EL INTUICIONISMO: J. BROUWER, H. WEYL

José Montesinos Sirera
I. B. Villalba Hervás de La Orotava

> **"Para nosotros los primeros, los nacidos tempranamente del siglo futuro ... el viejo Dios ha muerto"**
>
> **(Nietzsche, 1886)**

INTRODUCCIÓN

En Enero de 1889 Friedrich Nietzsche, la más incisiva voz filosófica de finales del siglo XIX, se derrumba psíquicamente al ver el duro castigo a que es sometido un caballo en una plaza de Turín. Nietzsche es internado en una clínica de Basilea y con la razón perdida, su torturada mente descansa al fin. Aún viviría diez años al cuidado de su madre y de su hermana. Nietzsche, anunciándonos "la muerte de Dios" estaría, según la interpretación de su gran exégeta Heidegger, certificando el fin de dos milenios de Cultura Occidental y el advenimiento del Nihilismo. La muerte de Dios, del Dios Cristiano, sería el fin de la concepción platónica en la que el mundo de las Ideas y de los Ideales sustituía al verdadero mundo de los sentidos. Es el fin de la Metafísica. El Nihilismo es, según Nietzsche, un movimiento que se sucede a lo largo de la historia occidental que produce la devaluación y pérdida de los más altos valores: Dios y el mundo suprasensible como mundo que realmente es y que determina todo, las ideas y los ideales, lo verdadero, lo bueno, lo bello.

El Nihilismo no es simplemente un signo de decadencia, es más bien lo que constituye la lógica interna de la historia del mundo occidental. Efectos, que no causas del mismo, serían la pérdida de la auténtica fe cristiana y el auge del "cristianismo" como cómplice de una política de dominación, el dominio de la técnica y la rebelión de las masas. Los valores que llenarían el vacío dejado por la pérdida de aquellos altos valores serían el Progreso y el Socialismo. La meta de la eterna felicidad individual en el otro mundo se habría cambiado por la terrena felicidad de los más. El culto religioso se habría relajado en beneficio del consumo de cultura y la creatividad, prerrogativa del Dios bíblico, sería ahora la característica distintiva de la actividad humana.

A la Metafísica le sucede la Técnica con sus servidoras las Ciencias Positivas, encumbradas por sus éxitos en el dominio de la Naturaleza. Y sin embargo, la palabra que más suena en los círculos intelectuales europeos a comienzos del siglo XX es la de CRISIS. (1) **Edmund Husserl** (1859-1938) en 1936 escribe un importante libro sobre **"La crisis de las ciencias como expresión de la crisis vital radical de la humanidad europea":**

> *"¿Cabe hablar seriamente de una crisis de nuestras ciencias sin más? ¿No será más bien una exageración este discurso, tan común en nuestros días? Que una ciencia esté en crisis quiere decir, en efecto, nada menos que esto: que su cientificidad genuina, que el modo como se autopropone objetivos y tareas y elabora, en consecuencia, una metodología, se han vuelto problemáticos. Esto podría, ciertamente, resultar aplicable a la filosofía, que en el presente tiende amenazadoramente a sucumbir al escepticismo, al irracionalismo, al misticismo ... Pero ¿Cómo podríamos hablar sin más y seriamente de una crisis de las ciencias en general y, por lo tanto, también de las ciencias positivas, incluyendo la matemática pura, las ciencias exactas de la naturaleza, que nunca podremos, sin embargo, dejar de admirar como ejemplos modélicos de una cientificidad rigurosa y fecunda en grado sumo?"*

La reducción positivista de la idea de ciencia a mera ciencia de hechos es, según Husserl, la provocadora de la "crisis" de la misma como pérdida de su importancia y significación para la vida. Meras ciencias de hechos hacen meros hombres de hechos.

El positivismo decapita, por así decirlo, la filosofía. El escepticismo frente a la posibilidad de una metafísica, el desmoronamiento de la creencia de una filosofía universal como conductora del hombre nuevo significa precisa y coherentemente el hundimiento de la fe en la "razón", entendida en sentido similar al de la oposición hecha por los antiguos entre **episteme y doxa.**

En los dominios de las Matemáticas, sin embargo, los últimos veinte años del siglo XIX asisten a un espectacular avance en los intentos del hombre por controlar los **procesos infinitos** y en su búsqueda de la esencia y estructura del **continuo** matemático. Este salto hacia delante tiene una base inequívocamente metafísica y típicamente germánica. La teoría de conjuntos, los números transfinitos, la pretensión de haber encuadrado el infinito en una totalidad **actual** y estática, el continuo de Cantor-Dedekind, son el fruto, según el propio Cantor, del uso de la libertad de creación en matemáticas –y como casi siempre a lo largo del desarrollo de la matemática occidental– con el concurso y beneplácito del Dios cristiano.

Tendríamos a comienzos del siglo XX, según Jan Sebestik, ***"Una matemática en sí instalada en el corazón del infinito que contempla con los ojos de Dios"***.

Una áspera disputa, que durará cincuenta años, se entabla entre los **constructivistas: Kronecker, Poincaré, Borel, Brouwer, H. Weyl,** de una parte y los **formalistas-logicistas: Dedekind, Cantor, Peano, Hilbert, Russell ...** de la otra. Las famosas controversias Poincaré-Russell y Poincaré-Hilbert son seguidas con atención por el mundo científico en los albores del siglo XX. La pretensión de reducir las matemáticas a la lógica y la manera de "certificar" la existencia de los entes matemáticos son temas centrales en la disputa, que arrecia cuando los "excesos" formalistas conducen a las antinomias de la teoría de conjuntos y hacen tambalear todo el edificio matemático.

El más radical de los constructivistas y reconocido representante de esa Filosofía de la Matemática que es el **Intuicionismo**, **Jan Brouwer**, en una conferencia no publicada, impartida en 1949 ("Disengagement of Mathematics from Logic"), hace un recorrido histórico sobre el desarrollo de los mecanismos del pensamiento matemático en lo que concierne al origen de la certeza matemática y a los límites de su contenido, que exponemos a continuación antes de entrar de lleno en el tema que nos ocupa.

Que en estos mecanismos del pensamiento matemático haya habido tan pocos cambios a lo largo de los siglos se debe, según Brouwer, a la creencia en las propiedades del **espacio** y del **tiempo**, inmutables e independientes del lenguaje y de la experiencia. Al conocimiento exacto de esas propiedades es a lo que se llama matemáticas y a ese conocimiento se llega en general a través del siguiente proceso: se advierten ciertas regularidades experimentales que parecen invariables (con un cierto grado de aproximación) y a partir de ahí se **postula** una absoluta y segura invariabilidad. A estas regularidades se las llama axiomas y a través del lenguaje y con ayuda de la razón guiada por la experiencia, usando los principios de la lógica clásica se concluyen nuevos sistemas de propiedades.

