APUNTES SOBRE LAS GEOMETRÍAS NO-EUCLÍDEAS

ANA DELGADO
Seminario de Matemáticas I.B. Rafael Arozarena

INTRODUCCIÓN

La geometría no euclídea, uno de los descubrimientos más importantes del s. XIX –técnicamente el más simple y el más profundo, como dice Morris Kline– surge, aunque resulte paradójico, de la geometría euclídea.

Fue precisamente el deseo de los matemáticos de poder llamar a la geometría euclídea, La Geometría (única y verdadera), con la certeza de que cada una de sus definiciones, cada uno de sus postulados y nociones comunes, cada una de sus proposiciones, estaba colocada en el lugar y orden correcto, el que tras 2000 años de continuos esfuerzos, desembocó en el reconocimiento de la existencia de otras geometrías tan válidas como ella. La geometría euclídea perdía sus atributos divinos sumergiendo a la comunidad matemática en una incertidumbre de la que en este siglo somos herederos.

La consecuencia más significativa de esta privación ha sido una nueva concepción de la naturaleza de las matemáticas y concretamente de la geometría. Ésta se separa de la realidad física, se desprende de ella, quedándose con su carácter puramente deductivo y formal. Su veracidad ya no puede buscarse en el mundo de los sentidos sino en su propia estructura interna. En este contexto surgen las diversas escuelas –intuicionista, formalista y logicista– que envuelven el pensamiento filosófico matemático de nuestro siglo.

Pero ¿qué o quién fue el culpable de esta honda transformación, de esta revolución geométrica?

Desde muy temprano, uno de los postulados de Los Elementos de Euclides, llamó la atención provocando polémicas en cuanto a su condición de evidencia. Era el 5° axioma o Postulado de las Paralelas.

Los intentos por demostrarlo o sustituirlo por otro más claro empiezan desde el siglo I a.C. con Posidonio, tocan a personajes conocidos como Proclo, Saccheri, Lambert, Laplace o Legendre y llegan hasta Gauss, Lobatchevsky y J. Bolyai, considerados hoy los fundadores de la geometría no euclídea, al admitir la posibilidad de otras geometrías apoyadas en principios diferentes (opuestos) a los del 5° Postulado.

Sin embargo, el reconocimiento de éstas como objeto válido de estudio y la demostración de la independencia del Postulado de las Paralelas del resto de los axiomas, no quedó zanjado hasta las obras de Riemann, Beltrami y Klein.

Este trabajo pretende dar una visión muy somera del arduo proceso que lleva desde la geometría de Euclides hasta la de Gauss-Lobatchevsky-Bolyai, geometría hiperbólica; exponer algunos de sus resultados en contraposición con los euclídeos; hacer referencia al profundo cambio que ocasionó este hallazgo, mencionando algunas de sus implicaciones filosóficas; en fin, hacer partícipe al lector de cuanto he podido descubrir, desenmarañar en este mi primer acercamiento al sorprendente mundo de la geometría no euclídea.

LA GEOMETRÍA DE EUCLIDES

Como ya he dicho, el nacimiento de la geometría no euclídea tiene sus raíces en la geometría de Euclides. Es, por tanto, necesario conocer la segunda para poder entender la primera.

Durante su primer año, este Seminario dedicó varias ponencias a Los Elementos de Euclides y entre ellas se encuentra una exposición detallada del problema de las paralelas[1], fundamental para este trabajo.

[1] Historia de la Geometría Griega. *Euclides: Los Elementos. Teoría de las paralelas. Método de exhaución.*

Con el fin de no repetir aspectos ya vistos, intentaré hacer mención sólo de aquellas ideas relacionadas con esta gran obra y que conviene tener presentes a la hora de emprender el estudio del tema que nos ocupa.

La palabra *geometría* viene del griego «*geometrien*» (*geo*=tierra y *metrien*=medida). Parece, por tanto, que la geometría era originariamente la medida de las tierras. Pero ¿podemos quedarnos con esta afirmación así, sin más?. Según Boyer, cualquier declaración sobre sus orígenes será necesariamente arriesgada y conjetural ya que en cualquier caso sus semillas son más antiguas que la escritura y por ello, sujetas a interpretaciones. Incluso entre los griegos, cuando se trata este tema, vemos opiniones encontradas. Tanto Heródoto (484-420 a.C.) como Aristóteles (384-322 a.C.) sostenían que su origen estaba en Egipto pero el primero le atribuía un carácter de tipo práctico (necesidad de reorganizar las tierras inundadas periódicamente por el río Nilo) mientras que para el segundo tenía una base de connotaciones meramente contemplativas (como consecuencia de la existencia de una clase sacerdotal ociosa). Para Boyer los orígenes hay que buscarlos mucho antes:

> ...«*El hombre neolítico puede haber disfrutado de escaso tiempo de ocio y haber tenido pocas necesidades de utilizar la agrimensura, y sin embargo sus dibujos y diseños revelan un interés en las relaciones espaciales que prepararon el camino a la geometría. La alfarería, la cestería y los tejidos muestran en sus dibujos ejemplos de congruencias y simetrías que son en esencia partes de la geometría elemental*»...

Lo que sí está hoy casi universalmente admitido es que los primeros en dar proposiciones generales cuya validez se establecía mediante el razonamiento deductivo, fueron los griegos.

El paso de

«SI EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO DOS DE SUS LADOS MIDEN 3 Y 4, EL OTRO LADO MIDE 5»

proposición particular con su verificación experimental

a

«EN TODO TRIÁNGULO RECTÁNGULO LA SUMA DE LOS CUADRADOS DE LOS CATETOS ES IGUAL AL CUADRADO DE LA HIPOTENUSA»

proposición general con verificación racional ha sido, al menos en matemáticas, la contribución más grande de esta civilización.

El querer dar enunciados como el segundo planteó a los griegos el problema de cómo comprobar su validez. Se podría –como hoy hacemos muchos profesores de matemáticas cuando no queremos demostrar un teorema a nuestros alumnos– por ejemplo, dibujar gran cantidad de triángulos rectángulos y medir sus lados para constatar que efectivamente la relación se cumple. Pero esto no basta. Siempre queda la duda de que para algún triángulo no dibujado la suma de los cuadrados de sus catetos no coincida con el cuadrado de su hipotenusa y además, por otro lado, queda la pregunta de ¿hasta qué punto son nuestras medidas exactas?

Mentes tan sutiles como las de los pensadores griegos no podían dejar la cuestión en este punto. Poco a poco fue perfilándose la idea de que sólo la razón podía producir certeza. En sus trabajos fue tomando forma un tipo de organización sistemática en la que cada proposición se demuestra utilizando el razonamiento (reglas de razonamiento: lógica) y proposiciones ya aceptadas –por haber adquirido el carácter de verdaderas– anteriormente. Este modelo de estructura es lo que hoy llamamos *sistema hipotético-deductivo* o *sistema axiomático*. Las obras en que fue cuajando, Los Elementos, cuyo máximo exponente son Los Elementos de Euclides.

Euclides (s. IV a.C.), según Proclo, discípulo de Platón, dio a luz su prodigioso tratado alrededor del año 300 a.C. El libro de texto más grande de todos los tiempos; uno de los más difundidos, editados y estudiados. Su influencia ha sido impresionante. Incluso hoy, la visión del espacio geométrico de un alumno de bachillerato es exclusivamente euclídea. Greenberg llega a decir de él:

> ...«*el método axiomático usado por Euclides es el prototipo de todo lo que hoy llamamos «matemática pura». Pura en el sentido de «pensamiento puro»: no es necesario realizar ningún experimento físico para verificar que los enunciados son correctos, solamente el razonamiento en las demostraciones debe ser comprobado [...]. Pero también en el sentido de que no contiene aplicaciones prácticas*»...

De Luis Vega en La trama de la demostración recogemos estas dos citas:

> ...«*La composición de Euclides fue, para empezar, un repertorio básico de resultados y proposiciones demostradas tan cumplido que hizo ocioso cualquier otro tratado matemático del mismo alcance y género*»...

...«La contribución de Euclides fijó una especie de estándar metodológico o nivel básico de exigencia tanto en lo referente a la sistematización deductiva de un cuerpo de conocimiento como en lo referente al rigor informal de la prueba matemática»...

Siguiendo a Greenberg, quizás sea conveniente en este punto hacer un paréntesis para responder de forma sucinta a la pregunta ¿en qué consiste el método hipotético-deductivo? Para un estudio más detallado puede consultarse La matematica come sistema ipotetico-deduttivo de Silvio Maracchia.

EL MÉTODO HIPOTÉTICO DEDUCTIVO

Toda ciencia trata del conocimiento de determinado tipo de propiedades de ciertos objetos. Es necesario, por tanto, empezar por ponerse de acuerdo sobre dichos objetos: qué son, cómo se definen. Ahora bien, al decir qué entendemos por tal o cual «cosa», nos vemos obligados a emplear términos que, a su vez, ya deben haber sido definidos mediante otros términos. Este proceso de regresión en la definición se haría infinito si no contamos con algunos elementos –los menos posibles– sobre los que haya un entendimiento sin necesidad de explicitarlos. Son los *términos indefinidos o fundamentales*. Éstos, de todas formas, quedan delimitados por las atribuciones que les dan sus propiedades, las proposiciones de dicha ciencia. Así, podríamos decir que éstas proporcionan, en cierta manera, una «definición» de los términos fundamentales.

La veracidad de las proposiciones se consigue mediante la demostración: argumentando lógicamente sobre resultados aceptados (demostrados) previamente, se concluye una inferencia que es así y no puede ser de otra manera. Igual que en el caso de las definiciones tendremos, pues, proposiciones primordiales no demostradas o *axiomas* y proposiciones demostradas o *teoremas*[(2)].

Por supuesto, será imposible una demostración si no hay un convenio sobre cómo y dónde un enunciado se sigue «lógicamente» de otro; esto es, si no partimos de un canon de razonamiento.

A continuación reproducimos un esquema de Silvio Maracchia[(3)] con el objeto de clarificar cómo es la estructura de una ciencia hipotético-deductiva:

[(2)] Ésta es una visión moderna de lo que debe ser una ciencia hipotético-deductiva. Al compararla con Los Elementos de Euclides, observamos diferencias en cuanto a los «objetos»: Euclides los define todos, incurriendo en errores que nombraremos más adelante.

[(3)] Obra citada

CIENCIA

ENTES
(objetos de los que se habla)

- **Fundamentales** *(indefinidos)*
- **Derivados** *(definidos)*

PROPOSICIONES
(propiedades de los entes)

- **Primitivas** (postulados) *(indemostrables)*
  - *(Elegancia)*
    - *Suficiencia*
    - *Independencia*
  - *(Rigor)* —— *Compatibilidad*
- **Teoremas**

Maracchia dice de los postulados o axiomas, puntos de partida de la ciencia, que deben ser los menos posibles pero *suficientes* para poder deducir todas las propiedades de la ciencia; *independientes* en cuanto que no sea posible derivar unos de otros (pues los demostrables estarían en la categoría de los teoremas, no de los axiomas); y, *compatibles*, es decir, consistentes (no se concluye ninguna contradicción de ellos).

