EL COMIENZO DE LA LÓGICA MATEMÁTICA

Carlos Martín Collantes
M.ª Olga Expósito Hernández

Mayo 1994

I. INTRODUCCIÓN

La lógica matemática constituye la forma que esta disciplina adopta desde mediados del siglo XIX a través del trabajo de un grupo de matemáticos que se adentran en la investigación lógica. No obstante, la lógica es por entonces una ciencia con una larga historia que Bochenski describe como de «**desarrollo sinusoide**»[1]. A períodos de máximo esplendor le siguen otros donde apenas hay aportaciones dignas de reseña. Cada uno de estos momentos parte de presupuestos diferenciados, emplea técnicas distintas y desarrolla problemáticas diversas, por lo que constituyen «**formas**» de la lógica, y no una misma lógica desarrollada linealmente en lo doctrinal aunque con algunos saltos en el tiempo.

[1] BOCHENSKI, I.M., «*Historia de la lógica formal*», Edt. Gredos, Madrid 1985, pág. 21.

Son cinco los períodos en los que cabe dividir la historia de la lógica, de los cuales sólo tres son creadores: el clásico antiguo (hasta el VI d.C.), la escolástica (siglos XI-XV) y la lógica matemática (desde el XIX). Intermedian otros dos momentos no demasiado interesantes por la pobreza de sus aportaciones: la alta edad media (siglos VII-XI) y la moderna lógica «clásica» (siglos XVI-XIX).

De los tres periodos que realmente importan, en las dos primeros la lógica está al servicio del razonamiento en el lenguaje ordinario, mientras que en el último se construye como una forma de álgebra abstracta, en el momento que los matemáticos gustaron de inventar varias de ellas, a la que posteriormente se interpreta en el lenguaje ordinario. Posteriormente se busca en ella la fundamentación de todo razonamiento matemático en la obsesión por el rigor que sacude a la matemática del XIX, cuando la aparición de geometrías alternativas a la euclidiana convierte el problema de la consistencia, y de los fundamentos del método axiomático tal como fueron sentados por el propio Euclides, en un problema candente para la matemática.

Kneale señala explícitamente otra característica del período que puede explicar esta diferencia: las dos primeras formas son desarrolladas por filósofos y la tercera por matemáticos. Como indica este autor los esfuerzos leibnizianos de construcción de un cálculo lógico no fructificarán «***hasta tanto la matemática no se hubiera desarrollado lo suficiente como para facilitar el grado de abstracción en el que aquel pionero de la lógica deseaba instalarse. Cuando la lógica revivió a mediados del siglo XIX, el nuevo impulso habría de provenir de los matemáticos familiarizados con los avances en el dominio de su propia especialidad más bien que de los filósofos enzarzados en la controversia entre el empirismo y el idealismo***».[2]

No se trata, no obstante, de lógicas distintas sino de formas distintas de una misma lógica. No existe el relativismo doctrinal en lógica pues, aunque aparecen problemas nuevos y leyes distintas en cada etapa, la problemática lógica fundamental se repite. El problema de la implicación, las paradojas semánticas, la necesidad de desarrollar una lógica modal, el análisis de los cuantificadores, el amplio formalismo, un tratamiento predominantemente extensional de las leyes lógicas, son buenos ejemplos, entre muchos otros, de esta recurrencia.

Para conocer el discurrir de los primeros pasos de la lógica matemática podemos adoptar dos perspectivas. La primera es coherente con la realidad histórica de la que tuvieron conciencia los protagonistas de la gesta. La segunda sería para ellos claramente falsa e incoherente, pero mucho más explicativa para nosotros. Supone una reconstrucción que recorre el hilo de la historia desde la moderna lógica matemática hacia su pasado. Eliminamos así todos los caminos muertos y recuperamos algunos

[2] KNEALE, W. y M., *«El desarrollo de la lógica»*, pág. 349.

hitos que lo fueron sólo mucho después de producirse. Esta perspectiva nos obliga a comenzar nuestro trabajo mencionando a Leibniz como precursor de la moderna lógica matemática, olvidando totalmente que su influencia fue insignificante por cuanto sus escritos lógicos fundamentales no saldrán a la luz hasta que L. Couturat los publica en 1901, momento en que sus intuiciones ya están en pleno desarrollo. Debemos también considerar ***Begriffsschrift*** de G. Frege, publicada en 1879, como el momento de madurez de la moderna lógica, a pesar de que apenas tuvo eco entre los matemáticos y lógicos contemporáneos por lo que su impacto real en la disciplina fue nulo hasta que Russell lo redescubrió.

Queda claro que la visión del tema es diferente según el sentido que elijamos para la flecha del tiempo en este recorrido histórico. Como lo que queremos comprender es nuestro presente, cómo se gesta la actual Lógica matemática, optaremos por una reconstrucción del pasado hasta los ***Principia Mathematica*** de Russell y Whitehead en la que el punto de partida es justamente el final del proceso, la versión definitiva que supone esta obra para esta forma de la lógica. Es una reconstrucción que tiene poco de histórica y mucho de disciplinar. Por esta razón obviaremos, o mencionaremos muy de pasada, problemáticas y autores cuyas aportaciones al corpus de la lógica moderna fue poco sustancial, recogiendo en estas páginas sólo aquellas que nos llevan directamente a los ***Principia***. Por esta razón, nos centraremos en las figuras de Boole y Frege que representan dos momentos decisivos tanto en el desarrollo de la lógica simbólica como en las relaciones entre matemática y lógica. Si con Boole la lógica es una parte de la matemática, se desarrolla como un cálculo semejante al álgebra numérica, con Frege se invierte la relación hasta el punto que la aritmética, y con ella toda la matemática, se convertirán en lógica desarrollada.

II. LA FORMA MATEMÁTICA DE LA LÓGICA

Los historiadores de la lógica matemática centran su atención en el contenido peculiar de esta forma de la lógica, si es o no diferente de la matemática, sus características específicas diferenciadoras de otras formas anteriores, incluso su nombre puede ser objeto de controversias: lógica matemática, simbólica, logística, teorética, formal... Se trata, en eso hay unanimidad, de uno de los períodos más fructíferos de la disciplina, etapa aún no concluida cuyos resultados se dejan apreciar en muchos otros campos.

La lógica matemática es una ciencia formal que se presenta siempre en forma de cálculo. A imitación de la matemática desarrolla un método formalístico donde las reglas operacionales se refieren a la forma de los signos y no a su sentido. Otras formas de la lógica, como la escolástica, también usaban el formalismo, pero no de modo tan intensivo como en la moderna lógica simbólica, donde éste se generaliza y se emplea exhaustivamente.

Se comienza entonces por la construcción de un sistema formal para sólo posteriormente buscarle interpretaciones en el lenguaje ordinario. Todas las otras formas de la lógica proceden a la inversa abstrayendo las proposiciones lógicas del lenguaje natural. Las leyes se formulan en lenguaje artificial donde se simbolizan todos los signos, no sólo las variables, como en la lógica clásica antigua, sino también las constantes. Hasta 1930 todas las formulaciones se hacen en lenguaje objeto aunque a partir de esta fecha el desarrollo de la metalógica lleva al empleo del metalenguaje en la exposición de los sistemas formales lógicos.

Estamos ante el período de mayor riqueza de la lógica donde se supera, en cuanto al número de fórmulas demostradas, a todos los otros períodos considerados conjuntamente. Se desarrolla una lógica formal pura que soslaya cuestiones psicológicas, epistemológicas y metafísicas, cuya no muy larga historia Bochenski divide en cuatro fases.

La primera está constituida por las aportaciones de sus precursores. Abarcaría desde Leibniz hasta la publicación del ***Mathematical Analysis of Logic*** en 1847. En esta fase Leibniz establece de forma intuitiva, aunque no la desarrolla, la idea de una lógica matemática, y se formulan numerosos conceptos fundamentales. Es un período de preparación, no existe una escuela ni desarrollo progresivo, apenas algunos intentos aislados sin continuidad que pasan desapercibidos. Junto a Leibniz aparecen pequeñas contribuciones de Lambert, Euler, Gergonne, Lange, Ploucquet, Saccheri, Sir William Hamilton, Mill o Bolzano.

La segunda se inaugura con la publicación del ***Analysis*** de Boole en 1847 para concluir con ***Vorlesungen über die Algebra der Logik*** de Schröder cuyo primer volumen apareció en 1890 terminando de publicarse ya en 1905. Se produce en entonces por parte de Boole la construcción efectiva del programa leibniziano desarrollándose progresivamente la primera forma de la lógica matemática en la cual se aplican los métodos matemáticos a la lógica. Prior denomina a este período como «***primitivo algebraico de la lógica matemática***».

El período de Frege abarca desde la publicación de ***Begriffsschrift*** en 1879 hasta ***Principia mathematica*** de Russell y Whitehead entre 1910 y 1913. En esta época Frege y Peano se proponen la fundamentación de la matemática sobre la lógica desarrollando dentro de su programa logicista importantes conceptos y métodos lógicos que moldean sus posteriores derroteros. El período culmina con los ***Principia*** que constituyen un punto de inflexión para la historia de la lógica formal, en cuanto esta obra finaliza el proceso evolutivo anterior y supone el punto de partida de los desarrollos posteriores. Aparecen las antinomias lógicas y un primer tratamiento detallado de las mismas junto con un intento consistente de solución.

El último período es el contemporáneo que, desde los ***Principia*** hasta el presente, se caracteriza por el desarrollo de la metalógica. Aparecen nuevos sistemas lógicos como el de Lewis (1918), las lógicas polivalentes de Post y Lukasiewicz (1920-21) y la lógica intuicionista de Heyting. También pertenecen a esta época las lógicas «naturales» de Gentzen y Jaskowski (1934). Los trabajos de Gödel, Ramsey, Tarski o Carnap entre otros hablan de la complejidad alcanzada por la nueva ciencia totalmente constituida. Es un período de fuerte expansión aún no concluido, pero que ya no corresponde al nacimiento de la lógica matemática, que damos por terminado en los ***Principia Mathematica***. De hecho, ni siquiera esta obra cae ya bajo este rótulo.

Los protagonistas del proceso que nos ocupa, constructores o descubridores de la lógica matemática, según entendamos la naturaleza de los entes lógicos, mantienen posiciones filosóficas diversas, y muchas veces enfrentadas, acerca del estatuto de la matemática y la lógica. Desde el platonismo declarado de Frege al nominalismo e incluso psicologismo de Boole se representan todas las posturas. Sin embargo, todos forman parte de la misma historia, todos contribuyen a construir en lo esencial una misma lógica formal. Bochenski explica esta coincidencia de resultados por la separación tajante entre el desarrollo lógico y la filosofía (ontología, teoría del conocimiento, etc.) asumida por todos ellos. Las diferencias entre los distintos sistemas desarrollados no se deberá tanto a estos diversos posicionamientos filosóficos como a cuestiones de tipo interno en el desarrollo de sus propuestas, ya sea por establecer metas distintas, ya sea por proponerse diferentes grados de exactitud, o sólo por adoptar sistemas de notación distintos.