A esto lo llama Brouwer el "observational standpoint". Pero en el siglo XIX y a comienzos del XX y como consecuencia de los descubrimientos de Lobachevski, Riemann, Klein, Einstein, Levi-Civita y otros, este punto de vista es inmantenible en lo que concierne al espacio y las matemáticas van transformándose gradualmente en una mera ciencia de números. Animados por el importante papel jugado por el método **lógico-linguístico** en la creación de nuevas geometrías concebibles, método que opera con palabras por medio de reglas lógicas y sin el concurso de la experiencia, la **Vieja Escuela Formalista** (Dedekind, Cantor, Peano, Hilbert ...) rechaza cualquier elemento extralinguístico en la construcción de los entes matemáticos.

Más adelante, ante las críticas recibidas por parte de los pre-intuicionistas (Poincaré, Borel, Lebesgue), Hilbert funda la **Nueva Escuela Formalista**, que aceptará la existencia de entes matemáticos independientemente del lenguaje, pero únicamente para la **meta-matemática**, esto es, para el conjunto de reglas mediante las que se manipulan los símbolos del lenguaje matemático. Antes de seguir con la figura de Brouwer daremos algunas referencias sobre los constructivistas-intuicionistas franceses.

LA ESCUELA INTUICIONISTA FRANCESA

La primacía de la **intuición** en el pensamiento científico francés se remonta a **René Descartes,** que en la tercera de las "Reglas para la dirección del espíritu", quedaba definida así:

> *"Entiendo por intuición, no la creencia en el variable testimonio de los sentidos o en los juicios engañosos de la imaginación –mala reguladora– sino la concepción de un espíritu sano y atento, tan distinta y tan fácil que ninguna duda quede sobre lo conocido; o lo que es lo mismo, la concepción firme que nace en un espíritu sano y atento, por las luces naturales de la razón".*

No admitirá Descartes más que dos vías para llegar al conocimiento de las cosas, la intuición y la deducción; y ésta en cierta forma supeditada a la primera, pues

> *"He colocado la deducción junto a la intuición porque hay muchas cosas que pueden ser conocidas con toda seguridad –aún no siendo*

evidentes por sí mismas– deduciéndolas de principios ciertos por un movimiento continuo y no interrumpido del pensamiento y con una clara intuición de cada cosa".

Ya en el período que nos ocupa, a finales del siglo XIX, **HENRY BERGSON** continuando la tradición cartesiana, mantendrá también que hay dos formas de llegar al conocimiento. Una, la analítica que alcanza su mayor desarrollo en la ciencia positiva, **espacializando** y conceptualizando, con tendencia a ver las cosas como sólidas y discontinuas. La otra es intuitiva, que es una percepción global inmediata, que va directamente al corazón de las cosas y capta así la realidad verdadera, la interioridad, la duración, la continuidad, lo que se mueve y se hace. La primera es útil para actuar en el mundo pero falla en alcanzar la realidad esencial de las cosas, porque no considera el factor tiempo y su flujo perpetuo que es inexpresable y únicamente aprehensible a través de la intuición.

El método intuitivo descubre en lo psíquico los caracteres de **duración, cualidad y libertad.** Estos caracteres son opuestos a la **yuxtaposición, cantidad y determinismo,** que el naturalismo considera como los elementos constitutivos de lo real y que no son más que esquemas de la inteligencia.

Pero el concepto sobre el que gira toda la filosofía bergsoniana es el de **tiempo,** concebido como duración, algo que no es susceptible de reducirse al instante, pues es un flujo continuo cuyos momentos sucesivos no pueden separarse.

"Comment pourtant ne pas voir que l'essence de la durée est de couler, et que du stable accolé à du stable ne fera jamais rien que dure".

Es erróneo pues, para Bergson, espacializar el tiempo y ordenarlo rectilíneamente distinguiendo un pasado, un presente y un futuro. Para la realidad de la conciencia el tiempo es **duración** y sólo puede ser captado mediante la intuición. La influencia de la filosofía de Bergson en Francia y en toda Europa es enorme en el período que va de 1900 a 1920, pero en el terreno estrictamente científico es **HENRY POINCARE** el que portará el estandarte de la intuición, esta vez para enfrentarla al logicismo galopante que domina a la matemática a comienzos del siglo XX.

Henry Poincaré (1854-1912), brillante matemático y hombre de ciencia, es uno de los últimos "sabios" que han existido. Desde la Filosofía y la Literatura, a la Mecánica y Astronomía, dominó todos los saberes de su época. Calificado como pre-intuicionista por Brouwer, es sin duda, el más destacado miembro del Intuicionismo, como filosofía de la matemática, en sus inicios.

Declarado enemigo del logicismo (2), para Poincaré la matemática no deriva de la lógica y ello es especialmente claro en los dos temas fundamentales de las matemáticas, en el dominio de los números y en el dominio del espacio.

La lógica sirve sólamente para "lo finito" y su objetivo es el de clasificar. Cualquier tentativa de introducir en la Lógica un axioma del infinito es traicionar su esencia. Sólamente en las matemáticas se puede hacer referencia al infinito (potencialmente) porque el razonamiento matemático puede ser recursivo y la base de este proceso está en la intuición.

Sin embargo, la lógica y la intuición se necesitan la una de la otra; la lógica sirve para analizar, combinar y dar rigor y certeza (tautológica); la intuición da los datos iniciales, inventa y unifica.

Poincaré distingue dos tipos de intuición en las matemáticas: la intuición del "número" y la de los "sentidos". La primera está más allá de los sentidos y es la base de la aritmética, la segunda es menos fiable y es la base de la geometría.

"Ellas no tienen el mismo fin y parecen poner en juego dos facultades diferentes de nuestro espíritu; se dirían dos focos que alumbrasen mundos extraños el uno al otro"

La intuición del "puro número" es indudable y "a priori"

"... y ello no es sino la afirmación de una potencia del espíritu, el cual concibe la repetición de un mismo acto desde el momento que este es posible una vez (...) La inducción matemática se impone de manera necesaria porque es simplemente la afirmación de una propiedad del espíritu mismo"

("La science et l'hypothèse").

Para Poincaré la segunda de las intuiciones es más dudosa. A través de la intuición de los sentidos, llegamos a la noción de un espacio de representación empírica. Nuestras sensaciones visuales, táctiles, de esfuerzo muscular y su combinación forman una noción de éstas. En este espacio de representación construimos una geometría indagando en el modo en que las sensaciones se suceden unas a otras.