Cuando tenemos un sistema axiomático podemos dar a cada uno de sus términos indefinidos un significado particular (por ejemplo, en geometría, solemos representar *puntos* y *rectas* como «puntos» y «rayas» dibujados sobre un papel). Al hacer esto, estamos interpretando el sistema. Si los axiomas así interpretados se verifican; es decir, son sentencias correctas, entonces dicha interpretación es un modelo para la ciencia.

Desde este punto de vista, dice Greenberg, *los términos no definidos llegan a ser posibles... los modelos son «laboratorios» para experimentar con el sistema.* Todo teorema del sistema axiomático es un enunciado correcto en el modelo (ya que consecuencias lógicas de premisas ciertas son ellas mismas ciertas); por tanto, si tenemos una proposición de la cual no sabemos su validez y encontramos un modelo en el que su interpretación conduce a un error, podremos estar seguros de no encontrar ninguna demostración lógica para ella. Es más, si una proposición se da en un modelo y no se da en otro, la proposición es independiente del sistema (ni puede demostrarse, ni puede refutarse). Como ya veremos, ésta fue la vía para resolver la cuestión de la demostrabilidad del Postulado de Las Paralelas.

LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES

Este tratado de trece libros comienza con veintitrés definiciones, cinco postulados y cinco nociones comunes[4]. Con esto y algunas definiciones más, que da al principio de cada libro, construye toda su geometría, demostrando proposición tras proposición.

Además de su estructura, otra característica importante de la geometría euclídea es su relación con lo sensible. Tanto las definiciones como los axiomas parecen responder a concepciones de nuestra experiencia. Punto, recta, plano,... son objetos ideales pero arrancan de objetos empíricos. Los axiomas son «verdades autoevidentes» por cuanto descansan sobre leyes naturales. Así, los resultados de Los Elementos **pretenden describir** el mundo de lo real, nos muestran su comportamiento.

Esta íntima correspondencia entre geometría y realidad –garantía de su veracidad– fue tan grande que, arraigada en el pensamiento de los matemáticos, aplazó –como veremos– el nacimiento de las geometrías no euclídeas durante cientos de años y aún después de haber sido desarrolladas y formar parte del conocimiento matemático, estuvieron sujetas a duras críticas e innumerables resistencias.

---

[4] Euclides distingue entre *postulados*, axiomas propios de la geometría y *nociones comunes*, axiomas válidos para toda ciencia.

DEFINICIONES

Definición 1:

UN PUNTO ES LO QUE NO TIENE PARTES

Definición 2:

UNA LÍNEA ES LONGITUD SIN ANCHURA

Definición 3:

LOS EXTREMOS DE UNA LÍNEA SON PUNTOS

Definición 4:

UNA LÍNEA RECTA ES UNA LÍNEA QUE YACE IGUALMENTE RESPECTO DE SUS PUNTOS

Definición 5:

UNA SUPERFICIE ES LO QUE SOLAMENTE TIENE LONGITUD Y ANCHURA

Definición 6:

LOS EXTREMOS DE UNA SUPERFICIE SON LÍNEAS

Definición 10:

CUANDO UNA LÍNEA RECTA FORMA CON OTRA LÍNEA RECTA ÁNGULOS ADYACENTES IGUALES, CADA UNO DE ESTOS ÁNGULOS ES RECTO Y LA PRIMERA LÍNEA RECTA ES PERPENDICULAR A LA SEGUNDA

Definición 15:

UN CÍRCULO ES UNA FIGURA PLANA LIMITADA POR UNA LÍNEA TAL QUE TODAS LAS LÍNEAS RECTAS QUE LA CORTAN PARTIENDO DE UN PUNTO QUE SE ENCUENTRA DENTRO DE LA FIGURA, SON IGUALES ENTRE SÍ

Definición 23:

LÍNEAS RECTAS PARALELAS SON LÍNEAS RECTAS QUE, ESTANDO EN EL MISMO PLANO Y PROLONGADAS INDEFINIDAMENTE EN AMBAS DIRECCIONES, NO SE CORTAN EN NINGUNA DE AMBAS DIRECCIONES[5]

---

[5] Maracchia dice que en esta definición Euclides da a entender su concepción de la recta: segmento que se prolonga tanto como se quiera. Un infinito potencial, no un infinito actual.

POSTULADOS

Postulado 1:

SE PUEDE DIBUJAR UNA LÍNEA RECTA DE CUALQUIER PUNTO A CUALQUIER OTRO PUNTO

– – – – * – – – – – – * – – – – –

(posibilidad de dibujar una línea recta entre dos puntos)[6]

Postulado 2:

UNA LÍNEA RECTA LIMITADA SE PUEDE PROLONGAR INDEFINIDAMENTE EN LÍNEA RECTA

– – – – ———————— – – – – – –

(la recta sólo se puede prolongar en una dirección por cada lado; es decir, que no puede haber, en el mismo lado, dos prolongaciones de diferente dirección; la prolongación es única)

Postulado 3:

SE PUEDE DESCRIBIR UN CÍRCULO CON CUALQUIER CENTRO Y CUALQUIER DISTANCIA

(el círculo puede ser tan pequeño o tan grande como se quiera)

Postulado 4:

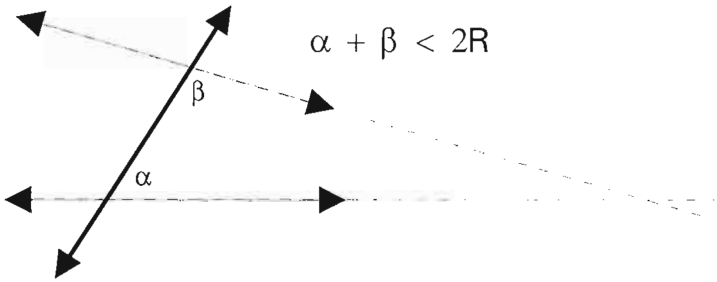
TODOS LOS ÁNGULOS RECTOS SON IGUALES

(este postulado sugiere la posibilidad de contar con una unidad de medida de ángulos: con un ángulo recto –que, por hipótesis, es igual a cualquier otro ángulo recto– podemos medir todos los ángulos, agudos y obtusos. Por el contrario, las unidades para medir segmentos deben buscarse –en la geometría euclídea– fuera de la propia geometría, en la naturaleza. El metro es –según la resolución de la Decimoséptima Conferencia General de Pesos y Medidas, 1983– la longitud del trayecto recorrido en el vacío por la luz, durante un período de 1/299792458 sg.)

[6]Aunque Euclides no especifica la unicidad de esta recta, la utiliza en sus demostraciones.

Postulado 5:

Si una línea recta, cortando a otras dos, forma ángulos internos y de una misma parte, menores que dos rectos, las dos líneas rectas prolongadas indefinidamente, vienen a encontrarse en aquella parte en que los dos ángulos son menores que dos rectos



Éste es el enunciado que, desde el mismo momento en que Euclides le dio la categoría de evidente por sí mismo, sin necesidad de demostración, hasta el siglo XIX, trajo de cabeza a muchísimos matemáticos, poniendo en tela de juicio la valía de algunos y llevando a la desesperación a otros. Wolfgang Bolyai (1775-1856) escribe a su hijo, interesado por la cuestión:

> *No debes intentar este acercamiento a las paralelas. Yo conozco ese camino hasta lo más profundo. He recorrido esa noche sin fin que extinguió toda luz y alegría de mi vida. Te suplico dejes la ciencia de las paralelas. Pensé sacrificarme por amor a la verdad. Estaba preparado para convertirme en un mártir que eliminaría los errores de la geometría y la devolvería purificada a la humanidad. Realicé monstruosas y enormes tareas, mis creaciones son mejores que las de otros y todavía no he logrado una satisfacción completa... Retrocedí cuando vi que ningún hombre podía llegar al fondo de la noche. Regresé desconsolado, sintiendo misericordia de mí mismo y de toda la humanidad.*
>
> *Admito que espero poco de la desviación de tus líneas. Me parece haber estado ya en esas regiones; haber viajado por todos los escollos de ese infernal Mar Muerto y haber regresado siempre con el mástil roto y la vela quebrada. El estado en que me hallo y mi postración datan de ese tiempo. Sin pensarlo, arriesgué mi vida y mi felicidad - aut Caesar aut nihil.*

Pero qué fue lo que llevó a declaraciones como ésta. En los comentarios de Proclo vemos la naturaleza de la controversia suscitada por el Postulado de Las Paralelas:

> *Éste [el 5º Postulado] debería ser eliminado de entre los postulados ya que es un teorema que supone muchas dificultades el cual Ptolomeo, en cierto libro, se planteó resolver y requiere para su demostración un gran número de definiciones y teoremas. Su recíproco está de hecho probado por el mismo Euclides como un teorema [...] La afirmación de que si ellas [las líneas rectas] convergen más y más a medida que se prolongan, entonces acabarán por encontrarse, es posible pero no necesaria, en ausencia de un argumento que lo demuestre para el caso de líneas rectas. El hecho de que existen algunas líneas*(7) *que se aproximan indefinidamente pero no se cortan, aunque parece improbable y paradójico, es sin embargo verdad y totalmente cierto*(8) *[...] Entonces ¿no podría ser lo mismo en el caso de líneas rectas, lo que ocurre para las líneas referidas?*

Mientras para los cuatro primeros postulados es posible una representación a través de nuestra experiencia: podemos dibujar una recta pasando por dos puntos y prolongarla en ambos sentidos, podemos dibujar un círculo de cualquier radio y, podríamos persuadirnos con algún artilugio de medida de la igualdad de los ángulos rectos; sin embargo, ¿cuánto tendríamos que prolongar dos rectas para verificar su punto de corte cuando los ángulos internos y del mismo lado, determinados por una transversal, se acercan más y más a dos rectos?. Necesitaríamos una hoja de papel inmensamente grande y una vida infinitamente larga para tan quijotesca empresa.

Las dudas sobre la evidencia del Postulado produjo dos estrategias de ataque. Una, intentando demostrarlo a partir de los otros axiomas. La otra, mediante una nueva definición de paralelas y/o sustitución del propio Postulado por otro equiparable, en cuanto obvio, al resto de los postulados.

INTENTOS DE RESOLVER EL PROBLEMA DEL 5º POSTULADO

La lista de los matemáticos que dedicaron parte de sus trabajos a este problema, bien exponiendo algunas ideas, bien escribiendo tratados completos

(7) Curvas

(8) Proclo piensa en la hipérbola y sus asíntotas.

con los cuales creyeron dar la solución, es interminable. Desde Proclo quien además de tratar él mismo la cuestión, informa de intentos anteriores, hasta Gauss, Schweikart, Taurinus, Lobatchevsky y J. Bolyai, los considerados fundadores de las geometrías no euclídeas, nos encontramos con tal cantidad de autores, que la elección de unos pocos para citar en este trabajo, se hace muy difícil; máxime cuando al estudiarlos se queda uno con la impresión de haber caminado por un laberinto, cuyas falsas salidas son utilizadas más pronto o más tarde en el tiempo para producir nuevas falsas salidas, pero que contienen alguna puerta por la cual seguir avanzando.