En cuanto a las metas que dirigen la investigación en lógica formal se trata de un tema que bien merece nos detengamos un poco a considerarlo. La lógica matemática parte de dos supuestos metodológicos: servirse del cálculo y conseguir demostraciones exactas. Por el primero la lógica se construye a imitación de la matemática como parte suya. Este es el propósito que guió a Boole y constituye una primera fase de la lógica matemática. Por el segundo lo que se persigue es la investigación de los fundamentos matemáticos dotando a la matemática de un modelo de demostración rigurosa. La lógica fundamenta a la matemática que deriva directamente de ella. Es el planteamiento de G. Frege que coloca la matemática bajo el dominio de la lógica.

Para explicar la relevancia que adquiere en este momento la lógica para los matemáticos debemos señalar tanto la aparición de las geometrías no euclideas como la formulación de nuevos sistemas de álgebra. Una consecuencia de estos revolucionarios desarrollos será la de cuestionar qué deba considerarse como verdad matemática, cada vez más alejada de la intuición. Lo que hasta entonces se consideraban verdades matemáticas empiezan a parecerse más a un constructo humano. Y si esto es así, verdadero se transforma en sinónimo de consistente, esto es, será verdad matemática lo que no conduzca a contradicción. El problema de los fundamentos se convierte en problema crucial y de ahí el interés que manifiestan por la lógica algunos matemáticos preocupados por estas cuestiones de tipo ontológico sobre los entes con los que trabajan.

No obstante, hay que distinguir una doble dirección en el desarrollo de la lógica matemática. La preocupación por construir un cálculo universal para el razonamiento, al modo de un álgebra nueva y más general, es el propósito que guía a los primeros lógicos del período. Boole, De Morgan o Ch. S. Peirce se sitúan así dentro de la corriente de nuevos desarrollos en álgebra que invaden el siglo XIX. La construcción de una lógica para fundamentar el edificio de la matemática constituirá la preocupación de un segundo momento. Primero manifestada en Frege a quien guía la insatisfacción por el problema de la consistencia, lo que le lleva al logicismo. Después, al aparecer las paradojas, surgen escuelas de pensamiento matemático que se proponen dar, desde diversos presupuestos, una respuesta al problema de los fundamentos, estimando de modo muy distinto el valor de la lógica para alcanzar su objetivo.

III. EL PERÍODO ALGEBRAICO DE LA LÓGICA MATEMÁTICA

La relación entre Leibniz y Boole puede hacerse paralela a la existente entre Platón y Aristóteles, lo que nos será muy útil para apreciar el peso relativo que ambos autores tienen en la historia de la lógica matemática. Si Leibniz, como Platón, proporciona las sugerencias fundamentales, será Boole, como Aristóteles, el espíritu sistemático que las haga efectivas. Boole, al contrario que Leibniz, fundará una escuela y su obra supone el punto de arranque para un desarrollo ininterrumpido en lógica.

George Boole (1815-1864) tuvo que arreglárselas como autodidacta para mejorar su condición social, estudiando para ello latín y griego. Se convierte en maestro de escuela y a los dieciséis años enseña matemáticas en un colegio privado, circunstancia que le obliga a estudiar a fondo, siempre por su cuenta, las obras de Laplace y Lagrange, al mismo tiempo que aprende idiomas. Traba amistad con A. De Morgan (1806-1871) y sigue con interés la polémica que este establece con Sir W. Hamilton (1788-1856) sobre el lugar que le corresponde a la lógica, para el primero asociada a la matemática y para el segundo a la metafísica. Tomará partido por De Morgan publicando sus propias conclusiones en un librito titulado ***The Mathematical Analysis of Logic*** considerado por De Morgan fundamental y que aparece el mismo año que su ***Formal Logic***, en 1847, fecha en la que, por esta razón, se ha dado en fijar el nacimiento oficial de la lógica matemática. ***Analysis***, además de convertirle en el auténtico fundador de la nueva disciplina le permitió también, por su reputación, ser nombrado dos años después profesor de matemáticas en el entonces recién creado Queens College de Cork, en Irlanda. Permanecería ligado a esta Universidad el resto de su vida. Murió en 1864 viendo reconocidos sus méritos en vida, incluyendo una graduación honoraria por la Universidad de Dublín.

Para Kneale las raíces de la original aportación booleana no hay que buscarlas tanto en la agria polémica entablada por De Morgan y Hamilton, en la que el filósofo escocés reclamaba para sí la prioridad en la doctrina de los cuantificadores acusando al matemático de plagiario, como en el conocimiento de Boole de dos importantes resultados alcanzados por los matemáticos anteriores. Los trabajos de G. Peacock (1791-1858), D. F. Gregory (1813-1844) y De Morgan sobre álgebra abstracta, publicados entre 1833 y 1844, establecen y desarrollan la idea de una posible álgebra de entidades que no fuesen números en ninguno de los sentidos convencionales del vocablo. H. G. Grassmann (1809-1877), A. Cayley (1821-1895) y W. R. Hamilton (1805-1865) crean álgebras alternativas con fines específicos que no cumplen todas las propiedades de los números hasta entonces estudiados, lo que supone el descubrimiento de que las leyes que rigen para cualquier clase de números hasta llegar a los complejos, e incluidos estos últimos, no necesitan respetarse íntegramente por un sistema algebraico que no resulte aplicable a tales números. En el caso de los cuaterniones de Hamilton carecía su sistema de la propiedad conmutativa de la multiplicación lo mismo que ocurría con las matrices de Cayley, en las que además el producto de dos matrices puede ser cero aunque ninguno de los dos factores sea cero.

El desarrollo del álgebra abstracta y la elaboración de nuevos sistemas algebraicos, en manos de un hombre que estima en las matemáticas sobre todo su capacidad para la generalización abstracta, constituyen la base sobre la cual descansa la gran idea que desarrollará Boole: que el álgebra puede ser desarrollada como un cálculo abstracto susceptible de interpretaciones diversas. Esta idea surge, como señala Boyer, de su concepción de la matemática misma que entiende no ya como ciencia del número y la magnitud, definición frecuente en su época, sino como verdadero cálculo

Boole termina un proceso de formalización iniciado por otros matemáticos, expresando por vez primera de forma clara el carácter formal de la Ciencia matemática, donde el contenido pierde relevancia frente a la forma hasta el punto de que «***si un***

tema cualquiera se presenta de tal manera que consista únicamente en símbolos y reglas precisas para operar con estos símbolos, sujeto todo ello solamente a una exigencia de consistencia interna, entonces este tema constituye una parte de las matemáticas».[3]

En 1854 publica ***An Investigation of the Laws of Thought*** donde extiende y clarifica lo ya presentado en 1847. Su idea principal, menos ambiciosa que la de Leibniz, era que las leyes existentes del razonamiento podían expresarse en forma simbólica con lo que era posible mejorar y facilitar su aplicación. Boole al establecer la lógica como ciencia de las leyes del razonamiento está defendiendo aún para la lógica el carácter psicologista que fue característico del período de lógica clásica moderna cuya mejor exposición se encuentra en ***Logique ou L'art de penser***, más conocida como ***Logique du Port Royal***, de Arnauld y Nicole (1662). A este psicologismo se opondrá vivamente Frege. En Boole encontramos, en cambio, un momento de transición.

Para J.A. DelVal[4] en 1854 desarrolla las ideas de 1847 pero se preocupa también de problemas filosóficos que en ***Analysis*** estaban ausentes. Habría, según este autor, dos aspectos a considerar en su obra: uno estrictamente formal, lógico; otro de tipo empírico, hoy integrado dentro de la psicología. Desde el punto de vista formal, Boole separa tajantemente lógica de psicología o epistemología y, por tanto, rompe con la lógica «clásica» inmediatamente anterior para fundar la lógica matemática al separar la lógica de las leyes del pensamiento. Pero aún así el aspecto psicológico está presente entre sus intereses por cuanto pretende que el estudio de la lógica puede arrojar luz sobre las leyes del pensamiento humano.

También los Kneale[5] dedican un espacio al interés booleano por una **'ciencia de la mente'**. Mencionan estos autores cómo Boole se ocupa los últimos años de su vida de las leyes del pensamiento en sentido psicológico, aludiendo en algunos trabajos inconclusos a una distinción entre la Lógica de Clases, que constituye el cálculo lógico de ***Analysis*** y de ***Laws of Thought***, y una lógica superior entendida como Filosofía de todo pensamiento. Así, aunque Boole defiende una concepción psicologista de la lógica como ciencia de las leyes del pensamiento, convirtiendo la lógica en parte de la epistemología, lo que desarrolla, y ésta es su contribución real e importante, es una ciencia formal que se ocupa de algunas de las leyes más generales de lo pensable sin referencia alguna a nuestros procesos mentales.

---

3 BOYER, C. B., *«Historia de la matemática»*, Alianza Universidad, Madrid 1986, pág. 723.

4 DELVAL, J. A., *«Lógica y psicología del razonamiento»*, en **PIAGET, J.**, *«Investigaciones sobre lógica y psicología»*, Alianza Universidad, Madrid 1977, págs. 20-21.

5 KNEALE, M. y W., op.cit. *«Des. Log.»*, págs. 375-6.

El cálculo booleano:

El sistema de la lógica matemática booleana admite una doble interpretación; como lógica de clases y como lógica sentencial o proposicional, y su desarrollo no fue obra sólo de Boole sino que intervinieron también De Morgan y Peano (1858-1932). De Morgan fue su precursor, aunque su obra principal se publique conjuntamente con la de Boole. Peano, en ***Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita*** publicado en 1889, concluye este desarrollo al postular un simbolismo, distinto por completo al matemático, que conduce a su forma definitiva el cálculo booleano al que extiende considerablemente.

Podemos empezar la exposición del sistema al modo como lo hizo el propio Boole, es decir, introduciendo los signos y conceptos necesarios para obtener el cálculo desde su interpretación más conocida: la lógica de clases. Estos símbolos son:

- **x, y, z,..**: « Símbolos electivos» que representan a las clases de individuos X, Y, Z que son seleccionados en un universo.

- + , - , .: Operadores que significan a las combinaciones que pueden hacerse con los elementos anteriores según ciertas reglas.

- =: Identidad. Aplicada a las clases significa que ambas partes de la identidad son clases con los mismos miembros. Nosotros hablaríamos de ella como de una relación de equivalencia para el conjunto de las clases que satisface el principio de sustitución.

- **1**: Universo «.... que abarca todas las clases pensables de objetos, existan realmente o no». Posteriormente De Morgan hablará del 'universo del discurso' y es este sentido el que utiliza Boole.

- **0**: Clase nula, aquella que no contiene elementos. Esta clase no se introduce mediante definición explícita por Boole, sino como resultado de la simbolización de la proposición 'Todos los x son y' que queda xy = x, de donde x(1 - y) = 0. La introducción expresa de esta clase junto con la universal corresponde a Schröder (1.890). El uso de la clase universal y de la clase vacía tiene un significado lógico importante, ya que respecto a la lógica aristotélica supone una ampliación, pues en ésta no existían términos de aplicación universal o nula.

- **xy**: Producto lógico. Operación que determina la selección de los elementos que se hallan en 'x' y en 'y' simultáneamente formando una nueva clase. Solemos denominarla como intersección. De esta concepción del producto se deriva la ley que distingue este álgebra de la 'normal', a saber xx = x, y en general $x^n = x$. Para ella Boole reconoce la propiedad conmutativa por la que xy = yx, y también se cumple que 1x=1 y 0x = 0.