De este espacio de representación se pasa a un **espacio matemático** (ó continuo). Los cuerpos externos se convierten en figuras rígidas y el movimiento de estos cuerpos, esto es, la sucesión de sensaciones, es representado conceptualmente en la idea matemática de grupo de movimientos. Pero son muchas las posibles leyes que explican esa sucesión de movimientos. En consecuencia no existe una sola geometría. Así pues en geometría Poincaré es **convencional**.

Otros matemáticos franceses de esta época que cabría encuadrar en la Escuela Intuicionista son **Borel** (1871-1956) y **Baire** y en menor medida **Lebesgue** (1875-1941), que protagonizaron una sonada polémica epistolar con el también matemático francés **Hadamard** (1865-1963) a propósito del gran tema de controversia: la noción de existencia de un ente matemático; la ocasión la dio el **axioma de elección** del matemático alemán **Ernst Zermelo** (1871-1953).

Dado un conjunto infinito A podemos elegir un elemento x_1 perteneciente a A, y repetir el proceso en el conjunto A-$\{x_1\}$ y así sucesivamente, con lo que conseguiríamos una sucesión x_1, x_2, x_3, ... que obviamente tendría la potencia de los números naturales y así quedaría probado que todo conjunto infinito tiene al menos un subconjunto numerable. Lo problemático de este argumento está en que, en general, **no existe un método explícito para elegir sucesivamente esos elementos** y entonces salta la pregunta ¿**Existe** ese conjunto así seleccionado?. Bien, pues esto es lo que afirma el axioma de elección, que tiene otras muchas formulaciones equivalentes y que es vital en muchas ramas del Algebra y del Análisis para demostrar teoremas de "existencia".

Borel publicó una nota en los Mathematische Annalen criticando el uso del axioma de Zermelo; Hadamard le replicó haciendo la distinción entre **existencia de una función y su efectiva descripción.** Baire y Lebesgue se sumaron a la polémica indicando que la existencia de un ente matemático puede ser asegurada únicamente cuando se da una propiedad que la caracteriza y que en el mejor de los casos, la existencia garantizada por el axioma de Zermelo consistía solamente en que esos entes carecían de contradicción. Hadamard escribe de nuevo y ante la específica pregunta ¿queda garantizada la existencia de un ente matemático sin una definición que lo describa completamente? su respuesta es un categórico sí, previniendo lo catastrófico que sería la negativa para todo el edificio de la matemática cantoriana.

Borel, finalmente, cerrando la polémica, se reafirma en su negativa a aceptar tales argumentos y únicamente concede que esos "teoremas cantorianos" pueden servir de ayuda para construir demostraciones "serias", pero que en sí mismo son asertos carentes de significado y que a lo máximo tendrían el status de ciertas teorías en física matemática.

EL INTUICIONISMO BROUWERIANO

El auténtico creador de esa nueva filosofía de la matemática conocida hoy como **Intuicionismo** es **Luitzen Egbertus Jan BROUWER.**

Para tratar de explicar con detalle los rasgos fundamentales que la constituyen seguiremos el excelente y documentado libro de Walter P. van Stigt (3), en el que se rastrea la genealogía del intuicionismo brouweriano a través de la complicada personalidad de Brouwer y de su filosofía de la vida.

LOS PRIMEROS AÑOS Y LA FORMACION DE SU FILOSOFIA DE LA VIDA

Nace Brouwer el 27 de Febrero de 1881; es el mayor de los tres hijos de un maestro de escuela que le convierte en un niño prodigio que irá siempre adelantado varios años en los estudios. Es siempre el alumno más brillante y termina los Bachilleratos de Letras y de Ciencias con las máximas calificaciones.

A los 16 años se matricula en la Universidad de Amsterdam para estudiar matemáticas, lo que no le impide seguir cultivando la lectura de los clásicos y de sus filósofos preferidos: Kant y Schopenhauer. Para entonces, el joven Brouwer ha desarrollado un extremado individualismo; cuando tiene 17 años en ocasión de su confirmación en la fe de la Iglesia Reformada Protestante a la que pertenecía, escribe, después de declarar su sincera y apasionada creencia en Dios:

> *"... Debo aceptar, sin embargo, que esta creencia en Dios es algo fuera de lo normal, principalmente porque está fundada en una filosofía que no reconoce más que a Dios y a mí mismo como únicos seres existentes. Yo, al que conozco, y mi Dios, mi Señor, al que siento"*

Más adelante prosigue diciendo,

> *"Dios me ha dado la ambición de hacer mi vida tan bella como sea posible, pero sucede que el mundo que me rodea me hiere por su sordidez y es mi deseo el cambiarlo. Aunque dificilmente puedo llamar esto amor a mi prójimo, porque la gente me importa un pimiento. (4)*

En 1900 la burguesía holandesa está instalada en un cómodo conformismo y en las universidades corren vientos de rebeldía. En la joven "intelligentsia" prenden tendencias neo-románticas de una vuelta a la naturaleza y de rechazo

–muy de nuestros días– a una Industria contaminante y las filosofías orientales ofrecen un marco en el que encuentran alivio estas inquietudes. El movimiento Teosófico, una mezcla de doctrinas esotéricas de tradición hinduista, que favorece la experiencia mística y la meditación se pone de moda en los círculos estudiantiles de Amsterdam.

Brouwer, aun conservando un rabioso individualismo, no es ajeno a estas influencias. Se interesa por los místicos medievales Böehme y Eckehart, cultiva un pesimismo shopenhaueriano y lee con mucho interés las obras de Bergson que en estos momentos aparece con fuerza en la Europa culta como la personalidad que trata de reconciliar Metafísica y Ciencia. Hay que resaltar, que el joven Brouwer, tímido, introvertido y extremadamente asocial, recibe todas estas influencias como fermento para sus propias ideas que llevan, sin duda, un sello de originalidad (no aceptará nunca en sus escritos alguna influencia determinante en su formación), y todo ello lo encaminará a un fin: la obsesiva búsqueda en lo más íntimo de su ser, de los Fundamentos y de la Naturaleza de las Matemáticas.

Estas ideas, su concepción de la vida y del mundo, las plasmará en su escrito juvenil "Vida, Arte y Misticismo" (1905), del que no renegará nunca, a pesar de ser la fuente en la que se alimentarán sus detractores. La obra es un manifiesto incendiario contra la sociedad en la que vive. Especial ataque recibe la naturaleza humana que con su habilidad para razonar se convierte en *"un pájaro arrogante que se come su propio nido, interfiriendo con la madre Natura, mutilándola y haciendo estéril su poder creativo hasta que toda la vida haya sido devorada"*.