No es de justicia nombrar un matemático y su trabajo sobre el 5º Postulado, sin hacer referencia a que su punto de partida es probable que ya formara parte de la labor de otro matemático anterior. No fue por casualidad, la idea de una mente genial, la que dio con la solución del problema en el s. XIX, sino los esfuerzos –avances y retrocesos de todos los preocupados, a lo largo de 2.000 años, por hallar una respuesta para el conflicto– los que proporcionaron los ingredientes para establecer de forma inequívoca la categoría del enunciado colocado por Euclides como Postulado número 5. Considérese el hecho de encontrar la autoría de la creación de las geometrías no euclídeas no en uno, sino en varios matemáticos cuyas obras fueron independientes y casi simultáneas. Así, Lobatchevsky comenta:

> *...Los inútiles intentos hechos, desde el tiempo de Euclides, por espacio de 2.000 años, despertaron en mí la sospecha de que [...] Cuando finalmente me convencí de la justicia de mi conjetura y creí que había resuelto completamente esta difícil cuestión, escribí en 1826 una memoria sobre esto...*[9]

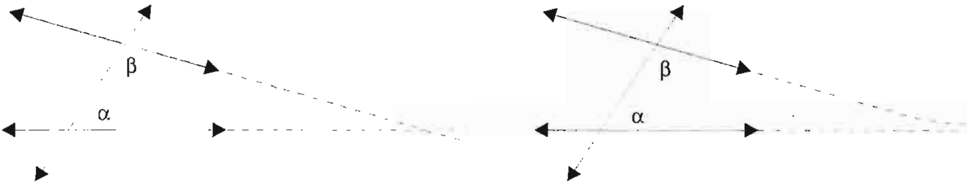
Consciente del error que voy a cometer al exponer brevemente las ideas subyacentes en los trabajos de determinados matemáticos, al aislarlos del conjunto de lo que podríamos llamar «el problema del Postulado de las Paralelas», pero consciente también de mis limitaciones y de las de estos apuntes, paso sin más a presentarlos.

PROCLO (410-485)

De entre los geómetras griegos elegimos a éste por ser precisamente la principal fuente de información con sus comentarios de lo que sabemos, aconteció en Grecia,

[9] Más adelante retomaremos esta cita, completándola más.

con respecto al 5° Postulado. Ya hemos citado sus dudas sobre el comportamiento de dos rectas al prolongarlas indefinidamente.



CASO I CASO II

¿Es seguro que ocurre el caso I? ¿no podría ser posible II? Sus preguntas quedan en el aire pues en la demostración que da del Postulado de las Paralelas comete errores.

La proposición UNA LÍNEA RECTA QUE CORTA A UNA DE DOS PARALELAS DEBE CORTAR A LA OTRA es utilizada por Proclo para probar el 5° Postulado. Pero en su demostración hace uso de dos argumentos:

1. La distancia entre (dos puntos de) dos rectas que se intersectan puede hacerse tan grande como se quiera, prolongando las dos rectas suficientemente: SI **R** Y **S** SON DOS RECTAS QUE SE CORTAN, LA DISTANCIA DE UN PUNTO DE **R** A **S** PUEDE HACERSE MAYOR QUE CUALQUIER CANTIDAD DADA, ELIGIENDO CONVENIENTEMENTE EL PUNTO DE **R**.

2. La distancia entre dos paralelas es finita: SI **R** Y **S** SON DOS RECTAS PARALELAS LAS DISTANCIAS DE LOS PUNTOS DE **R** A **S** ESTÁN ACOTADAS, consideración más floja que la equidistancia entre paralelas.

La primera proposición no es evidente[10] pero aún admitiéndola, la segunda es lógicamente equivalente al Postulado de las Paralelas, partiendo de los otros cuatro postulados.

Vemos aquí el tipo de falacia cometida por la mayoría de los que intentaron demostrar el Postulado: utilizar en la prueba una proposición tan «intuitiva» que les pasaba desapercibida y sin embargo, tal proposición era equivalente al enunciado que pretendían demostrar.

---

[10] Considérese la superficie de la esfera como el plano y las rectas como sus círculos máximos. Dos de estos círculos se cortan y sus distancias permanecen acotadas.

Proposición → *Postulado de las Paralelas*

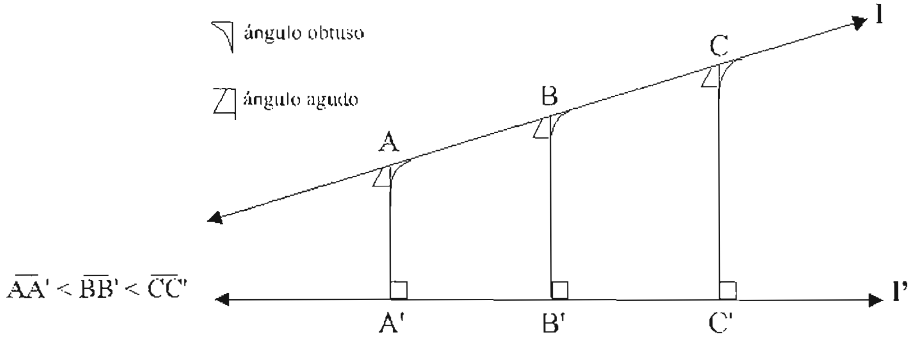
↓

demostración lógica utilizando Prop.1, Prop2,...PropN y Prop.I
Prop.I si y sólo si 5° postulado

NASÎR EDDÎN (1201-1274)

El tratado árabe más difundido en la Europa del s. XVII, sobre la cuestión del postulado euclídeo, es atribuido por Bonola a Nasîr Eddîn, pero J. Gray desmiente esta autoría. Lo que sí dice es que este matemático islámico destaca por haber sido el mayor estudioso del tema.

Su demostración del 5° Postulado se basa en la idea de que si trazamos perpendiculares a una línea recta **l'** y éstas forman con otra línea recta **l**, ángulos agudos por un lado y obtusos por el otro, los segmentos obtenidos crecen por el lado en que los ángulos son obtusos y decrecen por el lado en que son agudos. Rectas que pareciendo ser convergentes, acaban por diverger, está en contradicción con cualquier idea intuitiva de la rectitud de las líneas para este autor.



JOHN WALLIS (1616-1703)

Basa su demostración en el siguiente enunciado:

Existen triángulos semejantes no iguales,

equivalente, también, al Postulado Euclídeo.

La idea de Wallis de existencia de figuras con igual forma y distintos tamaños (semejantes sin ser congruentes) es atacada con las siguientes palabras: «no parece ser más evidente que la de Euclides».

Es interesante hacer notar que negando el 5° Postulado (o el de Wallis) cualquier cambio de tamaño de las figuras implicaría deformaciones; sería, como dice Greenberg, imposible hacer una fotografía. De existir una geometría en que no se cumpla el Postulado, sus figuras se distorsionarían al encogerlas o estirarlas.

GEROLAMO SACCHERI (1667-1733)

Saccheri en lugar de intentar demostrar el Postulado de las Paralelas directamente, utiliza una demostración por reducción al absurdo: negando el 5° Postulado pretende desarrollar una serie de consecuencias lógicas que le lleven a una contradicción. Por tanto, si no es posible que no ocurra el 5° Postulado, éste tiene que ser cierto necesariamente.

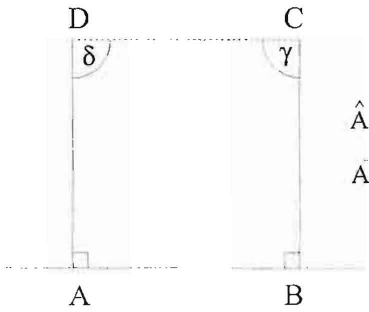
Saccheri es el primero en abrir un nuevo camino, un planteamiento original imitado posteriormente por otros, entre ellos, Lobatchevsky. Tomando como hipótesis un enunciado contradictorio con el de Euclides, deduce una secuencia de teoremas que bien pudieron haber sido los inicios de una nueva geometría. Sin embargo, su obsesión por demostrar la verdad del Postulado Euclídeo, inmerso en la concepción de su época de que la geometría de Euclides era la única y verdadera, sin ser capaz de separar lo lógicamente cierto de lo intuitivamente legítimo, se niega a dar validez a su propio trabajo, encontrando una contradicción donde no la había.

> *...Es curioso que la obsesión misma de reivindicar a Euclides de forma absoluta le impidiera reivindicarle como el «inventor» de su propia geometría; esto es, la geometría no euclídea...*(11)

Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae Geometriae Principia(12) (Milán, 1733) es el título de su obra. En ella parte de un cuadrilátero isósceles de ángulos rectos

(11) Josep Pla I Carrera. Las matemáticas, una historia de sus conceptos.

(12) Euclides exento de toda mancha o tentativa geométrica en la que se basan esos mismos Principios de la Geometría universal



$\hat{A} = \hat{B} = 1R$

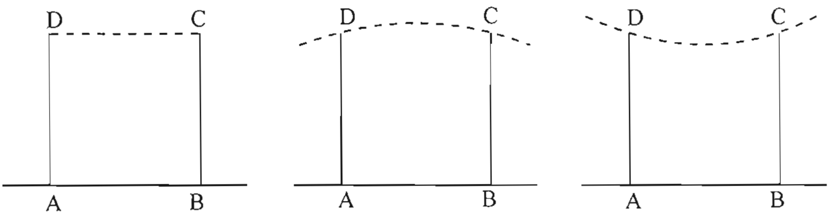
$\overline{AD} = \overline{BC}$

De aquí se puede demostrar fácilmente que $\hat{C} = \hat{D}$. Entonces discute las tres posibilidades:

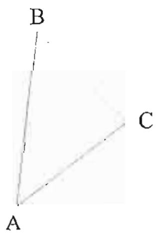
$\hat{C} = \hat{D} = 1R$ *Hipótesis del ángulo recto (HAR)*

$\hat{C} = \hat{D} > 1R$ *Hipótesis del ángulo obtuso (HAO)*

$\hat{C} = \hat{D} < 1R$ *Hipótesis del ángulo agudo (HAA)*



Por supuesto la HAR es la euclídea, como él mismo deducirá (HAR⇔5° Postulado); por tanto, considerar cualquiera de las otras dos es negar el susodicho Postulado. Su objetivo era partir de cada una de ellas y obtener consecuencias inconsistentes, con lo cual la única posible sería la HAR.



La proposición IX dice que:

EN LA HAR: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 2R$

EN LA HAO: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > 2R$

EN LA HAA: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 2R$, SIENDO $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ LOS TRES ÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO.

Los recíprocos llegan con la proposición XV.