- **x+y**: Suma lógica. Es la operación que selecciona los elementos de 'x' y de 'y' uniéndolos en una nueva clase. Esta operación que denominamos habitualmente unión no tiene un tratamiento uniforme, puesto que su interpretación actual procede de Jevons (1.864) y de Peirce (1.867), quienes la definen sobre la base de la disyunción inclusiva, lo cual hace que se cumplan las leyes de De Morgan. Sin embargo Boole utilizó una formulación diferente, que suele considerarse como disyunción exclusiva, aunque esto no sea exacto, pues para él x+y no es la clase de los elementos que se encuentran bien sea en x, bien sea en y, pero no en ambos a la vez, lo que sería una disyunción exclusiva, sino la clase formada por todos los elementos de la clase x, más todos los de la clase y, con la condición restrictiva de que 'x' e 'y' no pueden tener elementos en común. Podemos decir que es una operación que sólo puede aplicarse sobre clases disjuntas. En consecuencia expresiones como x+x, ó 1+x carecerían de sentido.

- **x-y**: Resta lógica. Es concebida por Boole como operación inversa de la anterior, y para su uso también hay condiciones, a saber, que x-y sólo puede llevarse a cabo si 'y' está incluida en 'x'. En caso contrario la expresión carecería de sentido. Boole sabía que una interpretación inclusiva de la operación suma hubiera hecho a la resta indeterminada ya que podría darse el caso de que x-y = z al tiempo que x-y = w siendo 'z' y 'w' distintas, porque x = y+z y x = y+w podrían ser verdadera según la disyunción inclusiva. Esta es la razón por la que impuso la restricción del uso de la suma lógica a las clases con intersección vacía. Las versiones modernas del álgebra de Boole no utilizan la operación resta, ni tampoco la división que era la operación inversa del producto o intersección, y a la que denominó abstracción, operación sin sentido en la lógica.

- $\overline{\mathbf{x}}$: Complemento. Es la clase formada por todos los elementos que pertenecen al universo a excepción de aquellos que están en 'x'. Con posterioridad a Boole el complemento se introduce expresamente entre los postulados, pero para él era la abreviatura de la operación 1-x, y tenía como consecuencias que x+(1-x) = 1 y que x(1-x) = 0. Esta última es el principio de no contradicción, que coloquialmente diría: «no hay individuos que estén y no estén en una clase, que tengan y no tengan una propiedad». Se derivaría así:

$$x^2 = x$$
$$0 = x - x^2$$
$$0 = x(1-x)$$

Como comentábamos anteriormente, una interpretación exclusiva de la suma lógica o unión de clases permite el cumplimiento de las leyes de De Morgan. Una vez vista la definición de complemento podemos expresar estas leyes en la lógica de Boole como:

$\overline{xy} = \overline{x} + \overline{y}$

$\overline{x + y} = \overline{x}\,\overline{y}$

- **Propiedades distributivas**. La suma y el producto son distributivas cada una respecto de la otra por lo que puede afirmarse: $x(y+z) = xy+xz$, e igualmente $x+yz = x+y \,.\, x+z$

La Silogística:

Ayudándose de los elementos que hemos ido exponiendo, Boole llegó a simbolizar en su sistema las proposiciones de la silogística aristotélica (las viejas proposiciones A, E, I, O), que redujo a las siguientes fórmulas:

(A) : Todo x es y .... $x(1\text{-}y) = 0$ ó $x = \nu y$
(E) : Ningún x es y .... $xy = 0$
(I) : Algún x es y .... $xy = \nu$
(0) : Algún x no es y .... $x\,(1\text{-}y) = \nu$

En ellas recurre a un nuevo símbolo, la letra ν, con el que significa una clase no definida salvo en cuanto que no es coextensa con la clase nula, o sea, una clase de la que lo único que sabemos es que no es vacía. Evidentemente esto es una deficiencia seria de la notación, pues puede generar equívocos tales como que las afirmaciones $ab = \nu$, $cd = \nu$, $ef = \nu$,... no pueden llevarnos a concluir con que $ab = cd = ef =$...,. que sería lo más natural. En definitiva, el símbolo 'ν' no puede representar a una clase, como quería Boole.

Lógica proposicional:

El origen de esta interpretación de la lógica booleana se halla en que todos los principios formales que hemos visto hasta ahora pueden mantenerse como válidos, al tiempo que descartamos la concepción de los símbolos como representantes de clases. Si a esta abstracción le añadimos la limitación de que los símbolos (x, y, z,...) sólo puedan admitir los valores 0 ó 1 tendremos un álgebra numérica, pero cuya aplicación está limitada al conjunto {0,1}, únicos números con los que se cumple la expresión $x(1 - x) = 0$, que era el principio distintivo del álgebra booleana. En este caso se cumple que:

$\overline{1} = 0 \qquad 1.1 = 1+1 = 1+0 = 0+1 = 1$ y que $\overline{0} = 1 \qquad 0+0 = 0.0 = 1.0 = 0.1 = 0$

Aprovechando esta reflexión Boole sugiere que podría interpretarse x=1 como 'la proposición X es verdadera' y x=0 como 'la proposición X es falsa' (no habiendo otros valores posibles para x, y, z,...). Desde Frege hasta hoy diríamos que esta utilizando 1 y 0 como 'valores de verdad'. La afirmación de x significaría que X es verdad, y la afirmación de 1-x expresaría que X es falsa (recordemos que 1-x es el complemento , que acostumbra a leerse en alguna simbología como la negación de x. Al tratarse de lógica bivalente negar la verdad de x es lo mismo que afirmar la verdad de no-x).

Al combinar dos proposiciones X e Y los casos posibles de combinación serían:

X	Y	
1	1	x y
1	0	x (1 - y)
0	1	(1 - x) y
0	0	(1 - x)(1 - y)

La suma de todos estos casos agota todas las posibilidades, por lo que es igual a 1:

$$xy + x(1-y) + (1-x)y + (1-x)(1-y)$$

Dado que la suma se concibe como disyunción exclusiva la verdad de un sumando cualquiera falsa a todos los demás y el producto de dos cualesquiera de ellos, consiguientemente, es 0.

Si bien estos principios podrían haber fructificado hasta llegar a una lógica de enunciados elaborada, las propuestas de Boole de que x pueda representar el tiempo en el que la proposición X es verdadera, y su uso de operaciones y coeficientes sin significado lógico hizo que su sistema tuviera que ser reformado en varios sentidos.

Las modificaciones:

Como ya hemos comentado en el apartado dedicado a la suma lógica, el principal cambio se produjo cuando se sustituyó la interpretación dada por Boole para el operador '+' por la correspondiente a la disyunción inclusiva sin condiciones limitantes. Ello permitió dotar de sentido a las expresiones del tipo $x+x = x$, o del tipo $x+y = z$, aunque $xy \neq 0$. Esta idea fue apoyada por Jevons en ***Pure Logic*** (1.864) y seguida por Peirce en ***On an improvement in Boole's calculus of logic*** (1.867). En este mismo trabajo Peirce mostró que con tal interpretación todos los teoremas que se demuestran en el álgebra de Boole para la adición se corresponden con otros homólogos para el producto y viceversa. Es lo que conocemos como teoremas duales. En 1.880, en ***A Boolean algebra with one constant*** Peirce ofreció una simplificación de las funciones booleanas recurriendo al functor conocido como 'flecha de Peirce' que desde una perspectiva veritativo-funcional ofrece la asignación de valores de la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \downarrow q$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

La misma idea fue redescubierta por Sheffer en el artículo ***A set of Five Independent Postulates for Boolean Algebras, with Application to Logical Constants*** (1.913), en el que añadió el functor 'barra de Sheffer', operador lógico que asigna valores según la siguiente tabla:

p	q	$p \mid q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Cualquiera de ambos, tomado aisladamente, sirve para reducir a cualesquiera otras funciones electivas de Boole, o conectivas de la actual lógica proposicional, como demostró Jean Nicod (1.917) en ***A Reduction in the Number of Primitive Propositions of Logic***.

La versión que podría llamarse final del algebra booleana está recogida en los trabajos de Huntington (1.904) sobre ***Sets of Independent Postulates for the Algebra of Logic***, y es la que ha transmitido a la matemática del siglo XX el interés por las estructuras que satisfacen los postulados del álgebra de Boole. Aunque Huntington da cinco grupos de postulados, cada uno de los cuales caracteriza a un álgebra de Boole, aquí vamos a mostrar una actualización de ellos[6]:

1.- Existe un conjunto k de elementos sujetos a una relación de equivalencia, denotada por '=', que satisface el Principio de sustitución

2.a Se define una regla de combinación '+' tal que 'a+b' está en k si 'a' y 'b' están en k

2.b Se define una regla de combinación '.' tal que 'a.b' está en k si 'a' y 'b' están en k

3.a Existe un elemento 0 en k, tal que, para cada 'a' de k, a+0 = a

3.b Existe un elemento 1 de k, tal que, para cada 'a' de k, a.1 = a

4.- Leyes conmutativas: 4.a a+b = b+a

4.b a.b = b.a

5.- Leyes distributivas: 5.a a+(b.c) = (a+b) . (a+c)

5.b a.(b+c) = (a.b) + (a.c)

6.- Para cada elemento 'a' de k existe un $\bar{a}$ tal que $a.\bar{a} = 0$ y $a+\bar{a} = 1$

7.- Hay en k al menos dos elementos x,y tales que $x \neq y$

Cerremos este apartado dedicado a la etapa algebraica de la lógica con el balance que de la aportación de Boole hace Bochenski cuando afirma que «***en conjunto, el álgebra booleana es, a pesar de sus puntos débiles, una de las escasas piezas de lógica bien logradas. Boole, en lo que a originalidad y haber abierto nuevas rutas***

[6] HILL, F. J. y PETERSON, G. R., «*Teoría de la conmutación y diseño lógico*», Edt. Limusa, Méjico 1989, pág. 66.

se refiere, se asemeja a Aristóteles. Sin embargo, no es fácil citar un lógico -fuera de Frege-, que después del fundador de la lógica, haya ofrecido algo tan original e innovador».[7]

IV. DE FREGE A RUSSELL: EL PROGRAMA LOGICISTA

Gottlob Frege (1848-1925) fue un matemático preocupado profundamente por el escaso rigor que mostraba, a finales del XIX, la ciencia desde siempre considerada paradigma de rigor. Su meta, a la que dedicó los esfuerzos de toda su vida, fue la de construir una nueva base para el número, el álgebra y el análisis, aún más rigurosa que la postulada por el movimiento crítico durante las últimas décadas del XIX. Paradójicamente, cuando creyó culminada su obra un joven matemático por aquel entonces, B. Russell, le comunicó que había descubierto una grieta en el edificio erigido con tanto esfuerzo, y pudo contemplar como éste se hundía. En el camino, no obstante, Frege hizo a la lógica las contribuciones más notables desde Aristóteles. Escaso consuelo para este hombre que tenía la lógica tan sólo como un instrumento y no como el centro de sus investigaciones.