El manifiesto es ferozmente anti-científico y anti-intelectual. La Causalidad es condenada como esencialmente inmoral

> *"El intelecto ha rendido a la humanidad un maligno servicio al ligar esas dos fantasías que son la causa y efecto ..."*
> *"Una verdad científica no es más que una cierta infatuación del deseo, que vive exclusivamente en la mente"*.

Dedica un capítulo entero al lenguaje humano y a la imposibilidad de una real comunicación entre los hombres. Para Brouwer, de acuerdo con la tradición mística, el hombre es un ser espiritual, un alma aprisionada por un cuerpo y su manifestación más natural es la de la vida contemplativa, más allá del tiempo; es la intuición en su forma más pura. No hay certeza de la existencia de otras mentes y así una comunicación directa con ellas es imposible. El único tema positivo del libro es el de la intuición o "visión interior". El hombre, volcándose en sí mismo es como encuentra la verdadera sabiduría y el alivio a las frustraciones de la existencia en el Mundo. La vuelta a la naturaleza y a la vida sencilla es el bálsamo para la infelicidad que nos rodea.

Esta fuga del mundo, la pone en práctica el propio Brouwer, haciéndose construir una cabaña,"de Hut", en el bosque, cerca del pequeño pueblo de Laren, lugar de residencia de artistas y bohemios. Allí se refugiará en muchos momentos de su vida y allí producirá sus mejores trabajos en Topología y Fundamentos. Tampoco sale bien parada la condición femenina en su "corpus teórico", pero su misoginia no le impedirá, con un sentido práctico impropio de naturaleza tan pura, el casarse en 1904 con Elizabeth de Holl, divorciada de su primer marido, acomodada farmacéutica y doce años mayor que él. Este otro refugio cósmico le permitirá entre otras cosas poder retirarse a su cabaña para meditar y estudiar lejos del mundanal ruido y de los inconvenientes de tener que ganarse la vida, en un primer período, antes de convertirse en profesor de la Universidad de Amsterdam.

Aunque Brouwer, en general, desprecia la filosofía académica, va formándose en él lo que llama su "filosofía de la vida" que impregnará después su concepción de la matemática. Especialmente importante para ésta serán sus ideas sobre el **Lenguaje** y sobre el **Tiempo.**

En todos sus escritos filosóficos muestra que el propósito esencial del lenguaje es el de la transmisión de la voluntad del hombre en dominar el mundo que le rodea.

> *"En los más remotos estadios de la civilización y en las más primitivas relaciones entre los hombres, la transmisión de la voluntad de un hombre para que otro trabaje o le sirva se hace mediante gestos simples de todo tipo y fundamentalmente a través de los sonidos naturales y emotivos de la voz humana"* (Will, Knowledge and Speech, 1933)

Para Brouwer, pensar es un acto exclusivo del hombre individualmente considerado y hablar es una actividad del hombre social, un instrumento para provocar la acción de otros. La pura vida interior del hombre no puede ser comunicada. En relación al otro de sus grandes temas, dice:

> *"El fenómeno primordial no es otro que la intuición del tiempo, en el que la repetición de "algo-en-el-tiempo y otra vez ese algo" es posible"*

A diferencia de Kant, para quien la intuición "a priori" del tiempo es un elemento permanente y pasivo del pensamiento humano, en Brouwer, el tiempo, la **Intuición Primordial** es un suceso en la génesis de las cosas; es la presencia simultánea en la conciencia de dos sensaciones, la del pasado y la del presente. La Intuición Primordial es una intuición mediante la cual el hombre capta en el tiempo la relación antes-después.

SU FILOSOFIA DE LA MATEMÁTICA

a) El Primer Acto del Intuicionismo

En 1907 Brouwer presenta su tesis doctoral en la Universidad de Amsterdam sobre **"Los Fundamentos de las Matemáticas".** La búsqueda de la génesis de la matemática comienza con un examen crítico de las filosofías de las matemáticas existentes en ese momento. El logicismo de Russell, el formalismo de Hilbert, el pre-intuicionismo de Poincaré son expurgados, siempre sobre la base de su particular filosofía, de los elementos que se originan en las tendencias "viles" de la naturaleza humana: **los elementos causales** que conforman la ciencia y **los linguísticos** como parte de la acción social.

Su interpretación de las matemáticas como pensamiento constructivo a partir de la Intuición Primordial surge en un proceso de eliminación de aquellos elementos nocivos y por pura reflexión filosófica sobre la naturaleza del razonamiento y la constitución del tiempo. Aunque comparte la reacción anti-logicista de la escuela pre-intuicionista francesa y su convicción de que las matemáticas necesitan estar ligadas íntimamente a la mente humana, Brouwer es más radical en la búsqueda de la naturaleza de esa contribución y en la aceptación de las consecuencias, devastadoras para el conjunto de la matemática oficial, de esos principios fundacionales.

Brouwer no teme perder el paraíso prometido por Hilbert. Despoja a las matemáticas de todas las connotaciones teológicas que la habían acompañado en los últimos trescientos años y que habían alcanzado su máximo en las manipulaciones del infinito llevadas a cabo por Cantor. **Para Brouwer las matemáticas son humanas, demasiado humanas.** La Ciencia oficial consiste en la clasificación sistemática de secuencias causales de fenómenos y en particular las matemáticas serían la rama del pensamiento científico que se ocuparía de estudiar la estructura de los fenómenos. La visión matemática de estos fenómenos estaría motivada por la voluntad del hombre de autoconservarse y la elección de las estructuras a considerar estaría determinada por las exigencias del individuo en relación a la sociedad.

En la concepción "dinámica" que Brouwer tiene de las matemáticas, éstas evolucionan a lo largo de la Historia, y son el producto de la mente humana con todos los defectos que ello conlleva en cuanto a su falibilidad. En esta evolución las leyes de la Lógica aparecen como el resultado histórico de la lucha del hombre por organizar agregados de un número finito de objetos. Sucede que estas mismas leyes pueden ser aplicadas a conjuntos infinitos, con una excepción, la ley del tercio excluso (tertium non datur).

PRIMER ACTO DEL INTUICIONISMO

... que separa completamente la matemática del lenguaje matemático y por tanto de los fenómenos linguísticos descritos por la lógica teórica y reconoce que la matemática intuicionista es una actividad esencialmente alinguística de la mente que tiene su origen en la percepción de un movimiento del tiempo. Tal percepción puede ser descrita como la separación de un momento de la vida en dos cosas distintas, una de las cuales antecede a la otra, y es conservada en la memoria. La ***dualidad*** *así engendrada, despojada de toda cualidad pasa a ser la forma vacía del substrato común a todas las dualidades. Es este substrato común lo que constituye la intuición básica de la matemática.*

b) El Intuicionismo y la Ley del Tercio Excluso

Los intuicionistas consideran la creencia en la validez universal del principio del tercio excluso en matemáticas como un fenómeno de la historia de la civilización del mismo tipo que la creencia en la racionalidad de π o la de la rotación del firmamento en torno a la Tierra. Según Brouwer la aplicación incorrecta del P. T. E. es causada históricamente por los siguientes hechos:

1.- La Lógica Clásica es una abstracción conseguida a partir de las matemáticas de subconjuntos de un conjunto finito.