La proposición XIV es:

LA HAO ES FALSA

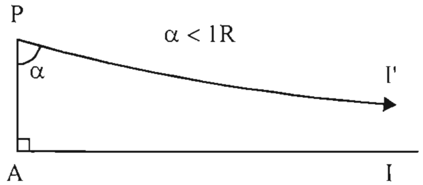
y para su demostración utiliza XIII:

EL 5° POSTULADO ES CIERTO EN LA HAR Y EN LA HAO

Sus demostraciones no están libres de imperfecciones. Pero dejando esto de lado, la proposición XIV cierra la posibilidad de la HAO.

Para concluir el trabajo, Saccheri debía hacer lo mismo con la HAA. En su intento demuestra muchísimos resultados cuya lectura, para alguien con una visión euclídea del plano, resultan extraños. Así XVII (en la HAA) dice:

DADA UNA LÍNEA RECTA, ES POSIBLE DIBUJAR UNA PERPENDICULAR Y UNA LÍNEA QUE LA CORTE EN UN ÁNGULO AGUDO, SIN INTERSECCIÓN ENTRE AMBAS.



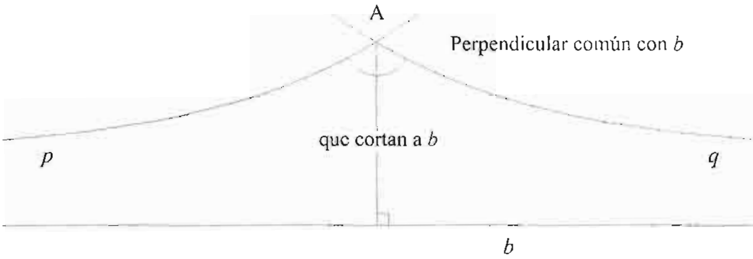
La XXIII:

DOS LÍNEAS RECTAS SITUADAS EN EL MISMO PLANO O TIENEN UNA PERPENDICULAR COMÚN, O AL PROLONGARLAS EN UNA DIRECCIÓN SE INTERSECTAN A UNA DISTANCIA FINITA O SON ASINTÓTICAS ENTRE SÍ.[13]

[13] Rectas asintóticas son aquellas que se aproximan una a la otra sin cortarse: su distancia puede hacerse menor que cualquier segmento dado, pero no tienen punto de intersección.

Más adelante demuestra que:

EN LA HAA, DADA UNA LÍNEA RECTA **B** Y UN PUNTO A NO CONTENIDO EN **B**, EN EL HAZ DE RECTAS QUE PASA POR A EXISTEN DOS RECTAS **P** Y **Q** ASINTÓTICAS A **B**, UNA POR LA DERECHA Y OTRA POR LA IZQUIERDA, QUE DIVIDEN AL HAZ EN DOS PARTES. LA PRIMERA CONSISTE EN LAS RECTAS QUE INTERSECTAN A **B** Y LA SEGUNDA EN LAS QUE TIENEN UNA PERPENDICULAR COMÚN CON **B** [PERO NO LA CORTAN].



Finalmente, tras 5 lemas cuyo objetivo es establecer que *si la HAA fuese cierta las líneas **p** y **b** tendrían una perpendicular común en su punto común en el infinito, lo cual es contrario a la naturaleza de la línea recta*, nos encontramos su famosa proposición XXXIII con la que concluye su obra:

LA HAA ES ABSOLUTAMENTE FALSA PORQUE ES REPUGNANTE A LA NATURALEZA DE LA LÍNEA RECTA

A pesar de no haber dado una respuesta a la veracidad del 5° Postulado y de no haber quedado él mismo satisfecho con sus conclusiones –como demuestra con posteriores estudios– la publicación de su trabajo atrajo una considerable.atención durante el s. XVIII.

LAMBERT (1728-1777)

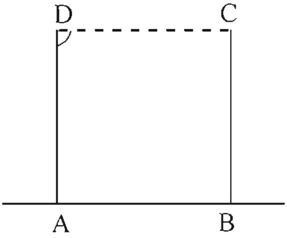
Es bastante probable que Lambert conociera la obra de Saccheri. En su Teoría de las paralelas (escrita en 1766 pero publicada después de su muerte, en 1786) menciona un trabajo de G. S. Klügel, Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio, quam publico examini submittent A. G. Kaestner et auctor respondens G. S. Klügel[(14)] (1763) donde se comentan 30 demostraciones del Postulado entre las cuales se incluye la de Saccheri.

Lambert parte de un cuadrilátero con tres ángulos rectos y estudia las tres posibilidades para el cuarto ángulo:

$\hat{D}$=1R (que corresponde a la HAR de Saccheri)

$\hat{D}$>1R (que corresponde a la HAO de Saccheri)

$\hat{D}$<1R (que corresponde a la HAA de Saccheri)



La primera le lleva fácilmente a la geometría euclídea. Para la segunda encuentra una contradicción. De la tercera (HAA) deduce una serie de teoremas, llegando más lejos que Saccheri tanto en resultados como en conjeturas.

Bajo la segunda y tercera hipótesis (HAO/HAA) el área de un triángulo plano es proporcional a la diferencia entre la suma de sus tres ángulos y dos ángulos rectos:

HAO: Área triángulo=$k[(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C})-2R]$

HAA: Área triángulo=$k[2R-(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C})]$,

donde $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ son los tres ángulos del triángulo y k es una constante positiva

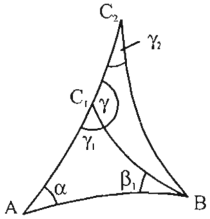
(Recordemos el resultado de Saccheri de que en HAO, $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}>2R$ y en HAA, $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}<2R$).

Es decir,

En la HAO: la suma de los ángulos aumenta al aumentar la superficie del triángulo.

En la HAA: la suma de los ángulos disminuye al aumentar la superficie del triángulo.

[(14)] Recopilación de las principales tentativas de demostrar la teoría de las paralelas que la someten a examen público A.G. Kästner y el autor G. S. Klügel



En contraposición, en la geometría euclídea la suma de los ángulos de un triángulo es constante (=2R); independiente, por tanto, del área del triángulo.

Otro resultado bastante importante observado y desarrollado en la HAA por Lambert fue la posibilidad de contar con una medida absoluta para longitudes. Ya dijimos que en la geometría de Euclides, las unidades de longitud están fuera de la propia geometría, en el sentido de incapacidad de encontrar un segmento (lado) de un figura fundamental que permanezca invariante al ser intrínseco a esta geometría la existencia de figuras semejantes. ¿Podría el lector dibujar un triángulo, exactamente igual (congruente) a uno que yo dibujase, si no le doy ningún dato en el cual intervenga la medida de sus lados?. En la HAR la respuesta es no. En la HAA, será sí. Todo triángulo equilátero de ángulo α –por ejemplo 30°– es congruente con todo otro triángulo equilátero de ángulo α. Su lado podría servirnos como unidad de medida para segmentos.

Lambert hace también dos observaciones extremadamente valiosas. La primera es la similitud entre la geometría de la esfera y la de la segunda hipótesis (HAO): los triángulos en ambas se comportan de la misma manera. Y ¡la geometría esférica es independiente del 5° Postulado!

La segunda sugerencia, bastante original y profética es la de que la tercera hipótesis podría ocurrir en el caso de una esfera de radio imaginario:

> *Ya que el área de un triángulo esférico es $\text{Área}=r^2(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}-2R)$ (1) donde* ***r*** *es el radio de la esfera, si consideramos una esfera imaginaria de radio* $\mathbf{r.i=r}\sqrt{-1}$, *entonces la fórmula (1) se convierte en $\text{Área}=r^2[2R-(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C})]$ (HAA)*

Lambert, dice J. Gray, *parece haber deseado desechar la geometría de la HAA –al encontrar una medida absoluta de longitud, lo cual repugna a nuestra intuición del espacio– pero no lo hace*. Dejó en su libro las conjeturas mencionadas y, en este sentido, podemos decir que avanza un paso más que Saccheri. Tal vez el haber vivido unos años después, en contacto con profesores de Alemania, donde ya se esta gestando la convicción de que el 5° Postulado era indemostrable, lo incitó a dejar la cuestión abierta. Klügel, por ejemplo, *sugiere la posibilidad de líneas rectas que no se intersectan, siendo divergentes,* añadiendo que *la aparente contradicción que esto presenta no es el resultado de una demostración rigurosa, ni la consecuencia de las definiciones de líneas rectas y curvas, sino más bien algo derivado de la experiencia y del juicio de nuestros sentidos.*

LEGENDRE (1752-1833)

Destacamos a Legendre, dentro de los matemáticos franceses, por la forma de exponer su trabajo: clara, simple y elegante; provocando, así, el aumento del número de sus sucesores dedicados a este problema.

Durante 28 años publicó diversos intentos de demostrar el Postulado de las Paralelas en las sucesivas ediciones de sus Éléments de Géométrie (la primera en 1794, la veintinueveava en 1823). No añade prácticamente nada nuevo a lo de sus predecesores y comete errores en sus demostraciones. En una de ellas, por ejemplo, utiliza una hipótesis que no ha sido nombrada hasta ahora y que es equivalente al Postulado. A saber:

> DESDE CUALQUIER PUNTO TOMADO DENTRO DE UN ÁNGULO, PODEMOS SIEMPRE DIBUJAR UNA LÍNEA RECTA QUE CORTA A LOS DOS LADOS DEL ÁNGULO

Con este breve recorrido desde el s. V hasta el XVIII hemos querido dar una visión de cómo fue atacado el problema del 5° Postulado de Euclides, dar a entender las dificultades con las que se toparon aquellos que lo intentaron y poner de manifiesto la evolución en el planteamiento de la solución y el cambio de mentalidad que poco a poco se iba gestando, en cuanto al status de la geometría euclídea: desde la absoluta certeza de que el 5° Postulado era parte integrante, estaba implícito en los otros cuatro (podía demostrarse a partir de ellos) hasta los primeros tímidos desarrollos con hipótesis contradictorias, cuya consistencia lógica nadie se atrevió a proclamar al subyacer en la mente de todos la convicción de la verdad de la geometría de Euclides. Sin embargo, también hemos apuntado que esta misma convicción empezaba a cuestionarse: ¿no sería la experiencia la que había dado a la geometría euclídea el adjetivo de divina? Pasarán todavía varios años antes de que la valentía de algunos matemáticos coloque otras geometría a la altura de la euclídea y se demuestre la independencia del Postulado de las Paralelas; y muchos más antes de que toda la comunidad matemática acepte estos cambios.

LOS FUNDADORES DE LA GEOMETRÍA EUCLÍDEA

Este era el panorama con el que se encontraron los geómetras del s. XIX. El muestrario de infructuosos intentos por demostrar directamente el Postulado de las Paralelas había conducido al conocimiento de una serie de propiedades equivalentes a él, y de igual o mayor potencia intuitiva[15]. La demostración indirecta –por negación del Postulado– llevaba a resultados como la existencia de líneas rectas asintóticas, la posibilidad de medidas absolutas para segmentos o la carencia de figuras semejantes, deducciones todas de carácter tan insólito que no podían sino ser rechazadas.

A principios del s. XIX la escuela de Gotinga declaró oficialmente la necesidad de admitir la hipótesis euclídea. La filosofía kantiana, predominante en esta época, consideró la geometría como modelo de conocimiento sintético a priori, conocimiento verdadero del mundo.