Nacido en Wismar, Mecklenburg, el 8 de noviembre de 1848, estudió en Jena y Gotinga, y ejerció la docencia en la Universidad de Jena desde 1879 hasta 1918, sin alcanzar la posición de profesor ordinario, y sin que se le reconociera como el gran lógico matemático por el que es hoy tenido. Sin embargo, según Bochenski «***todo lo publicado en lógica matemática de 1879 a 1921, se halla por debajo del nivel alcanzado por Frege, e incluso son raras hasta nuestros mismos días, las obras que lo alcanzan***», llegando a afirmar que «***la circunstancia de haberse dado un Peirce y un Peano junto a Frege, nos impide tratar a este último como lo hemos hecho con Aristóteles. No obstante es Frege, sin ningún género de duda, el más importante de todos los pensadores de la Lógica matemática***»[8]. W. y M. Kneale[9], a su vez, insisten en considerar que la obra de Frege «***encierra todos los elementos esenciales de la lógica moderna, por lo que no sería injusto para con los lógicos anteriores o posteriores a él considerar al año 1879, en que aparece Begriffsschrift, como la fecha más trascendental de toda la historia de la lógica***». Frege pareció resignado a la soledad y la incomprensión, como confiesa en julio de 1893 en el prólogo a ***Grundgesetze*** cuando escribe que «***las perspectivas de mi libro son escasas, naturalmente. En todo caso, hay que descontar a todos los matemáticos que, al chocar con expresio-***

[7] BOCHENSKI, I. M, op. cit. «*Hist. log.*», pág. 313.
[8] BOCHENSKI, I. M., op. cit. «*Hist. Log.*», págs. 283-4.
[9] KNEALE, W. y M., op. cit. «*Des. log.*», pág. 272

nes lógicas como 'concepto', 'relación', 'juicio', piensan: metaphysica sunt, non leguntur!, y asimismo a los filósofos que, a la vista de una fórmula, exclaman: mathematica sunt, non leguntur!, y serán muy pocos los que no quepan en una de estas categorías».[10] Murió en Bad Kleinen, Mecklenburg, el 26 de julio de 1925.

Su programa de fundamentación del conocimiento matemático lo aborda en dos etapas. La primera consiste en la construcción de un cálculo lógico que acomete en ***Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*** (Conceptografía), y que para Frege, en palabras de C. Solís[11], «***sólo representa la elaboración de un instrumento necesario para llevar adelante un programa de definición y de fundamentación del conocimiento matemático***». En la segunda, se sitúa en el campo de la filosofía de la matemática donde defiende una posición logicista, desarrollada en sus dos obras fundamentales. ***Die Grundlagen der Arithmetik*** (Los Fundamentos de la Aritmética), publicada en 1884, expone informalmente sus puntos de vista junto con una extensa crítica de las ideas vigentes sobre la naturaleza de la aritmética: la empirista defendida por J.S. Mill, la kantiana y la formalista. En 1893 aparece el primer volumen y en 1903 el segundo de ***Die Grundgesetze der Arithmetik*** (Principios de la Aritmética), obra en la que expone rigurosamente su tesis de la identidad entre aritmética y lógica, culminando su empresa logicista. En el prólogo reconoce el vacío institucional en que se mueve, y en el apéndice al segundo volumen admite la inconsistencia de su sistema y, por tanto, el fracaso de su proyecto, por el descubrimiento de una paradoja en sus premisas sobre la que llama su atención B. Russell cuando aún estaba en imprenta. Este episodio final, y tan cruel para Frege, pone de relieve según C. Solís un doble mérito en nuestro pensador. Primero su capacidad para aceptar y encajar tan rudo golpe, como investigador puro al servicio de la búsqueda de la Verdad, con mayúsculas, en la que realmente creía como buen platónico que era. Segundo la capacidad del lenguaje lógico que construyó en ***Begriffsschrift*** para cumplir con la misión que Leibniz le había augurado: **'cerrar la boca al ignorante, enseñar al que no sabe'**.

Mientras prepara ***Grundgesetze*** escribe tres importantes artículos sobre filosofía de la lógica: ***Sobre función y concepto*** (1891), ***Sobre concepto y objeto*** (1892) y ***Sobre sentido y referencia*** (1892). A partir de 1903 hasta su muerte publica poco aunque sigue trabajando en Filosofía de la lógica y la matemática, según Kneale por no poder reconstruir su sistema eliminando la paradoja. Un hecho interesante de esta última etapa es la polémica que protagonizó con Hilbert sobre la naturaleza del méto-

[10] Citado por SOLÍS, C., *«G. Frege (1879): Begriffsschrift»*, en *«Lecturas de Lógica»*, comp. VEGA, L., Uned, Madrid 1986, pág. 46.

[11] SOLÍS, C., op. cit. *«Begriff.»*, pág. 46.

do axiomático en 1906. Polémica estéril para J. Mosterín[12] porque, al emplear tanto Frege como Hilbert las mismas palabras para referirse a conceptos diferentes, estaban condenados a no entenderse. En definitiva, lo que se estaba debatiendo no era tanto las bases sobre las cuales debía desarrollarse la axiomática moderna sino concepciones de la matemática distintas: realista en Frege defensor de la axiomática tradicional; instrumentalista en la axiomática moderna desarrollada por Hilbert en ***Grundlagen der Geometrie*** (1899).

Begriffsschrift constituye la principal aportación a la lógica de G. Frege. Esta obra, capital para la Historia de la Lógica moderna, pasó desapercibida en su momento, según Bochenski por culpa de su simbolismo que aunque «***no es, desde luego, que resulte especialmente difícil de leer, (...) es, realmente, demasiado original, choca excesivamente con los usos milenarios de la humanidad para ser aceptada***»[13].

Entre las aportaciones originales de Frege en el conjunto de su obra podemos mencionar:

1. La formulación precisa de la diferencia entre variable y constante, los conceptos de función lógica, pluriargumental y cuantificador con los cuales puede construir una lógica proposicional que permite la formalización tanto de la lógica de enunciados como de la cuantificacional de segundo orden.

2. Una concepción mucho más exacta de la teoría aristotélica de sistema axiomático, estableciendo un desarrollo axiomático de la lógica, esto es, una organización deductiva de la misma donde los principios de razonamiento lógico se deducen de unos pocos fundamentales, gracias a la genial intuición que le lleva a distinguir entre proposiciones y reglas del sistema.

3. La distinción entre ley y regla y entre lenguaje y metalenguaje aunque no introduzca estos términos.

4. La construcción de una teoría de la descripción.

5. Aunque no inventa el concepto de valor de verdad, pues la idea aparece en la escuela de Megara, si lo elabora sistemáticamente por primera vez en dependencia con su semántica especial en la cual toda sentencia es un nombre de la Verdad o de la Falsedad, doctrina que no ha sido recogida en la tradición posterior pero si el concepto de Valor de Verdad.

6. La formalización de un concepto más amplio de implicación, optando por la versión material de la misma que se remonta a Filón de Megara (300 a.J.), y ello a pesar de que Frege, al contrario que Peirce, desconocía las tradiciones megárico-estoica y escolástica sobre el tema.

[12] MOSTERÍN, J., «*Conceptos y Teorías en la Ciencia*», cap. V, Alianza Universidad, Madrid 1984.
[13] BOCHENSKI, I. M., op. cit. «*Hist. Log.*», págs. 283-4.

7. La distinción entre el mero enunciado de una proposición y la afirmación de que dicho enunciado es verdadero.

8. La distinción entre la relación de pertenencia de un objeto a un conjunto y la inclusión de un conjunto en otro, indistinguible en Boole, con lo que es posible plantear con toda precisión el problema de la prioridad entre comprensión y extensión en el marco de la lógica matemática.

Quizá se trató de demasiadas novedades juntas, presentadas de forma muy madura, como para poder ser asumidas por la comunidad de los lógicos de su momento. Lo cierto es que hasta veinte años después no se fija la atención sobre esta obra, lo que hará Russell aunque prefiriendo el simbolismo de Peano. Y aún serán precisos otros veinte años más para que mereciera el reconocimiento a la perfecta precisión de su método que Lukasiewicz pondera en referencia a la lógica de enunciados, pero que se extiende a todo el sistema desarrollado en ***Grundgesetze*** que coincide, esencialmente, con la lógica cuantificacional superior con identidad y descripción. La introducción de los cuantificadores permite a Frege hacer transparente la relación entre la lógica sentencial y la de términos, que habían seguido desde la antigüedad un desarrollo alternativo que arrancaba en la tradición megárico-estoica y la aristotélica respectivamente.

Begriffsschrift consta de tres capítulos, el primero de los cuales, «**Aclaración de signos**», expone las nociones lógicas que constituyen la base de la conceptografía construida y que pueden denominarse según C. Thiel[14] «***primera doctrina del juicio de Frege***». En el segundo, «**Exposición y deducción de algunos juicios del pensamiento puro**», aunque no utiliza ninguna terminología con la que referirse a la distinción entre lenguaje objeto y metalenguaje, reglas y leyes, Frege la emplea de forma implícita. Finalmente en el tercero, «**Aspectos sobre una teoría general de las series**», introduce un simbolismo especial para ampliar la conceptografía desarrollada en el primer capítulo y hacerla aplicable a su programa general de fundamentación lógica de la matemática.

El logicismo, cuyos más insignes representantes son Frege, como su fundador, y Russell, que hace su mejor exposición en los ***Principia***, afirma que no hay diferencia esencial entre lógica y matemática porque la matemática se desarrolla a partir de la lógica. Más exactamente, todos los términos matemáticos pueden definirse mediante los términos de la lógica, y todas las verdades de la matemática deducirse como teoremas de axiomas puramente lógicos. La idea ya la había sugerido Leibniz, pero quedó aparcada doscientos años hasta que Frege dedica todos sus esfuerzos a desarrollarla.

[14] THIEL, C., *«Sentido y Referencia en la Lógica de Gottlob Frege»*, Edt. Tecnos, Madrid 1972.

El problema de fondo es qué tipo de existencia otorgamos a los entes matemáticos, los entes abstractos en general. Es un problema metafísico, de filosofía de la matemática, pero muy importante por cuanto esta ciencia, desde Galileo, está proporcionando explicaciones físicas de gran potencia predictiva. Las matemáticas funcionan a pesar de que su desarrollo ha sido un tanto descuidado y en el siglo XIX, como consecuencia de ello, no se puede garantizar la consistencia de los sistemas de la matemática pura. El descubrimiento de la primera de las antinomias lógicas, la del conjunto de todos los números ordinales, entre 1895 y 1897, de forma independiente por G. Cantor (1845-1918) y por C. Burali-Forti(1861-1931), convierte en real el hasta entonces sólo intuido peligro para los fundamentos de la matemática. La caja de Pandora la abre la teoría de los conjuntos infinitos cantoriana cuando levanta el veto aristotélico al infinito actual.

Para Frege las leyes de las matemáticas son leyes analíticas, esto es, no dicen más que lo que está implícito en los principios de la lógica, que son verdades a priori. Las matemáticas son verdades de razón que pueden tener o no aplicación en el mundo físico. Construyendo primero la lógica sobre principios explícitos en su ***Conceptografía***, procede a derivar los conceptos de la aritmética, las leyes y la definición del número a partir de aquellos principios lógicos para, sobre ellos, pasar a deducir el álgebra, el análisis e incluso la geometría, esta última mediante el recurso a la geometría analítica que expresa los conceptos y propiedades geométricos en términos algebraicos. Los principios de la lógica que sustentan todo el entramado no son un mero juego de signos, el formalismo es sólo un recurso auxiliar, sino que en la más pura tradición idealista existen independientemente de cualquier mente, siendo percibidos por vía exclusivamente racional. Este conocimiento es objetivo e inalterable una vez obtenido.