2.- Se adscribe a esta lógica clásica una existencia "a priori" independiente de las matemáticas.

3.- Merced a este apriorismo el P.T.E. es aplicado injustificadamente a las matemáticas de conjuntos infinitos.

Expondremos a continuación un ejemplo con el que Brouwer pretende demostrar las incongruencias del P.T.E. aplicado a conjuntos infinitos:

Llamaremos **Propiedad Huidiza**, relativa a números naturales, a aquella propiedad que satisface las siguientes condiciones:

1) Para cada n, número natural, se puede decidir si n la verifica o no.

2) No se conoce ningún método de calcular un número natural n que tenga dicha propiedad.

3) No se sabe si es absurdo el aserto de que al menos un número natural verifique dicha propiedad.

Es obvio que la naturaleza "huidiza" de una propiedad no es necesariamente permanente, dado que se podría descubrir en un momento dado un número natural que tuviese la propiedad o bien demostrarse el absurdo de la existencia de un tal número natural.

Ejemplo de Propiedad Huidiza: Diremos que n tiene la propiedad f, si en el desarrollo decimal del número π , la n-ésima, la (n+1)-ésima, la (n+2)-ésima ... y la (n+9)-ésima cifra forman una sucesión 0123456789.

Dada una propiedad huidiza f, llamaremos K_f, número crítico de esa propiedad, al menor de los números naturales (hipotéticos) que tienen la propiedad f. Diremos que un número natural n es un *número superior* de f si no es menor que K_f y *número inferior* si es menor que K_f. (Naturalmente, si encontrásemos un número superior de f, f dejaría de ser huidiza).

Pues bien, Brouwer da ahora un ejemplo de número real que viola el P.T.E.: Sea f una propiedad huidiza y sea S_f el número real que es límite de la sucesión infinita a_1, a_2 ..., donde $a_\nu = (-2)^{-\nu}$, si ν es un número inferior de f y $a = (-2)^{-Kf}$, si ν es un número superior.

S_f es un número real que no es igual a cero ni tampoco diferente de 0. S_f no es irracional y tampoco podemos decir que es racional pues esto equivaldría a poder calcular enteros p y q tal que S_f=p/q, pero esto requeriría poder indicar una secuencia 0123456789 en el desarrollo decimal de π o demostrar que tal secuencia no aparece en dicho desarrollo.

c) Brouwer y la Matemática Aplicada

En la Filosofía Intuicionista, la **aplicación de las matemáticas** es un tema importante y conflictivo pues se produce un grado de rechazo distinto en las diversas corrientes intuicionistas. En Brouwer es un tema central e inicialmente, su radical rechazo puede ponerse en relación a una postura romántica y "ecologista", una reacción contra el énfasis puesto en la utilidad de aquéllas, en un Departamento de Matemáticas, dirigido por el Profesor Korteweg que hacía de la aplicabilidad el fin último de las mismas. Para Korteweg, al igual que para Descartes, la matemática sería un baldío ejercicio estético si no se propusiese como fin último el dominio de la Naturaleza.

En "Vida, Arte y Misticismo" Brouwer reacciona violentamente contra esta idea. Para él el dominio de la naturaleza no es un beneficio sino "el inicio de todo lo vil", **"la construcción de las matemáticas es un arte en sí misma. Su aplicación al mundo un vil parásito".** Es una auténtica condena moral la que hace Brouwer. Desde otra perspectiva critica el idealismo de "la imagen científica del mundo". Las "leyes" de la Naturaleza no serían otra cosa que construcciones creadas por nuestro intelecto, producto de la capacidad matemática del hombre.

Las regularidades en los procesos naturales y su estructura existirían sólamente en nuestra mente; el hombre habría antropomorfizado la Naturaleza, dotando a ésta de características humanizadas y reprimiendo o adaptando la vida a la teoría. Brouwer distingue tres diversos mundos:

1.- La Naturaleza, la realidad física que tiene una existencia independiente del hombre y que es percibida directamente por los sentidos.
2.- El "Mundo Interior del Sujeto" que es el dominio de la matemática pura.
3.- El "Mundo exterior del Sujeto" que es el mundo de conceptos que el hombre ha derivado a través de la percepción de los sentidos por medio de su intuición matemática.

La tesis fundamental de la filosofía de la ciencia brouweriana es la total identificación de la Ciencia con el "Mundo Exterior del Sujeto" y que sus estructuras características están completamente concebidas por la mente del hombre. Este tercer mundo es parasitario de los dos primeros.

LA TEORIA DE CONJUNTOS Y EL SEGUNDO ACTO DEL INTUICIONISMO

En 1912 Brouwer es nombrado profesor en la Universidad de Amsterdam, gracias a los denodados esfuerzos que para ello realiza su mentor, el profesor **Korteweg**, a pesar de las notables diferencias en su apreciación de las matemáticas. Para este último, las matemáticas cobran un sentido si son aplicables a las ciencias de la naturaleza y no entiende cómo el genio que advierte en su pupilo puede malgastarse en problemas de fundamentos, así como tampoco la mezcla que hace en ellos de matemáticas y filosofía. Para entonces, Brouwer ha realizado importantes trabajos en Topología y publicado artículos de renombre internacional en la prestigiosa revista alemana dirigida por Hilbert **Mathematischen Annalen**. Pero una vez demostrada su pericia en el manejo de la matemática "oficial" y ya conseguido su objetivo de ser profesor en la Universidad, Brouwer vuelve al tema de los fundamentos y en su lección inaugural titulada **"Intuicionismo y Formalismo"**, se reafirma en sus convicciones de 1907. No es aún el Brouwer radical que identificará Intuicionismo con sus propias ideas. El principio del tercio excluso es sólo nombrado indirectamente y no hará distinción entre logicistas y formalistas que para él serán:

> *"Formalistas, que mantienen que la razón humana no tiene a su disposición imágenes exactas de la línea recta o de números mayores de 10 y para los que las matemáticas consisten simplemente en métodos de desarrollo de series de relaciones sin sentido, cuya existencia matemática estaría justificada a través del lenguaje escrito o hablado".*

Lo más significativo de este trabajo es su preocupación por la Teoría de Conjuntos y en ella se criticará particularmente la axiomática de **Zermelo**. Viaja a Gotinga donde conoce a Klein, y a Hilbert, con el que mantendrá, en un primer período, una correspondencia en la que Brouwer mezcla el respeto hacia el gran-matemático-consagrado con la osadía del joven-matemático con voluntad de poder. En una de esas cartas, Brouwer se autocalifica como la más competente persona para escribir un buen libro sobre teoría de conjuntos. En 1914 Klein le invita a entrar en el consejo editorial de los Mathematische Annalen, lo que acepta con entusiasmo: *"Ese gran honor para mí y la matemática holandesa"*.