Afortunadamente, estas actitudes no desviaron la mirada de todos los matemáticos hacia otras áreas de estudio. Fueron algunas mentes inquietas las que con su interés –a contracorriente– abrieron nuevas vías, provocando –sin sospecharlo– una explosión de nuevas teorías geométricas y un cambio profundo en la disposición del matemático no sólo ante esta disciplina sino en general, ante todas las matemáticas.

CARL FRIEDERICH GAUSS (1777-1855)

Parece ser que Gauss fue el primero en dar a esos «conocimientos extraños» carácter de validez. Sin embargo no publicó ningún trabajo referente a ello, como él mismo dice, *por temor a los Beocios* (carta a Bessel, 1829). Sólo contamos con su correspondencia con Wolfgang Bolyai, Olbers, Schumacher, Gerling, Taurinus y Bessel (1799-1844), dos pequeños artículos en el *Gött.gelehrten Anzeigen* (1816, 1822) y algunas notas encontradas entre sus papeles (1836).

[15] Como:

DOS RECTAS PARALELAS ESTÁN ENTRE SÍ A DISTANCIA FINITA (Proclo)

EXISTEN TRIÁNGULOS SEMEJANTES NO CONGRUENTES (Wallis)

EXISTE AL MENOS UN RECTÁNGULO; ESTO ES, UN CUADRILÁTERO CUYOS ÁNGULOS SON RECTOS

LA SUMA DE LOS ÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO ES DOS RECTOS (Saccheri)

UNA RECTA PERPENDICULAR A UN LADO DE UN ÁNGULO AGUDO TAMBIÉN CORTA AL OTRO LADO (Legendre)

POR UN PUNTO EXTERIOR A UNA RECTA SE PUEDE TRAZAR UNA PARALELA Y SÓLO UNA (Playfair)

Como todos, empieza intentando probar el Postulado, ocupándose en ello desde 1792 hasta 1813. A partir de aquí, sus dudas sobre la existencia de tal demostración le inclinan a pensar en una nueva geometría la cual llama primero Anti-Euclídea, luego Astral y, por último, geometría No-Euclídea. Hace un desarrollo teórico de sus teoremas y llega al convencimiento –aunque no lo demuestra– de que esta geometría no encierra ninguna contradicción. Además, se plantea su aplicabilidad al mundo físico, oponiéndose a la disertación kantiana sobre la geometría.

En carta a W. Olbers (1817) dice:

> *...Estoy llegando a convencerme más y más de que la necesidad de nuestra geometría [euclídea] no puede demostrarse, ni por la razón humana ni para la razón humana. Tal vez en otra vida seamos capaces de obtener un conocimiento de la naturaleza del espacio que ahora es inalcanzable. Hasta entonces no debemos situar la geometría en la misma clase que la aritmética, que es puramente a priori, sino con la mecánica...*

En 1824 escribe a Taurinus (quién también trabaja en el mismo problema):

> *...La suposición de que la suma de los tres ángulos [de un triángulo] es menor que dos rectos, lleva a una curiosa geometría, bastante diferente de la nuestra [la euclídea], pero completamente consistente, la cual he desarrollado a mi entera satisfacción, así que puedo resolver cualquier problema planteado en ella, a excepción de la determinación de una constante*[16] *que no puede ser designada a priori. Cuanto más grande es la constante, más se parece esta geometría a la euclídea, y cuando se hace infinitamente grande, ambas coinciden. Los teoremas de esta geometría pueden parecer paradójicos y, al no iniciado, absurdos; pero calma, una reflexión profunda revela que no contienen nada imposible [...].*
>
> *Todos mis esfuerzos por descubrir una contradicción, una inconsistencia, en esta geometría no euclídea, han sido en vano, y la única cosa que se opone a nuestras concepciones es que, si fuera verdad, debe existir en el espacio una magnitud lineal, de-*

[16] Gauss se refiere a la constante **k** *que aparece en las fórmulas de la geometría hiperbólica.*

terminada por ella misma (pero desconocida por nosotros) [...]

No tengo miedo de que algún hombre que haya demostrado poseer una profunda inteligencia matemática, mal interpretará lo que ha sido dicho más arriba, pero en cualquier caso, considéralo una comunicación privada de la cual no va a ser publicado nada. Tal vez si en algún momento tengo más tiempo que ahora, haré públicas mis investigaciones.

FERDINAND KARL SCHWEIKART (1780-1859) Y FRANZ ADOLF TAURINUS (1794-1874)

Estos dos autores aparecen en algunos tratados sobre geometría no euclídea en el apartado de los fundadores de dicha geometría, pero no en todos.

Ambos mantuvieron correspondencia con Gauss sobre este asunto.

Schweikart no publicó sus investigaciones; sin embargo, en un memorandum de 1816 enviado a Gerling (1818) para que éste lo remitiese a Gauss, con el fin de conocer su opinión, dice:

Hay dos clases de geometría –una geometría en sentido estricto– la euclídea; y una geometría astral.

De esta última trata el memorandum: una geometría desarrollada bajo la suposición de que la suma de los ángulos de un triángulo no es dos rectos, a la que llama Astral porque podía cumplirse en el espacio de las estrellas.

Taurinus publicó en 1825 <u>Theorie der Parallellinien</u> y en 1826 <u>Geometriae Prima Elementa</u>. En ellos expone una geometría que llama geometría Logarítmico-Esférica (la de la HAA) pero desde un punto de vista completamente algebraico. Sustituye el radio **r** de una esfera real por **i.r**[17] y construye una geometría (sobre la esfera imaginaria) para la que no encuentra figuras «reales» sobre las que aplicar sus fórmulas: carecen de sentido geométrico.

Aunque reconoce su consistencia lógica, excluye la posibilidad de que pudiera ser válida en el plano. Era, de alguna manera, geometría, pero se resiste a elevarla al nivel de la geometría euclídea: sus resultados violan la concepción del espacio.

Para Morris Kline[18] Lambert, Schweikart, Taurinus, Klügel y Kästner (profesor

(17) Ver Lambert

(18) Op. cit. pag. 1147 y ss.

de Klügel en Gotinga) *estaban convencidos de la indemostrabilidad del Axioma de las Paralelas. Es más, los tres primeros veían que un axioma alternativo (contradictorio con el de Euclides) llevaba a una geometría lógicamente consistente. Lambert no hizo aserciones sobre la aplicabilidad de tal tipo de geometría; Taurinus pensaba que no era aplicable al mundo físico; pero Schweikart que lo era a la región de las estrellas. Sin embargo, los tres fallaron en un punto fundamental, en que la geometría euclídea no es la única que describe las propiedades del espacio físico dentro de la precisión de la que la experiencia puede responder. Esto es lo que los distingue de los verdaderos creadores de la geometría no euclídea: Gauss, Lobatchevsky y Bolyai.*

NICOLAI IVANOVICH LOBATCHEVSKY (1793-1856)

Desde 1815 se interesó por el problema de las paralelas, intentando demostrar el 5º Postulado. Pero en 1826, hace una Lectura en la Universidad de Kazán –de la que era profesor– en la cual expone sus ideas sobre una geometría diferente de la euclídea. En 1829-30, las publica con el título de Principios de Geometría, en la revista «Boletín de Kazán». Aparecen nuevas publicaciones entre 1835 y 1838, todas en ruso excepto *Géométrie Imaginaire* (1837) en francés, lo cual dificultó el conocimiento de su obra hasta la edición, en 1840, de *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* y *Pangéométrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles*, en 1855, un año antes de su muerte, escrita en francés y ruso y donde hace una exposición sistemática y completa de toda su geometría.

La Geometría Imaginaria o Pangeometría de Lobatchevsky corresponde a la geometría de la HAA. Parece que tuvo acceso a las obras de Saccheri, Lambert y Legendre pero sobre si conocía los trabajos de Gauss no hay nada definitivo aunque se inclina a pensar que su creación es independiente de la de éste.

En sus Nuevos elementos de Geometría de 1835, dice:

> *...Los infructuosos intentos hechos, desde los tiempos de Euclides, por espacio de 2000 años, despertaron en mi la sospecha de que la verdad que se deseaba probar no estaba contenida en los propios conceptos; que para establecerla, se necesitaría la ayuda de la experiencia; por ejemplo, de las observaciones astronómicas, como en el caso de otras leyes de la naturaleza.*

Cuando finalmente me convencí de la justicia de mi conjetura y creí que había resuelto completamente esta difícil cuestión, escribí en 1826 una memoria sobre esto [Lectura de 1826 en la Universidad de Kazán]...

De estas palabras podemos sacar dos interesantes ideas sobre el trabajo de Lobatchevsky:

1. Expresa su convencimiento de que el 5° Postulado no podía demostrarse con los otros cuatro; de que no era un enunciado implícito o contenido en ellos sino independiente y autónomo. Partiendo de los cuatro primeros postulados de Euclides y suponiendo que por un punto exterior a una recta dada pasa más de una paralela a dicha recta, desarrolla toda una teoría análoga a la geometría (euclídea): trigonometría, resolución de triángulos, cálculo de áreas y volúmenes... en la cual no encuentra ninguna inconsistencia: analíticamente los resultados se deducen lógicamente unos de otros, sin contradicciones. Pero al contrario de lo que ocurría en <u>Los Elementos</u> de Euclides, las figuras juegan un papel accesorio. Lobatchevsky no encuentra una representación visual para sus resultados, opuestos a la imagen intuitiva del espacio: los trazos en un papel son rectas euclídeas en el plano euclídeo.

En su libro de 1840, dice:

...Ahora que hemos demostrado, en lo que precede, el camino por el que se pueden calcular la longitud de curvas, la superficie y volumen de sólidos, somos capaces de afirmar que <u>la Pangeometría es un sistema completo de geometría</u>. Una simple mirada a las ecuaciones que expresan las relaciones que existen entre los lados y los ángulos de triángulos planos, es suficiente para mostrar que la Pangeometría es <u>una rama del análisis</u>, incluyendo y extendiendo los métodos analíticos de la geometría ordinaria...

2. También en la cita interpreta la «verdad» de la geometría como una correspondencia entre los conceptos abstractos y la realidad. Al igual que Gauss, se opone a la doctrina de Kant. Son necesarios los experimentos para comprobar la verdad geométrica. Acepta su geometría como sistema lógico pero también hace un planteamiento como ciencia del espacio real. En este sentido, realiza cálculos con los ángu-

los de paralaje de ciertas estrellas llegando a la conclusión de la validez de la geometría euclídea cuando trabajamos a este nivel de mensurabilidad y dentro de los límites del error experimental.