El logicismo fregeano defiende que es la Aritmética la que descansa sobre principios, nociones y leyes que son definibles desde la Lógica. Por esto la Aritmética se considerará como derivada respecto a la lógica, que es quien le proporciona además un método, en el que se incluyen las formas válidas de inferencia que pueden utilizarse para obtener teoremas deducidos de los axiomas, y los mecanismos para formular aquellas nociones o elementos indemostrables que actúan como base para construir todas las nociones derivadas posteriores. La derivación de unas proposiciones a partir de otras mediante ciertas reglas, bien diferenciadas así de las leyes, ha de conducirse al modo de un cálculo que garantiza la validez de cada paso de la demostración. Por ello las proposiciones verdaderas de la Aritmética son así, verdaderas, por haber sido derivadas de manera estrictamente lógica de las definiciones y proposiciones primitivas, las cuales no se refieren a un campo restringido de la realidad, como hace la Geometría con el espacio, sino a todo lo pensable, y es precisamente esta generalidad la que las hace puramente lógicas.

Queda claro para Frege que la división Lógica-Aritmética no existe y que las deducciones se llevan a cabo en ambos campos conforme a las mismas reglas. Además, en la búsqueda de las definiciones primeras se ha de llegar a lo simple e indefinible, a no ser que se quiera caer en un proceso ad infinitum o circular. Las propiedades de los elementos simples son en el caso de la Aritmética independientes de las propiedades de las cosas y su fundamento es, así, meramente lógico.

En cuanto a la naturaleza de los objetos lógicos, Frege adopta una posición abiertamente platónica rechazando tanto las visiones psicologistas como las formalistas. Por eso defiende que hay algo más que meros signos en las proposiciones, se da en ellas la transmisión de un pensamiento objetivo, un sentido (sinn) que son capaces de representar. Este sentido no se identifica con un acto mental de un sujeto, sino con un contenido pensable por todo sujeto capaz de captar lo expresado mediante los símbolos de la proposición, «***la actividad mental se ha de considerar no como la productora del pensamiento, sino como la que lo aprehende***».

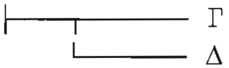
Al haber unos contenidos objetivos representados por las proposiciones, sólo los que sean verdaderos podrán actuar como premisas. Si son falsos nada se puede deducir de ellos, ni tampoco podrán actuar como premisas las meras hipótesis, pues la validez de lo deducido a partir de ellas estará siempre relativizado al cumplimiento de la hipótesis, con lo cual tampoco hay transmisión de verdad a la conclusión. Con tal posición Frege no sólo sostiene la existencia de un mundo de realidades imperceptibles, clave en su teoría sobre los objetos, sino la vieja aspiración aristotélica-euclídea de derivar todo conocimiento formal de verdades primeras e indiscutibles, sin admitir un uso instrumental del aparato formal al estilo de los formalistas, que a juicio de Frege confunden los signos con aquello que designan y convierten a la lógica o a la Matemática en un mero juego regulado de símbolos. Por ello pone tanto empeño en diferenciar entre la utilización de los signos (nombres, cifras, ...) en tanto que tales, representándose a sí mismos, y su uso como elementos sustitutivos de otra cosa, el pensamiento y objeto al que representan. En realidad está así diferenciando entre el uso y la mención para evitar los equívocos a que puede llevar su confusión.

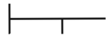
El sistema lógico de Frege:

Lo primero que hay que decir es que Frege dota a su formalismo de una simbolización propia completamente diferente de las existentes hasta entonces. Concretamente rechaza la actitud de Boole respecto a la adaptación de la simbología tradicional de la Aritmética, tanto porque piensa que las nociones y operaciones lógicas son previas a las aritméticas, cuanto porque desea mantener para la simbología matemática el significado que ya tiene en su uso habitual.

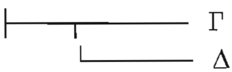
Comienza pues en ***Begriffschrift*** con el **signo de aserción** «⊢», en el cual la parte horizontal o **trazo de contenido** sirve para establecer que lo que sigue a continuación es una proposición, una expresión simbólica que representa un pensamiento o contenido enjuiciable. La parte vertical o **trazo de juicio** convierte a esa expresión de un contenido en un juicio efectivo, en la afirmación de tal contenido como un hecho; algo así como un predicado que rezara 'efectivamente sucede que ...'. Por esta razón operaciones como la negación, la condición, o la cuantificación no se efectúan sobre el juicio, sino sobre su contenido, y ello lo muestra Frege situando los símbolos de dichas operaciones después del trazo vertical del juicio. El símbolo que utiliza para las proposiciones es una mayúscula griega, y para evitar confusiones en los escritos posteriores a ***Begriffschrift*** sólo usa aquellas que son distintas de las mayúsculas latinas. Así puede considerarse $\vdash\Gamma$ como el juicio en el que afirma la proposición $-\Gamma$. Hay que hacer constar que Frege no desea tratar a los juicios como estructuras sujeto-predicado, y que tampoco considera relevantes las clasificaciones tradicionales de los juicios por la modalidad (problemáticos, asertóricos, apodícticos) o por la relación (categóricos, hipotéticos, disyuntivos).

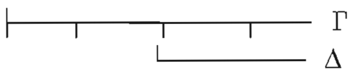
Aquí introduce el **condicional** (nuestro $\Delta \rightarrow \Gamma$) mediante la expresión



juicio en el que no se da la afirmación de Δ y la negación de Γ; $\neg(\Delta \wedge \neg\Gamma)$ en nuestra simbología, lo cual es el condicional material o filónico, que sólo resulta falso cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso. Aunque Frege apunta que juicios así sólo son emitidos sobre la base del reconocimiento de un nexo causal entre antecedente y consecuente, señala acertadamente que el signo del condicional no recoge en absoluto ninguna representación de tal vínculo. El siguiente símbolo es el de la **negación**  Γ, con un pequeño trazo vertical en la barra de contenido, que señala que éste es negado.

Con la adecuada combinación de estos elementos está en condiciones de utilizar el resto de las conectivas, aunque siempre definidas en términos de negaciones y condicionales, como por ejemplo en los casos de la disyunción inclusiva o la conjunción que serían respectivamente





El método inferencial es igualmente simple. De todas las posibles formas de deducción, Frege prefiere la regla de separación o Modus Ponens, que junto con la de sustitución, no definida explícitamente, le sirve para llevar a cabo las deducciones dada la forma condicional de sus expresiones axiomáticas. Por razones de comodidad, en los ***Grundgesetze*** usa algunas otras reglas inferenciales, como por ejemplo la contraposición, o la transitividad del condicional.

Esta mención explícita de los modos aceptados de deducción, claramente diferenciados de los axiomas y teoremas sirve para hacer patente la distinción entre tesis lógica o ley, que es una proposición verdadera, pues es axioma o teorema deducido de los axiomas, y regla, o modo aceptado de derivación de unas proposiciones a partir de otras en el que se transmite la verdad.

Podemos adentrarnos ahora en el tratamiento fregeano de la **cuantificación**, que es una de sus más importantes contribuciones, pues lo elabora de forma sistemática mejor que ningún otro lógico moderno, aunque no fuese tenido en cuenta hasta que Russell lo sacara del olvido. Además no sólo lleva a cabo una lógica de términos bajo una interpretación intensional dando lugar a la lógica de predicados, sino que también adopta una interpretación extensional que le permite generar una lógica de clases más eficaz y elaborada que la de Boole, por cuanto incluye a los individuos, y las relaciones que éstos guardan con las clases, no sólo las relaciones de las clases entre sí.

Antes de mostrar la notación de Frege para las expresiones cuantificadas, es preciso referirse aunque sea brevemente a las **variables**, que según su definición son aquellos signos que en la expresión pueden representar a distintas cosas, pudiendo ser reemplazados por otro símbolo, siempre el mismo en cada ocurrencia. La parte de la expresión que permanece fija en su sentido será la función, y la variable será el argumento de la misma. Teniendo en cuenta esto, Frege simboliza las expresiones generalizadas como

$$\vdash\!\!-\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\ \Phi(\mathfrak{a})$$

en el que «***la función es un hecho sea cual fuere el argumento que se considere***». «***De tal juicio se pueden deducir cuantos juicios se quieran con contenidos menos generales, sustituyendo la gótica por algo***». El único cuantificador que utiliza es el universal (**generalizador**), manejando el existencial (**particularizador**) definido en términos de aquél

$$\vdash\!\!-\!\top\!\!-\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!\top\!\!-\ \Phi(\mathfrak{a})$$

El cuantificador, que afecta a los individuos, puede situarse donde uno desee, para poder determinar inequívocamente el ámbito de su alcance, pudiendo incluso contemplarse la posibilidad de que estén unos bajo el alcance de otros siempre, claro está, que argumentos distintos se designen con letras góticas distintas. Así pueden formarse expresiones como

$\wedge \neg Ax$

$\wedge x\, (\wedge y\ Bxy \rightarrow Ay)$

las cuales son mucho más complejas que las que habían sido formalizadas hasta entonces. Como puede observarse en el último ejemplo aparecen predicados poliádicos o pluriargumentales, es decir funciones con varios argumentos, los cuales pueden ser cuantificados por separado. Este tipo de predicados son denominados relaciones, pudiendo hablar pues, de una **lógica de relaciones** fregeana.

Como aquellos casos en que el generalizador aparece justo a continuación del guión de juicio le parecen especiales (son los enunciados universales) da para ellos una notación distinta, una letra itálica ($\vdash \Phi\ (a)$) que equivaldría a la gótica con su concavidad

siempre que esa gótica no aparezca en el resto del enunciado.

Sobre la **identidad** puede decirse que Frege, por razones semánticas, no mantiene el mismo criterio a lo largo de toda su obra. En ***Begriffschrift*** mantiene que la identidad, simbolizada como '≡', al encontrarse en una expresión como $\vdash \Gamma \equiv \Delta$ expresa una relación entre los nombres Γ y Δ, por lo que estos no se encuentran significando a aquello que nombran, sino que se representan a sí mismos en tanto que nombres. Así, la identidad sirve para representar que el contenido de ambos nombres es el mismo, y sus expresiones intercambiables, lo cual es útil de cara a la formulación de definiciones. Además es obvio que así está defendiendo la concepción de la existencia de contenidos semánticos objetivos, que son significables de modos distintos.

A partir de ***Sobre sentido y referencia*** (1.892) ya no habla de contenidos de las expresiones, sino de su **sentido** y su **referencia**. La referencia será aquello a lo que la expresión se refiere, mientras que el sentido es el modo en que dicha expresión hace referencia al objeto que designa. Los ejemplos fregeanos son bastante elocuentes al respecto: el lucero matutino = el lucero vespertino, ó 2+2 = 4. Está claro que las referencias son las mismas en cada igualdad (el planeta Venus o el número cuatro), sin embargo los sentidos o formas de determinar tales referencias son distintas. Fuera del lenguaje ordinario, que puede hablar de seres ficticios, en el lenguaje científico y lógico todas las expresiones tienen que tener una referencia, un objeto del tipo que sea, y las proposiciones la tienen al igual que los nombres propios, aunque en el caso de las primeras su referencia sea un valor de verdad. Los enunciados son nombres de lo Verdadero o de lo Falso. La identidad, por lo tanto, ya no se trata en los ***Grundgesetze*** como relación entre nombres, sino como expresión de la igualdad de las referencias de los signos, a las que no se ha de confundir con los signos mismos. Por esta razón abandona el uso del signo '≡' y lo cambia por la tradicional igualdad '='.

