por todas partes lo ostenta, para mejor hacer resaltar* ***la perfección de su autor****. Por lo tanto, creo que no existe parte alguna de la materia que, no digo ya que no sea divisible, sino que no esté de hecho ya dividida; y, en consecuencia, la más ínfima partícula debe considerarse como un mundo lleno de una infinidad de criaturas diferente*».

(10) Galileo niega como matemático que se pueda razonar con argumentos definitivos sobre el infinito, aunque como filósofo se conceda la libertad de hacer conjeturas «arbitrarias y no necesarias» sobre la naturaleza del infinito. En relación a la

paradoja «del todo y la parte», que se le presenta cuando compara los números naturales y los números cuadrados de estos números, concluye que los «*atributos de igual, mayor y menor no tienen lugar en el infinito, sino sólo en las cantidades terminadas*».

(11) En los últimos tiempos parece existir un renovado interés por la obra de Bolzano. Ver **[15]** y **[24]**.

(12) Para la relación entre las series de Fourier y los matemáticos Dirichlet y Riemann, ver la ponencia «**El rigor en el análisis matemático del siglo XIX: de Cauchy a Weierstrass**» **de Jesús Hernández**, en Seminario «Orotava» (19-01-94).

(13) Ver **[23]**: «*Ante una figura como la de Wagner, depositaria de una ilimitada capacidad de síntesis, siempre receptor activo de todo cuanto le rodea sea o no musical, no nos hemos de extrañar de que Thomas Mann hace ya cincuenta años, vea a Wagner definiendo las características esenciales de la segunda mitad del siglo XIX y, por supuesto, no sólo desde la vertiente intrínsecamente musical ni tampoco desde una perspectiva de «las artes» en general, sino desde la óptica de una absorción de todas las inquietudes de su tiempo, desde la novela hasta la política*».

(14) Feuerbach (1804-1872), es el padre del ateismo antropológico. Su ateismo no es una simple negación de Dios, sino una apasionada defensa del hombre, un «antropoteísmo». A esta conclusión llega Feuerbach tras realizar que la **esencia del cristianismo** reside en que Dios y el hombre son la misma cosa. Dios es una realidad creada por el hombre para su propio servicio. La religión es un puro egoísmo del hombre.

(15) En este mismo escrito, Nietzsche nos describe con ferocidad el «peligro» de la música wagneriana:

«*La intención que guía a la música moderna en lo que hoy, de un modo fuerte, pero poco claro, es llamado* «***Melodía infinita,*** *puede ser explicada con estas palabras: Se entra en el mar, poco a poco se va perdiendo pie y acabamos por abandonarnos al favor o disfavor del elemento: hay que «nadar». En la música antigua, con una cadencia ligera o solemne o fogosa, más deprisa o más despacio, había que hacer otra cosa; esto es, danzar ... Wagner buscó otro género de movimiento: invirtió la premisa fisiológica de la música que anteriormente existía. Nadar, liberarse, no caminar ya. Quizá con esto hayamos dicho lo decisivo. La «melodía infinita» quiere* *precisamente destuir toda simetría de tiempo y de fuerza, quizá la escarnece ... De la imitación, del predominio de semejante gusto se ha engendrado un peligro para la música: la completa degeneración del sentimiento del ritmo. El peligro llega al extremo cuando tal música se apoya cada vez más estrictamente en un histrionismo y en una mímica completamente naturalista, no dominada por ninguna ley plástica, una mímica que quiere «efectos» y nada más. Lo expresivo a toda costa, y la música sierva y esclava del gesto: éste es el fin.*

(16) Esta última descripción de la «melodía infinita», está entresacada del libro «**Historia de la Música. El siglo XIX**» **de Renato di Benedetto**. (Ed. Turner).

(17) Muchos autores que adoptaron las ideas básicas de Dedekind prefirieron, sin embargo, no seguirlo en su definición de los números reales como creaciones de la mente correspondientes a cortaduras en el sistema de los números racionales. Entre otros, **B. Russell** y **Heinrich Weber** criticaron esta definición. (Ver Bibliografía **[21]**).

(18) Una interesante descripción de esta polémica epistolar se encuentra en **[2]** págs. 268-270

(19) Ver el capítulo: **Matemática constructiva de Roger Apéry**, del libro «**Pensar la matemática**» (Ed. Tusquets)

(20) Jan Sebestik, especialista en la matemática de Bolzano, autor del libro «**Logique et mathématique chez Bernard Bolzano**». La presente cita está sacada del prólogo a la primera edición en español (1991) de la obra «**Paradojas del infinito**» de Bolzano, hecha en Ciudad de México. Facultad de Ciencias.

BIBLIOGRAFÍA

[1] **BELL, E. T.**: (1937) Men of mathematics. Simon and Schuster.
[2] **BOTTAZZINI, U.**: (1986) The higher calculus: A History of real and complex analysis from Euler to Weierstrass. Springer-Verlag.
[3] **BROCH, H.**: (1961) Les irresponsables. Gallimard.
[4] **DAUBEN, J.**: (1990) Georg Cantor. Princeton University Press.
[5] **DEDEKIND, R.**: (1963) Essays on the theory of numbers. Dover.
[6] **EDWARDS, H.**: (1989) The history of modern mathematics. (Kronecker's views on the foundations of mathematics). A. Press.
[7] **FAUVEL, J.**: (1987) The history of mathematics: a reader. Macmillan Press.
[8] **GILLISPIE**: (1971) Dictionary of scientific biography. Scribner's
[9] **GONZALEZ, JOSE M.**: (1992) Las huellas de Fausto. Tecnos.
[10] **GRATTAN-GUINNES, I.**: (1984) Del cálculo a la teoría de conjuntos (compilación). Alianza Universidad.
[11] **GRATTAN-GUINNES, I.**: «Lectures on the history of mathematics and mathematical education». Math. chronicle 7 (1978) 105-123.
[12] **HERNANDEZ, J.**: «El rigor en el análisis matemático del siglo XIX: de Cauchy a Weierstrass» (1994). Seminario «Orotava».
[13] **HOLDERLIN**: (1986) Obra poética completa. Ed. Río Nuevo.
[14] **INNERARITY, D.**: (1993) Hegel y el romanticismo. Tecnos.
[15] **JOHNSON, D. M.**: «Prelude to dimension theory: the geometric investigations of Bolzano» Arch. Hist. Exact S., **20** (1979), 97-188
[16] **KLINE, M.**: (1985) La pérdida de la certidumbre. Siglo XXI.
[17] **LOMBARDO-RADICE, L.**: (1981) L'infinito. Editori Riuniti.
[18] **MANHEIM, J.**: (1964) The genesis of point set topology. Pergamon.
[19] **MANN, T.**: (1986) Richard Wagner y la música. Plaza y Janés.
[20] **MARTINON, A.**: (1992) Historia de la Geometría Griega. Seminario «Orotava» de Historia de la Ciencia. Pags. 310-340.
[21] **MOORE, A. W.**: (1993) The infinite. Routledge.
[22] **NOVALIS**: (1985) Himnos a la noche. Icaria.
[23] **PEREZ MASEDA, E.**: (1993) Música como idea, música como destino: Wagner- Nietzsche. Tecnos.
[24] **SEBESTIK, J.**: (1992) Logique et mathématique chez Bernard Bolzano. Vrin, París.
[25] **SMITH, D. E.**: (1959) A source book in mathematics. Dover.
[26] **ZELLINI, P.**: (1980) Breve historia del infinito. Siruela.