Durante estos años se concentra en el problema del continuo y la necesidad de acomodar los números reales en el continuo geométrico, de una manera constructiva. Por el momento y al igual que la Escuela intuicionista francesa sólo acepta aquellos números reales generados por una ley en un número finito de operaciones.

En 1917 presenta en la Real Academia Holandesa la primera parte de su **"Fundamentos de una teoría de conjuntos, independiente del principio del tercio excluso"**. A pesar del título, el trabajo no es un ataque a la Lógica o un intento de re-escribir la teoría kantoriana de conjuntos sin el uso del principio del tercio excluso. Es un innovador y radical intento de reemplazar la noción tradicional de número real y la teoría de conjuntos de Cantor por nuevos conceptos, derivados de forma natural a partir del continuo intuitivo y del poder de abstracción del Sujeto. El continuo intuitivo, cuya característica más importante es que la intuición del "entre" nunca se termina por divisiones sucesivas.

Brouwer es consciente de los límites que impone a la actividad matemática su Primer Acto del Intuicionismo y su rechazo al principio del tercio excluso en conjuntos infinitos; en particular, la sucesiones infinitas admisibles son las predeterminadas, en las que para cada n, el término n-ésimo está fijado desde el principio. Esto hace que el conjunto de números reales, el "continuo" sea numerable y de medida 0. Para superar esta dificultad, Brouwer, de manera genial da un salto hacia delante y legitima nuevas formas de crear entes matemáticos y ello lo expresa en el:

SEGUNDO ACTO DEL INTUICIONISMO

"... Que admite la posibilidad de generar nuevas entidades matemáticas. En primer lugar, sucesiones infinitas que proceden más o menos libremente y que se generan a partir de entes matemáticos previamente adquiridos. En segundo lugar, "especies matemáticas", esto es, propiedades atribuibles a entidades matemáticas previamente adquiridas,

que satisfacen la condición de que si valen para ciertas entidades matemáticas, valen también para todas las relacionadas con ellas mediante una relación de equivalencia".

En el nuevo análisis el elemento primitivo de construcción no es el punto; es el intervalo, de la misma naturaleza y dimensión que el propio continuo y a partir de ellos se construyen "elementos reales del continuo" mediante sucesiones convergentes de intervalos encajados.

EL CONTINUO BROUWERIANO

El gran problema de las Matemáticas y seguramente de la Filosofía y de las Ciencias es el del **continuo**. La personalidad de Brouwer, sus intereses filosóficos, su misticismo y sus ansias de encontrar unos fundamentos más sólidos para la matemática y para el mundo que le rodeaba, hacen del problema del continuo su tema predilecto. Durante el período 1907-1917 sus trabajos en Topología y Fundamentos giran en torno al tema del continuo, que no pretenderá haber resuelto, pero del que sí reivindicará una "nueva visión", inserta en su Filosofía Intuicionista de las Matemáticas, de la que formará una parte sustancial. Introducirá en las matemáticas elementos de indeterminación y libertad que ya Bergson había considerado como de exclusiva prerrogativa del "tiempo puro".

Los puntos fundamentales de esta concepción que permanecerán fijos a lo largo de estos años pueden resumirse en los siguientes:

1.- El único "elemento a priori" del continuo es el **Tiempo**.

2.- El continuo matemático es un concepto creado mediante la abstracción matemática y **existente únicamente en la mente del hombre.**

3.- El continuo es un concepto **primitivo**, perteneciente por tanto a la categoría de Intuición Primordial, directamente extraído de la conciencia del tiempo.

4.- El continuo **no puede ser identificado como una totalidad construida de puntos**. Estos tienen un papel en el análisis del continuo como extremos de los intervalos en los que el continuo puede descomponerse, pero no son partes constituyentes del mismo.

En el continuo brouweriano, el número real está definido por una sucesión de números naturales, pero no todas estas sucesiones están determinadas por una ley, sino que son producto de una **libre elección** y son construidas **paso a paso** por libres actos de elección y por consiguiente, se mantienen siempre "in statu nascendi". Mientras que las sucesiones determinadas ad infinitum por una ley representan los números reales individuales que tienen un lugar en el continuo, las sucesiones de libre elección representan lo variable del continuo. De una de estas sucesiones de libre elección, sólamente se inferirán propiedades que tengan sentido, cuando baste que se comprueben para segmentos iniciales, finitos, y el desarrollo posterior no afecte a la decisión tomada.

Este libre acto de elección no debe confundirse con la "elección" del axioma de Zermelo en el que la sucesión seleccionada se la concibe como una totalidad completa y acabada. Brouwer no considera sus sucesiones de libre elección como un todo dado, y con ellas pretende además reflejar el crecimiento y el aspecto dinámico del continuo matemático, inspirado en la intuición del Tiempo que fluye. El continuo no es pues un agregado de elementos fijos, sino un dominio de libre "devenir". Una de las claves para comprender el continuo brouweriano reside en la naturaleza complementaria de lo discreto y lo continuo que sigue de la Intuición Primordial.

> *"La intuición primordial ... como unidad de lo continuo y lo discreto, la posibilidad de pensar a la vez en sigularidades unidas por un "entre" que nunca se agota por inserción de nuevas singularidades ... por tanto es imposible tomar alguno de ellos como autosuficiente y construir el otro a partir de ahí"*

El continuo matemático existe sólo como un concepto del pensamiento abstracto y su descripción, necesariamente metafórica, usa términos característicos de los modelos físicos. El más apropiado de estos modelos es el del tiempo-continuo; sin embargo, el modelo espacial es el que se impone convencionalmente por su visualidad y mayor facilidad para ser aprehendido por el lenguaje y las imágenes. La singularidades discretas son los puntos y el intervalo abierto es el espacio-línea entre ellos, pero su carácter estático lo hace menos deseable si lo que se quiere es ilustrar los aspectos dinámicos del continuo matemático.