Hemos nombrado aquí los **valores de verdad**, que como acabamos de ver son unas entidades cuyo status ontológico depende de su particular perspectiva semántica, que los convierte en una clase especial de objetos. Es curioso que la semántica de Frege no haya tenido ningún éxito en la filosofía del lenguaje posterior a él, mientras que el uso de la idea de valor de verdad ha tenido notable éxito en la lógica moderna. El pensamiento de Frege al respecto podría sintetizarse más o menos así: Según se planteó en ***Begriffschrift***, el símbolo '$\vdash$' representaba la aserción o afirmación efectiva en un juicio de que se daba realmente lo expresado por la proposición simbolizada a continuación de este signo, lo que equivale a decir que tal proposición 'es verdadera'. De este modo 'verdadero' parece ser un predicado que califica a la proposición. Por contra, en ***Sobre sentido y referencia*** señala que no puede admitirse que 'es verdad' sea un predicado, pues nada está diciendo de la proposición que no se exprese ya con la mera formulación de la proposición misma. Es decir, que el pensamiento o contenido de la proposición 'A' es exactamente el mismo que el pensamiento o contenido de la proposición 'el pensamiento de que A es verdadero'. Ello significa que, como predicado, 'verdadero' estaría vacío, sería asignificativo, y no puede considerárselo como un sentido de la expresión. Así pues será más bien su referencia, y por tanto un objeto. Igual que el significado o referencia de '2^2' y de '2+2' es el mismo, el de '3>2' ó '5 es un número primo' también es el mismo, a saber, 'lo verdadero'.

La referencia de un enunciado, su valor de verdad, no varía si sustituimos sus partes componentes por otras que tengan la misma referencia, un nombre por otro sinónimo, o una cláusula enunciativa por otra con el mismo valor de verdad. Sin embargo se plantean problemas con el estilo indirecto, en el cual cambia el valor de verdad si sustituimos una subordinada por otra ('Fulanito dice que A', por 'Fulanito dice que B' aunque 'A' y 'B' tengan idéntico valor de verdad). Independientemente de estas dificultades, lo que puede concluirse a la vista de la doctrina fregeana es que, dado que todo ha de ser o bien una función, o bien un objeto, y 'verdadero' no puede ser función, tendrá que ser necesariamente un objeto.

Cada vez que observamos una expresión vemos que en ella hay nombres propios, o sea, signos que representan a los objetos a los que se refieren. A la vez se hallan en la expresión otros elementos ajenos a los nombres propios y distintos de éstos, pues no tienen un significado completo, necesitan 'saturarse', cerrar la expresión mediante la colocación en el **lugar argumental** de un elemento. Esta parte es la que se denomina **signo funcional**, el cual representa a la **función**, que podríamos decir que es aquella operación que se lleva a cabo sobre el argumento, o conexión que se da entre los argumentos y los valores. Evidentemente, el lugar argumental es lo que habitualmente llamamos variables, mientras que **argumento** es aquello cuyo signo puede ocupar dicho lugar argumental para completar la función y así obtener su valor correspondiente. Dentro de las funciones Frege destaca aquellas que tienen como valores los valores de verdad, 'lo verdadero' o 'lo falso' ya que no contempla otros, creando así una lógica exclusivamente bivalente. A estas funciones las denomina **'conceptos'**, y admite la posibilidad de que posean varios lugares argumentales, en cuyo caso los llama **'relaciones'**. En ***Grundgesetze*** habla ya no sólo de funciones que tienen como valor un valor de verdad, sino de funciones que sólo admiten como argumentos valores de verdad, tales como la negación o el condicional, conectivas cuyo tratamiento ha sido desarrollado por él desde ***Begriffschrift***. El hecho de que estas funciones, o las que se pueden definir en términos de ellas, se den de valores de verdad en valores de verdad supone el primer tratamiento de las **conectivas lógicas** como **funciones veritativas** u operadores veritativo-funcionales, que es la interpretación actual. Frege va incluso más allá al proponer una notación para tratar **funciones de funciones**, o funciones de segundo grado, cuyo argumento, otra función, es representado por una consonante minúscula griega. Tomamos el siguiente ejemplo citado por W. y M. Kneale que representa «***Toda función de segundo grado que se aplique a las funciones de primer grado con un argumento se aplicará a cualquier función de primer grado con un argumento***», lo que se expresa

Aquí la minúscula griega entre paréntesis (β) indica lugares argumentales a ocupar por funciones de un argumento. La itálica M indica que hablamos de funciones de segundo grado y el subíndice indica que dichas funciones se aplican a funciones de primer grado con un argumento. Para funciones pluriargumentales (relaciones) bastaría con añadir más consonantes minúsculas griegas y subíndices ($\beta,\gamma,\delta,\ldots$). Con la misma estrategia podría crearse una notación para funciones de tercer grado. Como puede verse, no sólo trata Frege funciones de funciones, sino que admite la **cuantificación de las funciones**, con uno o más argumentos lo que significa que está construyendo la **lógica cuantificacional, monádica y poliádica, de orden superior**.

La lógica de clases:

Frege también intervino en el perfeccionamiento de la lógica de clases que, como sabemos, había sido desarrollada por Boole cuatro décadas antes. La novedad más importante es que en Frege sí hay un tratamiento de la relación que guardan los individuos respecto a la clase a la que pertenecen y de la que son elementos. Dicha relación había sido ignorada por Boole, que se limitó a operar con las clases entre sí.

Ciertamente, la interpretación extensional de los términos, que genera la lógica de clases no era del gusto de Frege, y así lo confiesa, como tendremos ocasión de ver más adelante, cuando Russell descubre las antinomias que genera su sistema, pero a pesar de todo sucumbió a la tentación de explorar ese terreno pese a ser partidario del intensionalismo que trataba a los términos como nuevos conceptos. Las clases, como extensiones de dichos conceptos, le parecen derivadas de ellos, y ese carácter secundario hace que no las admita de buen grado en el terreno de la lógica. De hecho al proceder a determinar las clases las extrae directamente de las funciones mediante una notación que le permite hablar de la transformación de una función en su **curso de valores**, como por ejemplo en la función

$$—\overset{\mathfrak{a}}{\smile}— \quad \mathfrak{a}^2 - \mathfrak{a}$$

que se convierte en $\ddot{\varphi}\ (\varepsilon^2 - \varepsilon)$, y en general $\varphi\ \Phi\ (\alpha)$ a partir de $\Phi\ (\xi)$. A nivel simbólico lo único distinto que aparece es la vocal minúscula con espíritu antepuesta a la expresión de la función, pero su sentido es ya completamente distinto, ya que estas representaciones no designan a la función, sino al conjunto de objetos que cumplen la función. Tratándose de funciones concepto, serían todos aquellos objetos que caen bajo el concepto. Este curso de valores sería la extensión de la función, con lo que él mismo se convierte en un objeto que representa a todas las funciones que asignan a los mismos argumentos iguales valores. Kneale señala acertadamente que curso de valores podría haberse entendido como el conjunto de pares ordenados argumento-valor de la función, si bien Frege no lo interpretó así.

La descripción:

El descriptor es una construcción lógica que al igual que la identidad puede añadirse o no al resto del sistema sin alterar el funcionamiento de éste. En el caso de la descripción se introduce la capacidad de simbolizar enunciados que empleen en lugar del nombre de un individuo, su nombre propio, un circunloquio mediante el cual se aluda a él y sólo a él. En cita de Frege recogida por Bochenski:

«***Suponiendo que $\Phi\,(\xi)$ fuera un concepto bajo el cual cayera el objeto Δ, y sólo él; entonces sería verdad***

$$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\quad \Phi\ (\mathfrak{a}) = (\Delta = \mathfrak{a})$$

y con ello sería también verdad $\ddot{\varphi}\,\Phi\,(\varepsilon) = \ddot{\varphi}\,(\Delta = \varepsilon)$, y como consecuencia de nuestra ecuación de "$\ddot{\varphi}\,(\Delta = \varepsilon)$" con "$\Delta$", $\ddot{\varphi}\,\Phi\,(\varepsilon)$ sería lo mismo que Δ ; es decir que en el caso de que $\Phi\,(\xi)$ sea un concepto bajo el cual caiga un objeto y sólo uno, "$\ddot{\varphi}\,\Phi\,(\varepsilon)$" designará a ese objeto. Mas esto no es en realidad posible, porque habría que admitir aquella ecuación en su universalidad; pero podemos ayudarnos introduciendo la función $\backslash\xi$ que admitimos con la salvedad de que hay que distinguir dos casos:

1.- ***Si al argumento corresponde un objeto Δ, tal que $\ddot{\varphi} = (\Delta = \varepsilon)$ sea el argumento, entonces el valor de la función $\backslash\xi$ es Δ mismo.***
2.- ***Si al argumento no corresponde ningún objeto Δ tal que $\ddot{\varphi}\,(\Delta = \varepsilon)$ sea el argumento, entonces el argumento mismo es el valor de la función $\backslash\xi$.***

Por lo tanto $\backslash\xi(\Delta = \varepsilon) = \Delta$ es verdad, y "$\backslash\xi\Phi\,(\varepsilon)$" significa, entonces, el objeto que cae bajo el concepto $\Phi\,(\xi)$, cuando $\Phi\,(\xi)$ es un concepto bajo el cual cae un objeto y solamente uno; en todos los demás casos "$\backslash\ddot{\varphi}\,\Phi\,(\varepsilon)$" significa lo mismo que "$\ddot{\varphi}\,\Phi\,(\varepsilon)$". Así p.ej., $2 = \backslash\ddot{\varphi}(\varepsilon+3 = 5)$ es verdad, por ser 2 el único objeto que cae bajo el concepto lo que añadido a 3, da 5.»

Con ello quiere decir que en el uso común de las descripciones un concepto como $\Phi\,(\xi)$, bajo el que cae un objeto único Δ tiene el mismo valor que la función $\xi{=}\Delta$ para todo argumento. Si ambas funciones dan idénticos valores a idénticos argumentos sus cursos de valores serán iguales, o sea $\varphi\,\Phi\,(\alpha) = \ddot{\varphi}\,(\varepsilon = \Delta)$, por lo que la función creada por Frege nos dirá que

$$[\,\backslash\,\varphi\,\Phi\,(\alpha)\,] = [\,\backslash\,\ddot{\varphi}\,(\varepsilon = \Delta)\,] = \Delta$$

es decir, el individuo que cumple Φ es el mismo que el individuo que es igual a Δ; por supuesto tal individuo es Ä mismo. En el supuesto de que tal individuo no existiera, o no fuera único, como Frege piensa que la expresión ha de tener alguna referencia, estipula que la función descriptor tendría como valor el propio curso de valores del concepto, o sea $\backslash\, \varphi\, \Phi\, (\alpha) = \varphi\, \Phi\, (\alpha)$.

Esta singular interpretación haría que cuando no hay tal individuo único, la expresión 'el individuo que cumple Φ ' tenga como referencia la clase generada por el concepto Φ . Ello le sirve para interpretar como falsos los enunciados en que se haga uso de descripciones en tales condiciones, pues lo que se diga de esos individuos únicos (que no son únicos o no existen) se dice de las clases generadas por los conceptos que supuestamente los definen. En ejemplo de Kneale, «El actual rey de Francia es calvo» significa «La clase de los reyes actuales de Francia es calva», lo cual es falso.