JOHANN BOLYAI (1802-1860)

A pesar de las advertencias de su padre, Wolfgang Bolyai[19], Johann se interesa por el problema de las paralelas desde muy joven. Empieza por buscar una demostración para el 5° Postulado; pero el reconocimiento de sus propios errores le llevan a abandonar esta idea y a comenzar a construir una teoría sin decidir a priori la verdad o falsedad del Postulado. En 1823 escribe a su padre:

> *...Acabo de decidirme a publicar un trabajo sobre teoría de las paralelas, tan pronto como ponga el material en orden y mis circunstancias me lo permitan. Todavía no he completado el trabajo pero el camino recorrido me proporciona casi la certeza de que pronto alcanzaré el fin, si es que, después de todo, es posible: el fin esta todavía por alcanzar, pero he hecho unos descubrimientos tan maravillosos que por poco me dejan estupefacto, y sería muy de lamentar que se perdieran. Cuando los veas, sabrás reconocerlos. Mientras tanto, sólo te digo esto: he creado un nuevo universo partiendo de la nada. Todo lo que te he enviado hasta ahora no es sino un castillo de naipes comparado con una sólida torre. Estoy totalmente convencido de que me traerá honores, como si ya hubiera completado el descubrimiento...*

En 1825 envió un extracto de su obra a su padre, entre otros. En 1829 le hace llegar otro manuscrito que deciden publicar como apéndice de una obra de Wolfgang, el Tentamen (1831), con el título de *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI. Euclidei, a priori haud unquam decidenda, independentem: adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica*[20].

Este apéndice fue enviado a Gauss al editarlo, pero no llegó a su destino. Volvieron a mandárselo en Enero de 1832 y la respuesta de éste fue la siguiente:

---

[19] Carta citada de Wolfgang Bolyai a Johann Bolyai.

[20] "Apéndice que expone la verdadera ciencia del espacio absoluto independiente de la verdad o falsedad del Axioma XI de Euclides, que jamás a priori, podrá ser demostrada: cuadratura geométrica del círculo aplicado al caso de la falsedad»

> *...Si comenzara diciendo que soy incapaz de alabar esta obra, sin duda quedarías sorprendido durante un momento. Pero no puedo decir otra cosa. Alabar la obra sería alabarme a mí mismo, pues todo su contenido, el camino seguido por tu hijo, y los resultados obtenidos, coinciden casi completamente con mis meditaciones, que me han ocupado parcialmente estos últimos treinta o treinta y cinco años. Yo mismo me he quedado estupefacto. Por lo que se refiere a mi propia obra, que hasta hoy apenas he redactado, mi intención era no publicarla en vida [...] Por otra parte tenía la idea de redactar todo esto más tarde, para al menos que no pereciera conmigo. Constituye, por tanto, una agradable sorpresa que se me ahorre esta tarea, y estoy muy contento de que sea precisamente el hijo de un viejo amigo mío quien me preceda de esta notable manera...*

La reacción de Johann a esta carta fue tal que llegó a pensar que Gauss se había apropiado de sus hallazgos para hacerse con la prioridad del descubrimiento de las geometrías no euclídeas y, aunque más tarde se convenció de lo infundado de sus sospechas, no volvió a hacer ninguna nueva publicación.

El enfoque de su trabajo difiere del de Lobatchevsky. Mientras éste niega el 5° Postulado y partiendo de ello, hace un desarrollo analítico construyendo su Pangeometría, Bolyai se interesa más por establecer propiedades esclareciendo si son independientes del 5° Postulado (no interviene, como en las 28 primeras proposiciones de Los Elementos; podrían darse con o sin él), si necesitan del Postulado (serían imposibles si se diese un postulado contrario al euclídeo), o si están sujetas a la HAA (no podrían ocurrir en la presencia del 5° Axioma). Bolyai no se interesa por la aplicabilidad de sus resultados al mundo real, pero los considera válidos al ser deducidos lógicamente.

LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

La geometría no euclídea desarrollada por Gauss-Lobatchevsky-Bolyai, Schweikart y Taurinus es la llamada geometría hiperbólica, denominación de Felix Klein.

En este apartado no vamos a hacer un análisis de cómo planteó cada uno de estos personajes sus estudios ni de hasta dónde llegó en sus exploraciones. Sólo expondremos algunos resultados notables, de forma no demasiado rigurosa, con el fin de que el lector los compare con sus conocimientos más elementales sobre geometría euclídea.

El punto de partida de la geometría hiperbólica y de la euclídea, es el mismo excepto el axioma 5° que, en la hiperbólica, es:

Por un punto exterior a una recta se puede trazar más de una paralela a dicha recta

De aquí se deducen las siguientes proposiciones:

La suma de los ángulos de cualquier triángulo es menor que dos rectos

La diferencia entre 2R y la suma de los ángulos de un triángulo es llamada **defecto**.

Todos los cuadriláteros convexos tienen suma de ángulos menor que cuatro rectos

Los rectángulos euclídeos no existirían.

Si dos triángulos son semejantes entonces son congruentes

Este resultado contradice el Postulado de Wallis, equivalente al euclídeo, de que existen triángulos semejantes, no congruentes. En geometría hiperbólica no existen figuras semejantes. Una consecuencia importante de esta propiedad es la posibilidad de establecer una unidad de medida para la longitud, desde la propia geometría, cosa de la que ya hemos hablado.

El área de cualquier triángulo es proporcional a su defecto

$$\acute{A}rea = \frac{\pi}{180} K^2 \,[180 - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C})]$$

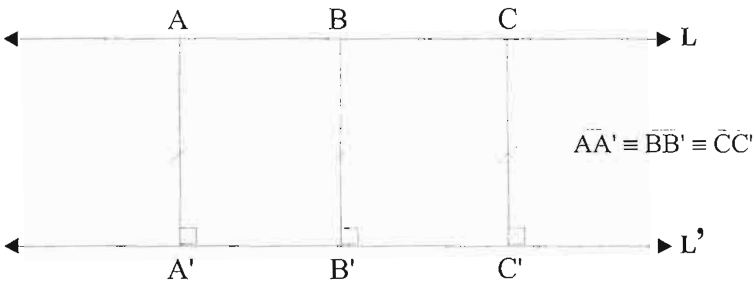
Por tanto, cuanto mayor es el triángulo (más área tiene), más pequeños son sus ángulos; mientras que al disminuirlo, la suma de sus ángulos se aproxima a 2 rectos.

El área de cualquier triángulo es como mucho πK^2

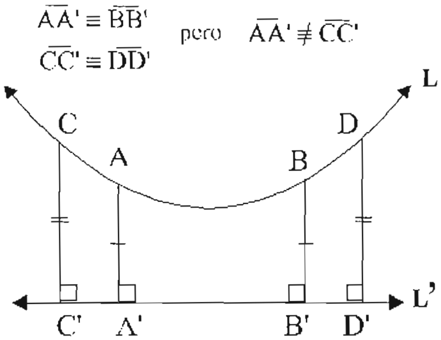
Mientras en geometría euclídea podemos construir un triángulo de cualquier área dada; en geometría hiperbólica, aunque no hay un límite para las longitudes de los lados, sí la hay para el área del triángulo.

Si L y L' son dos rectas paralelas distintas, cualquier conjunto de puntos de L equidistantes de L', tiene <u>como mucho</u> dos puntos

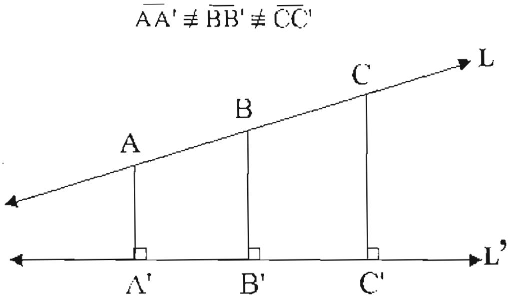
En el caso de la geometría euclídea, dos rectas paralelas son equidistantes:



Para la geometría hiperbólica, tenemos dos posibilidades:

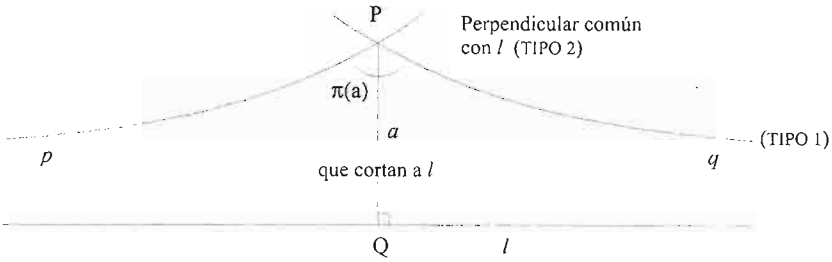


TIPO 1



TIPO 2

Dada una recta L y un punto **P** no perteneciente a L, en el haz de rectas que pasa por P están las que cortan a L y las que son paralelas a L. Estas últimas se dividen en dos clases, las <u>paralelas divergentes</u> (del tipo 2) que son infinitas y las <u>paralelas asintóticas</u> (del tipo 1) que son sólo dos. Las paralelas asintóticas forman la frontera entre las rectas convergentes y las paralelas divergentes



EL ÁNGULO QUE FORMAN LAS PARALELAS ASINTÓTICAS CON LA PERPENDICULAR DE **P** A **Q** DEPENDE DE LA LONGITUD DEL SEGMENTO **PQ**. MÁS CONCRETAMENTE, SI A ES LA LONGITUD DEL SEGMENTO **PQ** Y π(A) ES EL ÁNGULO QUE FORMAN LAS PARALELAS ASINTÓTICAS CON **PQ**

$$\operatorname{tg}\frac{\pi(a)}{2} = e^{-a/k}$$

$$\textit{Cuando } a \to 0 \ \textit{ entonces } \ \pi(a) \to \frac{\pi}{2}$$

$$\textit{Cuando } a \to \infty \ \textit{ entonces } \ \pi(a) \to 0$$

En regiones infinitesimales, la geometría hiperbólica difiere muy poco de la geometría euclídea. Por ejemplo, para triángulos pequeños, la suma de sus ángulos está muy próxima a 2 rectos; cuando la distancia **a** de un punto **P** a una recta **l** es mínima, el ángulo de paralelismo π(**a**) se acerca a un recto, las infinitas paralelas a **l** por **P** tienden a confundirse en una sola recta.

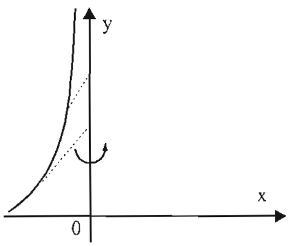
Si las dimensiones de las figuras son reducidas en comparación con la de la constante **k** que aparece en las fórmulas, sus propiedades son prácticamente euclídeas. Cuando **k** es inmensamente grande, la geometría hiperbólica tiene el mismo comportamiento de la geometría euclídea. En este sentido se dice que la geometría euclídea es un «caso límite» de la geometría hiperbólica.