EL PROGRAMA INTUICIONISTA Y LA CONFRONTACION CON HILBERT (1920-1930)

En 1918 Brouwer presenta la segunda parte de **"Fundamentos de la Teoría de Conjuntos"** y uno de los primeros en estudiar y calibrar la importancia de este texto es **Hermann Weyl**, brillante matemático alemán y alumno predilecto de Hilbert. Weyl es amigo de Brouwer desde 1911 y comparte con éste el interés por los Fundamentos. Después de la lectura de este artículo de Brouwer y tras un corto período vacacional que pasan juntos, cae bajo los influjos de la personalidad de Brouwer y se convierte, según propias palabras, en un apóstol del

Intuicionismo. En 1920 Weyl imparte un curso en Zurich que luego dará lugar a un libro de significativo título **"Sobre la nueva crisis de los Fundamentos de las Matemáticas"**, en el que expone las ideas de Brouwer sobre el continuo y la teoría de conjuntos y en el que se dice:

> *"... ¡Y Brouwer, que es la revolución! Brouwer es a quien tenemos que agradecer la solución moderna (la nueva solución) de los problemas del continuo, cuya solución provisional, a través de Galileo y de los precursores del cálculo diferencial e integral, ha destruido una vez más desde dentro el proceso histórico"*

Brouwer está más que nunca seguro de lo correcto de sus ideas y emprende un ambicioso Programa de Reforma del Análisis, al que dedicará muchas de sus energías en los próximos diez años. Paralelemente emprende la batalla "política" contra los defensores del análisis clásico y la matemática formalista y especialmente contra su jefe de filas: Hilbert, quien no oculta su irritación y alarma al ver calificar las ideas de Brouwer como "la mayor revolución desde Galileo" por parte de uno de sus mejores alumnos.

En 1920 Europa está aún bajo los efectos de la dramática sacudida social que representó la Primera Guerra Mundial. Una sensación de "comenzar de nuevo" y de radical criticismo de lo establecido tiene lugar en todo el continente europeo, escenario de la más salvaje carnicería que la Historia había contemplado hasta entonces. Especialmente en Alemania, cuyo poder intelectual permanecía intacto, la impresión de desconcierto y humillación era general; en las Ciencias de la Naturaleza la causalidad clásica es puesta en entredicho y el Arte, la Filosofía y la Política se van impreganado de irracionalidad. Esta situación es especialmente propicia para los afanes renovadores de Brouwer, que crea un movimiento, el "Signific Movement" en el que se invita a personalidades del mundo cultural europeo a participar en un proyecto de cambio, uno de cuyos pilares sería el de una renovación del lenguaje, según Brouwer, profundamente necesitado de espiritualidad.

A Brouwer se le ofrecen en este momento cátedras en Gotinga y Berlín que él rechazará, aunque sus relaciones con la Universidad de Berlín serán siempre muy buenas y allí pasará como profesor visitante largas temporadas. En Berlín existía una corriente constructivista y anti-cantoriana descendiente de la escuela de Kronecker y se había desarrollado una creciente hostilidad contra la Universidad de Gotinga que en estos momentos era considerada el primer centro de matemáticas en el mundo, liderado por Hilbert. En 1927 Brouwer da una serie de conferencias sobre el Intuicionismo en la Universidad de Berlín que son recibidas con entusiasmo; en estrecha relación con **Bieberbach** (5), geómetra y nacionalista (más adelante jugará un papel destacado en las filas del nacional-socialismo), preconiza un boicot al Congreso Internacional de Matemáticas que iba a celebrarse en Bolonia en 1928, organizado por la Union Mathematique Internationale, que aún mantenía un veto a los matemáticos alemanes para ser miembros de pleno derecho de la Organización, dentro de una serie de torpes medidas de represalia contra la matemática y ciencia alemana que los franceses y belgas habían instituido después de la Gran Guerra.

Hilbert, desoyendo la propuesta de Berlín, acude al Congreso en el que haría su última intervención pública atacando duramente al Intuicionismo y a la figura de Brouwer. A su vuelta destituye fulminantemente a Brouwer del Consejo Editorial de la **Mathematische Annalen**, sin contar siquiera con la opinión de los otros directores de la revista, Einstein y Caratheodory. Brouwer comprueba que la medida es aceptada mayoritariamente por la comunidad internacional de matemáticos y se hunde en la depresión, refugiándose de nuevo en el solipsismo y, renovando sus sentimientos de aversión hacia el género humano, cesa en su producción matemática. Arendt Heyting, uno de los pocos alumnos suyos con los que no termina enemistándose, continuará desarrollando el Programa de la Matemática Intuicionista. Pero ésta ha perdido ya la batalla.

HERMANN WEYL (1885-1955)

Uno de los más brillantes y completos matemáticos de la primera mitad de siglo; hombre de inmensa cultura, escribió libros que son un modelo de precisión y elegancia. Sus grandes contribuciones a las matemáticas sirvieron de enlace a la matemática pura con la física teórica en los campos de la Mecánica Cuántica y de la Teoría de la Relatividad, pero su gran preocupación es, como en el caso de Brouwer la fundamentación de las matemáticas. Matemático en cierta forma atípico para esta época, huye de una excesiva especialización y es un gran conocedor de la Filosofía y de la Historia de la Matemática. Confiesa que gracias a sus lecturas de Husserl se liberó del positivismo, abriendo su espíritu a una concepción más abierta del mundo.

Me interesa aquí destacar su interés por los fundamentos de las matemáticas que le llevaron, como ya hemos visto, a posiciones muy cercanas a las de Brouwer. Weyl es un constructivista que ve la grandeza de las matemáticas justamente en su capacidad de llegar a decidir, en la mayor parte de los teoremas, aquello que por su esencia es infinito con criterios finitos; pero este "carácter infinito" de los problemas matemáticos reposa en el hecho de que la matemática se funda sobre **la sucesión infinita de los números naturales y sobre los conceptos de existencia que a ella se refieren.**

Estudia en Gotinga donde se gradua en 1908, teniendo como maestro a Hilbert. En 1913 es nombrado profesor en la **Technische Hochschule** en Zürich, donde es colega de Einstein. En 1917 publica su libro **"Das Kontinuum"** (Una edición crítica de los fundamentos del análisis) en el que según sus propias palabras

"Con este ensayo no me propongo construir en el espíritu del formalismo y en torno a la "sólida roca" sobre la cual está fundado el edificio del Análisis, un bello andamiaje de madera que persuada a los lectores -y a mí mismo- de haber conseguido los verdaderos fundamentos; pero sostenemos aquí sin embargo, la opinión de que una parte esencial de ese edificio está construida sobre arena. Creo poder sustituir este terreno movedizo con apoyos fiables que, sin embargo, no servirán para todo lo que hoy se piensa como seguro en el Análisis y sacrificaremos el resto, al no ver otra solución"