La axiomática:

Para terminar este apartado dedicado al sistema fregeano vamos a presentar dos conjuntos de axiomas, el primero extraído de ***Begriffschrift***, y el segundo de ***Grundgesetze***. Por razones de comodidad y espacio formulamos los primeros con la notación actual, mientras que dejamos los segundos en la notación original de Frege, pues como podrá observarse no se dejan traducir con exactitud a nuestra simbolización.

Axiomas de Begriffschrift

I. (1) $a \to (b \to a)$

II. (2) $[c \to (b \to a)] \to [(c \to b) \to (c \to a)]$

III. (3) $[d \to (b \to a)] \to [b \to (d \to a)]$

IV. (28) $(a \to b) \to (\neg b \to \neg a)$

V. (31) $\neg\neg a \to a$

VI. (41) $a \to \neg\neg a$

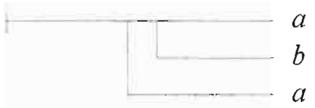
VII. (52) $(c \equiv d) \to [f(c) \to f(d)]$

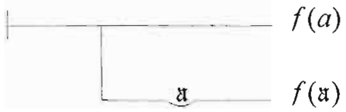
IX. (54) $c \equiv c$

X. (58) $(\bigwedge x\, Fx) \to Fa$

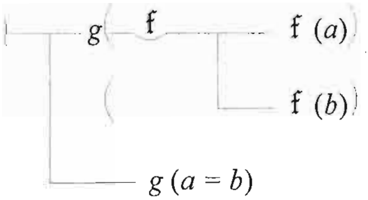
La numeración entre paréntesis que acompaña a las fórmulas es la que mantiene Frege en su original, y recordemos aquí que el tercer axioma es dependiente del primero y segundo.

Axiomas de Grundgesetze

1.- 

2.- 

2b.- 

3.- 

4.- 

5.- $\vdash (\acute{\varepsilon} f(\varepsilon) = \acute{\alpha}\, g(\alpha)) = (\underset{\mathfrak{a}}{\smile}\; f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a}))$

6.- $\vdash a = \backslash \acute{\varepsilon} (a = \varepsilon)$

V. ALTERNATIVAS AL LOGICISMO: LA CONTROVERSIA SOBRE LA NATURALEZA DE LOS ENTES MATEMÁTICOS

Junto con el logicismo encontramos otras dos escuelas que tratan de resolver el problema de los fundamentos matemáticos sobre otros presupuestos. Aunque sostenidas por ilustres matemáticos anteriores será tras la aparición de las paradojas cuando se concreten y sistematicen como posiciones enfrentadas en torno al fundamento de la matemática. Así en 1904 un trabajo de Hilbert sobre fundamentos avanza la posición formalista que desarrollará en los años veinte y en 1908, el mismo año en que Russell publica la primera versión de la teoría de tipos con la que pretendía salvar la paradoja detectada en el sistema fregeano para continuar el programa logicista, Brouwer se pronuncia por vez primera contra la fiabilidad de los principios lógicos.

La lógica jugará un papel diferente para ambos movimientos. El intuicionismo sólo aceptará como existentes aquellos elementos que podemos identificar específica y claramente, o por vía de un ejemplo del concepto que permita a cualquiera describirlo o reconocerlo. Se invierte el planteamiento logicista y ahora la lógica deriva de la matemática, no aceptándose por otra parte principios de razonamiento lógico tan fundamentales como el tercio excluso y la doble negación. Para el formalismo el problema de la existencia de los entes matemáticos se resuelve considerando como tales cualquier concepto mental que resulte útil y no lleve a contradicciones. La relación entre matemática y lógica no se establece en términos de derivabilidad, «***sino más bien que una (la aritmética)***[15] ***y otra (la lógica) debieran ser conjuntamente desarrolladas en orden a facilitar la demostración de que el sistema en su totalidad se halla libre de inconsistencia***».

El intuicionismo brouweriano:

Cuando, a fines del XIX, parece que las verdades matemáticas han dejado de ser tales los logicistas, no dispuestos a renunciar a una ciencia objetiva, buscarán en las verdades de la lógica el fundamento de las verdades matemáticas. Los intuicionistas intentarán un camino diferente al establecer la verdad de las matemáticas apelando a la sanción concedida por las mentes humanas, lo que podía ser intuido directamente. Con precursores en las filosofías de Descartes, Pascal y Kant, e iniciadores matemáticos como L. Kronecker (1823-1891), E. Borel (1871-1956), R. Baire (1874-1932),

[15] Hilbert había demostrado en sus *Grundlagen der Geometrie* (1899) que la consistencia de la Geometría se reducía a la de la aritmética, de ahí que el problema de fundamentos se resuelve probando la consistencia de esta última.

H. Lebesgue (1875-1941) o H. Poincaré (1854-1912), cuando critican, aunque de forma esporádica y fragmentaria, los argumentos matemáticos corrientes y el enfoque logicista de su época proponiendo nuevos principios, la versión acabada del intuicionismo deberá esperar a E.J. Brouwer (1881-1966) que comienza a exponerla en ***Sobre el Fundamento de las Matemáticas*** (1907), desarrollándola en diversos artículos desde 1918.

La matemática se entiende no como un resultado (conjunto de fórmulas) sino como un proceso, una actividad mental cuyos frutos se comunican ulteriormente por medio del lenguaje. En ese lenguaje, tal como lo usan los matemáticos, se observan ciertas normas que conducen a la formación de una lógica. La lógica, por tanto, se abstrae de las matemáticas y una vez abstraída puede formalizarse. El proceso de construcción mental que constituye el pensamiento matemático, objeto real de las auténticas matemáticas, construye su propio universo, independientemente de la experiencia y con la única restricción de asentarse en una intuición matemática fundamental. Como a esta intuición es inaccesible tanto el infinito actual como los principios de la geometría, los intuicionistas renuncian a una parte importante de la matemática: la teoría cantoriana y la geometría, considerada esta última como parte de las ciencias físicas. No será la única poda realizada a la matemática clásica pues dentro de la lógica, entendida como lenguaje en el que se expresa la matemática y derivado de ella, existen principios o procedimientos intuitivamente aceptables y claros que son parte de la intuición matemática fundamental y otros, como el tercio excluso, que deben ser rechazados. El rechazo de esta ley lógica, fundamental desde Aristóteles, supone un duro golpe para el quehacer matemático pues se trata de un procedimiento muy utilizado para probar la existencia. Los intuicionistas exigen, por el contrario, demostraciones constructivas, dar un método para mostrar la entidad o entidades en un número finito de pasos o un método para calcularlos con cualquier grado de aproximación deseado. Al rechazar la ley del tercio excluso las proposiciones serán o verdaderas, o falsas o indecidibles, esto es, aquellas de las que no puede probarse ni su verdad ni su falsedad.

Entre las críticas recibidas por el intuicionismo podemos mencionar: 1. Supone sacrificar partes esenciales de la matemática; 2. Hacen depender la corrección de la matemática en la autoevidencia para una mente humana falible renunciando a métodos objetivos de validación; 3. Se renuncia a la aplicación de la matemática en la explicación de la Naturaleza, al afirmar los intuicionistas que no hay relación entre matemática y percepción y que las matemáticas carecen de utilidad práctica; 4. Al separar tajantemente las matemáticas del lenguaje en que se expresan, nos obliga a confiar en el poder de la intuición hasta el punto de renunciar totalmente a la justificación de estas verdades así obtenidas para lo cual sería necesario su expresión en un lenguaje preciso y una demostración precisa, esto es, la matemática renuncia al contexto de justificación para desarrollarse exclusivamente en el de descubrimiento.

El formalismo hilbertiano:

D. Hilbert (1862-1943) es el representante más destacado del formalismo, desarrollando esta postura en la década de 1920 por la insatisfacción que le producen las soluciones tanto logicista como intuicionista al problema de los fundamentos. Su tesis fundamental sostiene que la matemática es una disciplina formal, abstracta, simbólica y sin referencia alguna al significado. A partir de axiomas lógicos y matemáticos expresados como fórmulas o colecciones de símbolos obtendremos otras fórmulas que serán teoremas deducidos, cuya demostración objetiva consistirá en el siguiente proceso:

1°: afirmación de una fórmula,
2°: afirmación de que esta fórmula implica otra, y
3°: afirmación de la segunda fórmula.

Cualquier fórmula obtenida en un proceso que siga estos tres pasos será una fórmula verdadera, pues desde el punto de vista formalista la demostración y el rigor son algo bien definido y objetivo.

El programa de Hilbert para la construcción de la matemática supone que esta es una colección de sistemas formales, cada uno de los cuales construye su propia lógica junto con sus matemáticas, y tiene sus propios conceptos, sus propios axiomas, sus propias reglas para deducir teoremas y sus propios teoremas. Hacer matemáticas consiste en desarrollar cada uno de esos sistemas deductivos. Lo único que hay que garantizar es su consistencia. A esta tarea dedica Hilbert todos sus esfuerzos elaborando entre 1920 y 1930, con sus discípulos W. Ackermann (1896-1962), P. Bernays (1888-1978) y J. von Neumann (1903-1957), la teoría de la demostración o metamatemática, un método para establecer la consistencia de todo sistema formal cuya idea básica consiste en usar una lógica especial libre de toda contradicción, con principios lógicos muy próximos a los intuicionistas, tan obvios que todo el mundo los aceptaría, evitándose razonamientos conflictivos y usando demostraciones de existencia constructivas. El criterio de verdad y de existencia formalista, la no contradicción, lo expresa muy claramente el propio Hilbert en una carta a Frege de 1899 o 1900 recogida por Bochenski:

> «***Dice Ud. en su carta: 'Llamo axiomas a proposiciones... De la verdad de los axiomas se sigue que no se contradicen mutuamente'. Me ha resultado muy interesante haber leído esta frase en su carta, pues cuando pienso, escribo o hablo sobre tales temas, me expreso siempre justamente al revés: Si los axiomas arbitrariamente propuestos, no se contradicen mutuamente con la totalidad de sus consecuencias, entonces son verdaderos, existen los objetos definidos por los axiomas. Este es para mí el criterio de verdad y de existencia***».

Frecuentemente al formalismo se le acusa de convertir la matemática en mero juego, lo que se contradice con su potencia para proporcionar explicaciones del mundo físico. En cualquier caso el de Hilbert es un formalismo mucho más elaborado que aquel representado por J. Thomae al que se opone Frege en ***Grundlagen*** pues, como señala Kline[16], hay que considerar «***en defensa de la escuela formalista, que si las matemáticas son reducidas a fórmulas sin significado, es únicamente con el propósito de probar la consistencia, la completud y otras propiedades. En cuanto a las matemáticas en su conjunto, incluso los formalistas rechazan la idea de que se trate simplemente de un juego; las consideran como una ciencia objetiva***». La otra crítica que se le ha opuesto es más difícil de superar. La matemática se fundamenta en la metamatemática, pero no está claro como garantizar la validez universal de los principios metamatemáticos.

VI. LAS PARADOJAS

El temor por la posible inconsistencia de la matemática que está detrás del movimiento de rigorización, se hace realidad a fines del XIX, justo cuando el logicismo creía haberlo exorcizado. Será una nueva rama de la matemática, la teoría cantoriana de conjuntos infinitos, la que presente la primera de las paradojas a la que seguirán otras. Cantor al romper con el tabú aristotélico impuesto al infinito actual abre un campo de investigación sugestivo y fructífero, pero al que muchos matemáticos se mostrarán reticentes. Su resistencia a aceptar estos nuevos resultados no carece de justificación pues la teoría de conjuntos será la vía por la cual aparecen las temidas antinomias.