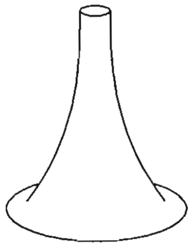
A pesar de la publicación de Bolyai y de las de Lobatchevsky, la nueva geometría que defendía sus trabajos no produjo un impacto inmediato en la comunidad matemática. Largos años de tradición, reforzados por la concepción kantiana del espacio, daban a la geometría de Euclides un status que unos personajes desconocidos como Bolyai y Lobatchevsky no iban a echar por tierra tan fácilmente. Fue después de la muerte de Gauss, en 1855, cuando se publicaron sus notas y sus cartas y, la geometría no euclídea empezó a asociarse a su nombre, cuando comenzaron a traducirse las obras de Bolyai y Lobatchevsky en Inglaterra, Francia y Alemania. Sin embargo, no por ello fueron aceptadas. Sus desarrollos, aunque extraños, eran válidos en cuanto a deducciones lógicamente correctas, pero la pregunta que durante 20 siglos se habían hecho todos los matemáticos, estaba todavía sin contestar. ¿No se puede demostrar el 5° Postulado, tomando como base los restantes? o lo que es lo mismo ¿es independiente el 5° Postulado de los cuatro primeros? Si la geometría de Gauss-Lobatchevsky-Bolyai no tuviese contradicciones, la pregunta tendría una respuesta, y afirmativa. Ellos hicieron un acto de fe; creyeron en su consistencia, mas no la demostraron. Tuvieron que pasar otros 40 años. En 1868, por fin, con una obra de Eugenio Beltrami (1835-1900) se pudo encontrar la prueba concluyente. Pero con ello surgieron nuevas preguntas aún más profundas, de las que pronto hablaremos.

LA INDEPENDENCIA DEL 5° POSTULADO

Las Disquisitiones generales circa superficies curvas de Gauss y la célebre memoria de Riemann de 1854 (publicada en 1868) Über die Hypothese, welche der Geometrie zu Grunde liegen[21] proponen un nuevo concepto en geometría: las superficies pueden ser consideradas ellas mismas como espacios. Gauss estudia la geometría intrínseca para superficies del espacio tridimensional y Riemann lo generaliza para superficies en espacios n-dimensionales.

Si se consideran como líneas rectas las geodésicas sobre la superficie, la geometría que aparece es, en general, no euclídea. De Gauss, no podemos afirmar que vio esta relación. Riemann, no menciona en su obra las geometrías no euclídeas. Pero Beltrami, en su Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea (1868) sí que habla de la correspondencia entre la geometría intrínseca de una superficie de curvatura constante negativa y la geometría hiperbólica de Gauss-Lobatchevsky-Bolyai. En los puntos y geodésicas de la pseudoesfera (superficie de revolución originada al hacer girar sobre su asíntota, la tractriz[22]), Beltrami representa los puntos y rectas hiperbólicos, ofreciendo un modelo para una porción del plano hiperbólico.





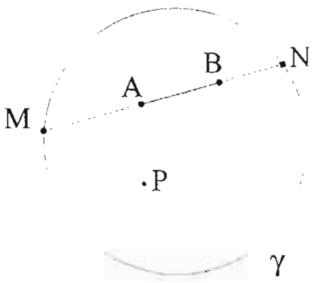
[21] Sobre la hipótesis en que se funda la geometría

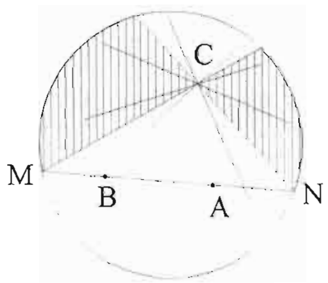
[22] Curva en la cual la longitud del segmento de tangente comprendido entre el punto de tangencia y el punto de corte con una recta es constante. La recta es una asíntota de la curva.

Al dar un modelo hace «real», visualiza la geometría hiperbólica; al dotar de significado a las rectas no euclídeas de dicha geometría las hace pensables, imaginables. Ya no hay excusa para considerar la obra de Lobatchevsky como un entramado oscuro e impenetrable. Beltrami ofrece la posibilidad de concebirla, al menos parcialmente, y así lo entienden los matemáticos de la época. Pero, además, su superficie-modelo está en el espacio euclídeo y esto demuestra que si la geometría euclídea no encierra contradicciones, tampoco puede tenerlas ese trozo de plano hiperbólico que estamos representando. La pregunta inmediata es ¿no habrá otra superficie en la cual su geometría intrínseca represente a todo el plano hiperbólico? La respuesta, como demostró Hilbert, es no. No hay ninguna superficie analítica regular de curvatura constante negativa sobre la que se pueda aplicar todo el plano hiperbólico. Sin embargo, Beltrami dio otro modelo que sí visualiza todo el plano hiperbólico. Es el modelo de Beltrami-Klein, más conocido como modelo de Klein, por ser este último quien definió la función distancia que se utiliza en el modelo.

EL MODELO DE BELTRAMI-KLEIN

Consideremos un círculo γ dentro del plano euclídeo y tomemos como **plano** (hiperbólico) el interior del círculo; es decir, excluimos su circunferencia. Los **puntos** (del plano hiperbólico) son los *puntos* (euclídeos) del interior de γ. Las **rectas** son las *cuerdas abiertas* de γ. Las relaciones de **pertenencia** de un **punto** a una **recta** y la **situación** de un **punto entre otros dos**, se toman en el sentido euclídeo. La **congruencia** entre pares de **puntos** y entre **ángulos** se establece mediante transformaciones del círculo en el círculo que no distorsionen las cuerdas. La **distancia** entre dos **puntos** se define como un número proporcional al logaritmo de la razón doble de los dos puntos y los puntos intersección de la cuerda que pasa por ellos con la circunferencia de γ. El **ángulo** de dos **rectas** es un número proporcional al logaritmo de la razón doble de las dos rectas y las tangentes imaginarias conjugadas desde el vértice del ángulo al círculo γ.





En estas condiciones, los cuatro primeros postulados de Euclides se cumplen y lo mismo ocurre con el postulado hiperbólico. En la figura de la derecha, vemos que las **rectas** CM y CN son las paralelas asintóticas, mientras que las **rectas** de la zona rayada son las paralelas divergentes a la **recta** MN, que pasan por C.

Al tener un modelo para la geometría hiperbólica inmerso en el plano euclídeo, la consistencia de dicha geometría es fácilmente demostrable. Basta con hacer una correspondencia entre los términos fundamentales de la geometría hiperbólica y sus interpretaciones en el modelo:

Geometría hiperbólica		Geometría euclídea
plano	$\longrightarrow$	*interior del círculo:* γ
punto	$\longrightarrow$	*punto de* γ
recta	$\longrightarrow$	*cuerda de* γ
.		.
.		.
.		.

Sustituyendo **punto** por *punto de* γ, **recta** por *cuerda de* γ, etc. convertimos cada enunciado de la geometría hiperbólica en un enunciado de la geometría euclídea, ocurriendo que los **axiomas** (de la geometría hiperbólica) se transforman en *teoremas* (en la geometría euclídea). Por ejemplo, el **axioma**:

> SE PUEDE DIBUJAR UNA **LÍNEA RECTA** DE CUALQUIER **PUNTO** A CUALQUIER OTRO **PUNTO**

produce el enunciado:

> SE PUEDE DIBUJAR UNA *CUERDA DE* γ DE CUALQUIER *PUNTO DE* γ A CUALQUIER OTRO *PUNTO DE* γ

en geometría euclídea y, este enunciado se demuestra que es un *teorema*[23]. Para clarificar la explicación, llamemos a estos *teoremas, teoremas axiomáticos*.

[23] Para la demostración basta con utilizar el AXIOMA 1 de Euclides.

Entonces, cualquier **teorema** de la geometría hiperbólica pasa a ser (tras la sustitución adecuada de términos) un *teorema* de la geometría euclídea pues, un **teorema X** se obtiene mediante deducciones lógicas, bien directamente de los **axiomas**, bien de **axiomas** y **teoremas** ya probados; luego, su enunciado correspondiente al hacer las sustituciones de términos, *X*, se puede demostrar mediante las mismas deducciones lógicas partiendo, bien directamente de los *teoremas axiomáticos*, bien de *teoremas axiomáticos* y *teoremas* anteriormente demostrados.

Geometría hiperbólica		Geometría euclídea
Enunciado X	→	*Enunciado X*
demostración ↓		demostración ↓
Teorema X		*Teorema X*

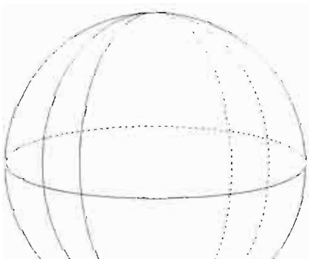
donde las demostraciones son iguales si hacemos la sustitución adecuada de palabras.

Puesto, pues, de manifiesto que todo **enunciado** válido en geometría hiperbólica, se transforma en un *enunciado* válido en geometría euclídea, si encontrásemos una contradicción en la geometría hiperbólica, ésta se convertiría en una contradicción en la geometría euclídea. Es decir, el darse dos **proposiciones** contrarias, **X** y **no X** en geometría hiperbólica, implicaría el darse dos *proposiciones* contrarias, *X* y *no X* en geometría euclídea. Si admitimos la consistencia de la geometría euclídea, la consistencia de la geometría hiperbólica queda probada. Aún más, de igual forma que el círculo de Beltrami-Klein sumerge la geometría hiperbólica dentro de la euclídea, la horosfera –sólido de la geometría hiperbólica– es un modelo para la geometría euclídea. Cualquier inconsistencia en la geometría euclídea se traduciría en una inconsistencia en la hiperbólica. Por tanto, la geometría euclídea es consistente si, y sólo si, lo es la geometría hiperbólica. O ambas son igualmente verdaderas, o ambas son igualmente falsas. Y en este contexto el Postulado de las Paralelas ni puede demostrarse, ni puede refutarse. Al haber dos geometrías, una apoyada en él –la euclídea– y otra en su «contrario» –la hiperbólica– y, al tener ambas el mismo grado de certeza, el Postulado de las Paralelas de Euclides es un axioma independiente.

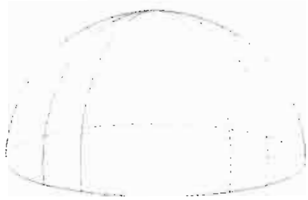
Desde las dudas de Proclo hasta la reivindicación de Euclides, de Saccheri; y desde ésta hasta la apuesta de Gauss-Lobatchevsky-Bolyai; con Beltrami concluyen 2000 años de historia al quedar completamente probada la indemostrabilidad del 5° Postulado de Euclides. Pero, además, se concluye un hecho aún más fuerte: la probabilidad de encontrar una contradicción entre los «resultados extraños» de la geometría hiperbólica, y la de encontrarlos en la «intuitiva» geometría euclídea, son exactamente iguales.

Antes de ver la reacción producida por este descubrimiento, creemos necesario nombrar otra geometría, que junto con la euclídea y la hiperbólica, forman el tríptico más conocido de las geometrías.

Saccheri, al negar el Postulado Euclídeo, distinguió la HAA y la HAO. La HAA es equivalente a que por un punto exterior a una recta pasan más de una paralela a dicha recta y esto lleva a la geometría hiperbólica. Para la HAO tendríamos que por un punto exterior a una recta no pasa ninguna paralela a dicha recta. Este supuesto pudo ser refutado por Saccheri y los que siguieron su mismo camino. Sin embargo, Riemann, en la obra citada, se plantea el concepto de «ilimitado» e «infinito», haciendo una distinción entre ellos. «Ilimitado» significa que se puede seguir siempre, que no hay ningún obstáculo que impida continuar; «infinito» tiene que ver con medida. Por ejemplo, en geometría euclídea, el círculo es una curva ilimitada pero finita; la recta es ilimitada e infinita. Si eliminamos esta segunda propiedad de la recta, la HAO podría validarse. De hecho, Riemann sugiere una geometría que podría aplicarse sobre la esfera, tomando las líneas rectas como los círculos máximos de la esfera. Es claro que en ella se pierde la infinitud de la recta y la unicidad de la recta que pasa por dos puntos. Sin embargo, todas las rectas se cortan. No existen paralelas.



A esta geometría, para la cual no se hizo un desarrollo axiomático en la época, la llamó Klein, *geometría elíptica doble* para distinguirla de la *geometría elíptica simple* en la que por dos puntos cualesquiera sólo pasa una recta.



Ambas geometrías son también tan consistentes como la euclídea.

LA ACEPTACIÓN DE LAS GEOMETRÍAS NO EUCLÍDEAS

A quien tenga una visión euclídea del espacio, no le será difícil situarse en el lugar de los matemáticos del s. XIX y sentir con ellos cómo la progresiva aceptación de la geometría no euclídea, unida a otros desarrollos de la misma época, hacía temblar el terreno donde se habían colocado los cimientos de todas las matemáticas.

En efecto, Lobatchevsky, en sus obras, parte de unos axiomas y, siguiendo el mismo esquema utilizado por Euclides, construye un cuerpo de conocimiento, una geometría sin aparentes contradicciones y –se demuestra después– tan válida como la euclídea; ambas se sitúan en el mismo nivel, tienen el mismo valor formal, una mutua dependencia: cualquier error en una de ellas, produce un error en la otra. Entonces, si la geometría euclídea describe la realidad física, se ajusta a nuestras percepciones del mundo y por ello, es verdadera ¿qué pasará con las geometrías no euclídeas?

> *...Las matemáticas están ancladas en la realidad, y su verdad se hallaba frecuentemente reforzada por referencias a la naturaleza del mundo. Mientras los mundos hipotéticos fueron triviales y extraños, nadie tenía necesidad de preocuparse, pero cuando surgieron las descripciones de un mundo no euclidiano, provocaron en primer lugar, precisamente, esos sentimientos de rechazo: durante la crisis los matemáticos creían en el mundo que tenían bajo sus pies como el único mundo. Tan grande fue esta crisis y tan profundas fueron las consecuencias de la solución que recibió [...], que este punto de vista acerca de la propia verdad*

> *matemática no podía continuar existiendo. Constituye un punto de vista poco consistente que de una infinitud de mundos posibles de igual riqueza, habitáramos uno en particular (¿cómo sabría Dios cuál elegir?). Más concretamente, ¿cómo pueden las matemáticas revelar verdades de este mundo en particular con exclusión de los otros?. Pues una vez que se admite que las matemáticas describen todos los mundos con igual fuerza, haciéndolo de manera muy imparcial, ¿en qué queda su veracidad? Ya no podemos validar las matemáticas recurriendo a la experimentación, si es igualmente válida en mundos físicos diferentes...*
>
> Jeremy Gray, Ideas de espacio, pag. 210

La comunidad matemática se vio forzada a replantearse la naturaleza de los axiomas geométricos. Estos no pueden ser ya verdades autoevidentes, basadas en la experiencia. Es necesario que pierdan su fundamentación empírica. Tienen que convertirse en enunciados arbitrarios, puntos de partida de una teoría geométrica desligada de la realidad física.

La resistencia a estos cambios la encontramos incluso en aquellos que manejaban ya las geometrías no euclídeas. Kline nombra a Riemann (1854) quien *creía todavía que había ciertas proposiciones acerca del espacio que serían a priori, aunque no estuviera incluida entre ellas la afirmación de que el espacio físico es verdaderamente euclídeo. Era, sin embargo, localmente euclídeo...*; Cayley[24] en 1883 *no garantizó la existencia independiente de las geometrías no euclídeas sino que las trató como una clase de estructuras euclídeas especiales...*; Klein *consideró el espacio euclídeo como el espacio fundamental necesario. Las otras geometrías eran meramente euclídeas con las nuevas funciones para las distancias. Las geometrías no euclídeas estaban, en efecto, subordinadas a la geometría euclídea....* En Poincaré vemos una actitud más radical. Hablando sobre la naturaleza de los axiomas, dice[25]

> *...¿Son juicios sintéticos a priori, como decía Kant? Entonces se nos impondrían con tal fuerza que no podríamos concebir la proposición contraria, ni construir sobre ella un edificio teórico. No habría geometría no-euclídea. [...]*
>
> *Entonces ¿debemos concluir que los axiomas de la geometría*

[24] Matemático del s. XIX (1821-1895).

[25] En La science de l'hypothèse, Flammarion, París, 1902, capítulo III.

son verdades experimentales? Pero no se experimenta sobre rectas o circunferencias ideales: sólo puede hacerse con objetos materiales [...]

Los axiomas geométricos no son, por lo tanto, ni juicios sintéticos a priori ni hechos experimentales.

Son convenciones: nuestra elección entre todas las convenciones posibles es guiada por los hechos experimentales, pero permanece libre, y sólo responde a la necesidad de evitar toda contradicción [...]

Entonces, ¿qué se debe pensar de esta pregunta? ¿Es verdadera la geometría euclidiana?

La pregunta carece de sentido. [...] Una geometría no puede ser más verdadera que otra; solamente puede ser más cómoda.

Ahora bien, la geometría euclidiana es y seguirá siendo la más cómoda...

Aparte de la natural resistencia a admitir cualquier cambio de ideas, reforzada, en este caso, por una larga tradición, había otras razones para no aceptar la geometría no euclídea. Después de la caída de la civilización griega, las matemáticas se desarrollaron confiando más en la intuición que en la deducción racional. Hemos visto en este seminario cómo grandes matemáticos de los siglos XV al XVIII daban sus resultados sin prácticamente demostrarlos o con demostraciones no rigurosas y, a pesar de ello, las matemáticas avanzaron vertiginosamente. El desprender a los axiomas de la geometría, base de la obra euclídea, de su soporte empírico, significaba separar a toda la matemática de la realidad. Ésta ya no puede ser la disciplina que describe el orden de la naturaleza. Tiene que reducirse a una invención del hombre, un juego en el cual se parte de unos supuestos –axiomas– y se llega a unos resultados –teoremas–, mediante las reglas de la lógica. Ya no es Dios quien crea y el hombre quien descubre. Éste tiene el poder en sus manos al encontrarse con la capacidad de poder subordinar estos supuestos de partida a su propio capricho. Pero también corre el peligro de ver que una vez finalizada su obra, ésta no tiene ningún sentido: nada le garantiza su utilidad.

Surge así, un movimiento de vuelta al rigor, de fundamentación racional de toda la matemática, según el modelo de organización hipotético-deductivo.

En el caso concreto de la geometría se produce una revisión completa de los 13 libros de Los Elementos, desvelándose muchas de sus deficiencias, de acuerdo con el nuevo orden de ideas: utilización de axiomas no explicitados, demostraciones basadas en las figuras más que en las deducciones... Desde las primeras publicaciones sobre sus fundamentos encontramos dos diferencias con respecto al tratado euclídeo: la necesidad de partir de unos términos no definidos (Euclides los define todos cayendo en el error de querer decir, sin decir nada) y la necesidad de ampliar el conjunto de axiomas. La sistematización más popular por su simplicidad y proximidad al espíritu de Euclides, es la de Hilbert (primera versión en 1899). Éste consideró como conceptos indefinidos *punto, recta, plano, situación de un punto entre otros dos, relación de pertenencia (punto/recta; punto/plano) y relación de congruencia (segmento/segmento; ángulo/ángulo)*. Sobre ellos no se sabe más que lo que dicen los axiomas. En cuanto a éstos, aparecen separados en cinco grupos: *axiomas de incidencia, axiomas de separación, axiomas de congruencia, el axioma de las paralelas y axiomas de continuidad.*

Hacia 1900, dice Kline, *parecía alcanzado el objetivo de proporcionar una fundamentación rigurosa a la matemática, y los matemáticos casi se envanecían de semejante logro.*

Sin embargo, la aparición de las paradojas, sobre todo en la teoría de conjuntos, pone en tela de juicio la fiabilidad de las deducciones lógicas como base de la verdad de los conocimientos matemáticos. Las diversas respuestas de los matemáticos de finales del s. XIX, da lugar a las tres escuelas de pensamiento filosófico de principios del s. XX: la escuela logicista (a la que pertenecen Frege, Russell y Whithead), la escuela intuicionista (de Kronecker, Poincaré y Brouwer) y la escuela formalista (de Hilbert). Ninguna logra que su punto de vista sea universalmente aceptado. Los fundamentos y el fin último de las matemáticas sigue siendo hoy un problema abierto.

BIBLIOGRAFÍA

Libros especializados más utilizados:

- BONOLA, ROBERTO: *Non-euclidean geometry.* Dover Publications.
- GRAY, JEREMY: *Ideas de espacio.* Biblioteca Mondadori, 1992.
- GREENBERG, MARVIN JAY: *Euclidean and non-euclidean geometries.* W. H. Freeman and company, 1980.

Libros no especializados:

- PLA I CARRERA, JOSEP: *Las matemáticas*. Una historia de sus conceptos. Montesinos Editor, 1984.
- KLINE, MORRIS: *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Vol. I y III. Alianza Editorial, 1992.
- ALEKSANDROV, A. D. Y OTROS: *La matemática: su contenido, método y significado*. Vol. 3., cap. 16. Alianza Universidad, 1979.
- STEWART, IAN: *Conceptos de matemática moderna*. Alianza Universidad, 1984.
- POINCARÉ, HENRI: *Filosofía de la Ciencia* (selección). Universidad Nacional Autónoma de México, 1984.
- EUCLIDES: *Elementos*. Libros I-IV. Gredos, 1991.
- EUCLIDES: *The thirteen books of The Elements*. Dover Publications.
- MARACCHIA, SILVIO: *La matematica come sistema ipotetico-deduttivo*. Felice Le Monnier, 1975.
- VEGA, LUIS: *La Trama de la Demostración*. Alianza Universidad, 1990.
- HEATH, SIR THOMAS: *A History of Greek Mathematics*. Dover Publications.
- BOYER, CARL B.: *Historia de la matemática*. Alianza Universidad, 1987.
- COLERUS, EGMONT: *Desde el punto a la cuarta dimensión*. Labor, 1962.
- VARIOS: *Historia de la Geometría Griega*. Seminario «Orotava». Historia de la Ciencia. Año I.
- CASSIRER, ERNST: *El problema del conocimiento*. Fondo de Cultura Económica, 1974.
- SMOGORZHEVSKI, A. S.: *Acerca de la geometría de Lobachevski*. Ed. Mir, 1984