Las paradojas no eran totalmente desconocidas en lógica, pero las que se habían debatido hasta entonces pertenecían al dominio de la semántica del lenguaje ordina-

[16] KLINE, M., op.cit. *«Mat. Perd. Cert.»*, pág. 304.

rio. Bochenski nos informa que los intentos de resolver estas contradicciones en la lógica antigua se olvidan en la clásica, y los pioneros de la lógica matemática no tienen noticias de ellas. Pero a finales del XIX las paradojas adquieren relevancia al aparecer en forma de antinomias lógicas, esto es, contradicciones deducibles de axiomas intuitivamente evidentes, en virtud de reglas conclusivas igualmente correctas. A comienzos de 1900, aunque todavía son muchos los matemáticos que minusvaloran el problema por considerarlo propio de una parte de la matemática que no aceptan, la teoría cantoriana, algunos buscan soluciones, preocupados por el desastre que suponen, no sólo para las matemáticas clásicas, sino para el razonamiento en general. Partimos de esta distinción entre paradojas semánticas y lógicas, que constituyó un paso decisivo al exigir cada tipo de paradoja un tratamiento diferente, aunque es muy posterior al período histórico que estamos abordando, porque con ella nuestra exposición gana en claridad y sistematicidad.

No vamos a ocuparnos aquí de las paradojas semánticas, pues si fueron un tema fundamental en otras formas de la lógica no tienen la misma relevancia para esta etapa de la lógica formal que estamos tratando. Todas ellas se basan en la autorreferencia, que lleva a contradicciones cuando razonamos en el lenguaje ordinario, y todas se eliminan procurando un procedimiento que la evite.

La primera de las paradojas lógicas, aunque conocida en 1895 por G. Cantor, es la que C. Burali-Forti presenta en 1897. Se trata de la paradoja del mayor número ordinal: «***la sucesión de todos los números ordinales, que está bien ordenada, debería tener como número ordinal el mayor de todos los ordinales. Pero entonces ese número ordinal sería mayor que todos los números ordinales***».[17]

La segunda, también detectada y no publicada por Cantor en 1899, aunque recibe su nombre, es redescubierta por Russell dentro de la lógica de Frege en 1902 y publicada al año siguiente, para ser popularizada en 1918 por el propio Russell en su versión **'barbero'**. La paradoja cantoriana es la del mayor número cardinal: «**Hay un número cardinal que es y no es a la vez el mayor de todos los números cardinales**».

La lógica de ***Grundgesetze***, esto es, una lógica cuantificacional superior donde las letras predicativas se cuantifican y pueden ser argumentos, da lugar a contradicciones. Frege alertado por Russell escribe en un Postscripto al segundo volumen de esta obra, fechado en octubre de 1902:

> «***Nada más descorazonador podría acontecerle a un autor científico que ver resquebrajarse uno de los pilares de su edificio tras haber dado la tarea por concluida.***

[17] KLINE, M.,,op. cit,, «*Pens. Mat.*», pág. 1322-1323.

Esta es la situación en que me ha colocado una carta del Sr. Bertrand Russell, recibida cuando la impresión de este volumen tocaba ya a su fin. Se trata de una cuestión relativa a mi Axioma (V). Por lo que a mí respecta, nunca me he ocultado a mí mismo que está lejos de resultar tan evidente como los restantes axiomas y como, en rigor, cabría de exigir a una ley lógica. Y así es como he cuidado de llamar la atención sobre este punto débil en el Prefacio al volumen I (pág. VII). En realidad, habría prescindido gustosamente de ese pilar si supiese de un modo de sustituirlo por algún otro. Pero lo cierto es que todavía ahora no sé cómo podría la aritmética ser científicamente fundamentada, cómo podrían los números ser aprehendidos como objetos lógicos sometidos a nuestra consideración, a menos que se nos permita –siquiera a título condicional– pasar de un concepto a su extensión. ¿Nos será invariablemente dado hablar de la extensión de un concepto, esto es, de una clase? Y, de no ser así, ¿cómo sabremos cuándo nos hallamos ante un caso excepcional? ¿Cabrá siempre inferir del hecho de que un concepto coincida en extensión con otro concepto que cualquier objeto incluido bajo el primero se ha de incluir también bajo el segundo? Estas son las preguntas que plantea la comunicación del Sr. Russell.

'Solatium miseris, socios habuisse dolorum'. También a mí me queda ese consuelo, si así puede llamársele; pues quienquiera que haya hecho uso en sus demostraciones de extensiones de conceptos, clases o conjuntos se hallará en la misma situación que yo. Lo que aquí está en cuestión no es precisamente mi modo particular de fundamentar la aritmética, sino la misma posibilidad de que esta última tenga algún fundamento lógico.

Pero vayamos ya con la dificultad. El Sr. Russell ha descubierto una contradicción que podría formularse en los términos que siguen.

A nadie se le ocurriría afirmar de la clase de los hombres que dicha clase sea un hombre. Tenemos aquí, pues, una clase que no se pertenece a sí misma. En líneas generales, digo que algo pertenece a una clase cuando se incluye bajo el concepto cuya extensión es esa clase. Fijémonos ahora en el concepto:

'clase que no se pertenece a sí misma'. La extensión de este concepto (si cabe hablar de su extensión) será, según lo dicho, la clase de las clases que no se pertenecen a sí mismas. Llamémosla, para abreviar, la clase K. Y preguntémonos ahora se la clase K se pertenece a sí misma. Supongamos, en primer lugar, que lo hace así. Si algo pertenece a una clase, ha de hallarse incluido bajo el concepto cuya extensión es esa clase. De modo que, si nuestra clase se pertenece a sí misma, se tratará de una clase que no se pertenece a sí misma. Nuestra primera suposición conduce, pues, a una contradicción. Supongamos a continuación, en segundo lugar, que nuestra clase K no se pertenece a sí misma; en ese caso, se hallará incluida bajo el concepto cuya extensión es ella misma y, por lo tanto, se tratará de una clase que se pertenece a sí misma. De nuevo aquí nos vemos abocados a una contradicción».

La paradoja que describe Frege es una versión, más básica de la cantoriana, que se refiere a clases. Paradojas similares se descubren por la misma época. Estas paradojas de la teoría de conjuntos tienen su origen en la noción de clase y, por tanto, aparecen en la lógica y en la matemática cuando estas adoptan una perspectiva extensional. No obstante, Russell descubre otras dos paradojas que muestran que la referencia a las clases no es la única causa de la dificultad. Una tiene que ver con propiedades y la otra con relaciones. Veamos a título de ejemplo la primera de ellas.

Hay dos tipos de propiedades: predicables, como la de ser concebible, que se aplican a sí mismas (la propiedad de ser concebible es concebible); y no predicables, como la de ser silla, que no se aplican a sí mismas (la propiedad de ser una silla no es una silla). Pero ¿qué ocurre con la propiedad de ser impredicable? Pues que la propiedad de ser impredicable es impredicable si y sólo si es predicable.

La búsqueda de una solución se volvió asunto acuciante para los lógicos y los matemáticos. Frege intentó dos vías sin sentirse nunca satisfecho de sus resultados:

1. La posibilidad de que hubiera conceptos a los que no correspondiese clase alguna, estando entre ellos el de la clase que no es miembro de sí misma. De ser así la paradoja desaparece por cuanto en tal caso no existiría la clase de todas las clases que no son miembros de sí misma.

2. Modificar el quinto axioma que provoca la paradoja con el cual, por otra parte,

nunca estuvo satisfecho, de forma que «***dos conceptos se dijeran en posesión de la misma extensión si, y sólo si, todo objeto incluido bajo el primero que no sea el mismo la extensión de este concepto se incluye igualmente bajo el segundo y viceversa***»[18].

Frege concentró todos sus esfuerzos en la segunda posibilidad sin resultado, desestimando la primera porque según Kneale era para él una «***revolucionaria novedad***». Será Russell quien la tendrá en cuenta estimando que existen funciones proposicionales que no determinan genuinas clase, a las que llama «**no predicativas**», que al ser admitidas sin más generan «**clases autorreproductivas**» que determinan la aparición de contradicciones. Russell, en esta época, no hace distingos entre paradojas semánticas y lógicas, estimando que incurren en un común círculo vicioso. Una presentación adecuada de la lógica las evitaría, y esta es la tarea que se propuso al elaborar la teoría de los tipos que presenta por vez primera en 1908 e incorpora en los *Principia Mathematica*. Tanto Frege como Russell estiman que las paradojas aparecen al introducir el concepto de clase y barajan la posibilidad de eliminarlo para lo cual deben, en virtud de su proyecto de fundamentación de la matemática sobre la lógica, examinar antes la posibilidad de presentar la matemática sin recurso a las clases. Pero como ya vimos más arriba es el propio Russell el que descubrirá que no es sólo el concepto de clase el que genera paradojas.

[18] KNEALE, W. y M., op.cit. «*Des. Log.*», pág. 607.

BIBLIOGRAFÍA:

- **ASIMOV, Isaac**: *«Enciclopedia Biográfica de Ciencia y Tecnología»*, Alianza Diccionarios, Madrid 1973.
- **BOCHENSKI, I. M.**: *«Historia de la Lógica Formal»*, Edt. Gredos, Madrid 1985.
- **BOYER, Carl B.**: *«Historia de la matemática»*, Alianza Universidad, Madrid 1986.
- **DELVAL, Juan A.**: *«Lógica y Psicología del Razonamiento»*, artículo en *«Investigaciones sobre lógica y psicología»*,
- **PIAGET, Jean** comp.: Alianza Universidad, Madrid 1977.
- **FERRATER MORA, José y LEBLANC, Hugues**:*«Lógica matemática»*, Edt. Fondo de Cultura Económica, Méjico 1971.
- **FREGE, G.**: *«Investigaciones lógicas»*, Edt. Tecnos, Madrid 1984.
- **HILL, F.J. y PETERSON, G. R.**: *«Teoría de la conmutación y diseño lógico»*, Edt. Limusa, Méjico 1989.
- **KLINE, Morris**: *«Matemáticas. La pérdida de la certidumbre»*, Edt. Siglo XXI, Madrid 1985.
- **KLINE, M.**: *«El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días»*, Tomo III, Alianza Universidad, Madrid 1992.
- **KNEALE, William y Martha**: *«El Desarrollo de la Lógica»*, Edt. Tecnos, Madrid 1980.
- **LUKASIEWICZ, J.**: *«Para una Historia de la Lógica de Enunciados»*, Cuadernos Teorema, Valencia 1977.
- **MOSTERÍN, Jesús**: *«La polémica entre Frege y Hilbert acerca del método axiomático»*, artículo en *«Conceptos y Teorías en la Ciencia»* de Jesús MOSTERÍN, Edt. Alianza Universidad, Madrid 1984.
- **PRIOR, Arthur N.**: *«Historia de la Lógica»*, Edt. Tecnos, Madrid 1976.
- **SOLÍS, Carlos**: *«Frege (1879): Begriffsschrift. Vorwort»*, artículo en *«Lecturas de Lógica»*, comp. Luis VEGA, U.N.E.D., Madrid 1986
- **THIEL, C.**: *«Sentido y Referencia en la Lógica de G. Frege»*, Edt. Tecnos, Madrid 1972.