Más adelante continúa diciendo:

"La crítica tan loada que el siglo XIX ejerció sobre los fundamentos del Análisis Clásico estaba justificada. Esto nadie lo puede negar y ha provocado un enorme progreso en el rigor del pensamiento. Pero lo que ha sido puesto en lugar del antiguo es, ***en lo que concierne a los principios últimos****, menos claro y más criticable que el antiguo mismo, aunque es indudable que la mayor parte de los resultados de la crítica moderna podrán servir como material de construcción de unos fundamentos definitivos del Análisis.*

Pero tal y como están hoy las cosas es preciso constatar que el gran problema planteado desde el descubrimiento del irracional por los Pitagóricos, esto es, el comprender matemáticamente según un contenido formulable en conocimiento "exacto", la ***continuidad*** *que se nos presenta en una intuición inmediata (en particular, en el tiempo que fluye o en el movimiento), como una totalidad de estados discretos, repito, es necesario constatar que este problema no está hoy más resuelto que en el pasado, a pesar de Dedekind, Cantor y Weierstrass"*

Weyl emprende entonces la honesta y heroica tarea de construir los números reales sin el uso del **axioma de reducibilidad** de B. Russell que legitimizaba el uso de nociones como "todos los números reales" o "todas las funciones continuas".

Para Weyl la comprensión correcta de lo que se llama continuidad no tiene nada que ver con una determinación cuantitativa exacta de la mayor riqueza en elementos que caracteriza un conjunto continuo, como por ejemplo el conjunto de números reales comprendido entre 0 y 1, en relación a uno de sus subconjuntos numerables. Numerable o no, un conjunto de números o de puntos está constituido por esencia de elementos discretos y la recta continua no tiene nada que ver con un conjunto de puntos, ni la continuidad con un problema de cardinalidad. (6)

En 1932, en una reedición hecha en Gotinga, Weyl insiste en que el problema del continuo no ha sido aun satisfactoriamente resuelto, si bien su "continuo" podría ser un paso intermedio entre las dos grandes corrientes que en los años veinte han trabajado el tema: la intuicionista de Brouwer y la formalista de Hilbert.

Según J. Bouveresse (7), una teoría matemática del continuo puede ser juzgada, al menos desde tres puntos de vista:

El de la coherencia interna, como construcción lógico-conceptual, el de la simplicidad y fecundidad en sus aplicaciones a la ciencia empírica y el de su veracidad propiamente dicha.

La concepción atomista del continuo de Weyl satisface la primera condición y parece, que satisface también a la segunda; pero Weyl tiene claro que su explicación no da la **verdadera** naturaleza del continuo. Su "conversión" a las ideas de Brouwer le hace conferir esperanzas en orden a que la impotencia de las teorías matemáticas para explicar la continuidad y el devenir no sea tan radical como inicialmente había estimado. La novedad revolucionaria, "Brouwer ist der revolution ..." consiste en el hecho de que Brouwer ha encontrado el medio de hacer intervenir, de alguna forma, el devenir, el elemento crucial que la concepción atomista está condenada por esencia a ignorar. Con la noción de "sucesión de libre elección" se obtiene *"un continuo en el cual se encuentran si duda los números reales individualmente considerados, pero que no se traduce de ninguna manera en un conjunto de números reales dados todos de una vez".*

En 1933 Weyl abandona la Alemania nazi y se instala en los EE.UU., donde será profesor del Institute for Advanced Study en Princeton hasta su retiro en 1955. Poco a poco va disminuyendo su entusiasmo por la búsqueda de los "verdaderos" fundamentos; o en todo caso, si alguna vez pensó haberlos alcanzado, comprobó entonces la naturaleza fría y yerma de la verdad. En 1949 en su libro "Philosophy of mathematics and natural science" dejó escrito lo siguiente:

> *"Con Brouwer las matemáticas consiguen la más alta claridad intuitiva. Con él se pueden desarrollar los orígenes del Análisis de una manera natural, siempre en contacto con la intuición y de manera mucho*

más estrecha que lo conseguido anteriormente. Pero no podemos negar que cuando se progresa hacia teorías más elevadas y generales, la no aplicabilidad de los principios simples de la lógica clásica, tienen como consecuencia una inoperatividad apenas soportable. Y es con dolor que el matemático ve la mayor parte de su torre, que él creía construida de piedras sólidas, disolverse en humo"

NOTAS

(1) En los primeros decenios del siglo XX hay toda una "literatura de la crisis" **"La decadencia de Occidente"** de **Spengler** (1918-1922); **"Cartas del Lago de Como. Reflexiones sobre la Técnica"** de **Romano Guardini** (1927); **"El lugar del hombre en el Cosmos"** de **Max Scheler** (1928); **"El espíritu europeo"** de **Leopold Ziegler"** (1929); **"El malestar de la Cultura"** de **Sigmund Freud** (1929); **"La situación espiritual de nuestro tiempo"** de **Karl Jaspers** (1931); **"La crisis de la civilización"** de **Johan Huizinga** (1935); **"La crisis de las ciencias europeas"** de **Husserl** (1936); **"Dialéctica del Iluminismo"** de **Max Horkheimer** (1944); **"Eclipse de la razón"** de **Adorno** (1947).

(2) En 1902 Poincaré publica el primero de sus libros sobre filosofía de la ciencia: **"La Science et l'Hipothèse"**, de gran impacto en el mundo científico de entonces. **Bertrand Russell** escribió un artículo en 1905 en la revista **"Mind"**, criticando la visión de Poincaré y éste le escribe una réplica en la misma revista en 1906, inaugurándose así una larga batalla entre logicistas e intuicionistas.

(3) El libro de **van Stigt**, **"Brouwer's intuitionism"** es un impresionante y exhaustivo estudio del intuicionismo brouweriano de 500 páginas, imprescindible para quien quiera profundizar en el tema.

(4) La frase de Brouwer en inglés es: "I don't care two pences for most people".

(5) **Ludwig Bieberbach** (1886-1982) elaboró una clasificación o tipología de las formas de hacer matemáticas. En el grupo J (con tres subclases J_1, J_2, J_3, a las cuales pertenecerían respectivamente, Klein, Gauss y Weierstrass) estarían los intuicionistas y a él pertenecerían en general los matemáticos de las razas nórdicas. En el grupo S estarían los formalistas y sería ésta la forma de hacer matemáticas de las razas del Este y Orientales. Como su pretensión era la de que ningún "gran matemático" alemán estuviese fuera del grupo J, dedica un capítulo especial para justificar el aparente "fallo" de la teoría en el caso del prusiano Hilbert.
Pero Bieberbach no ha hecho más que desarrollar una idea expuesta en 1893 por Félix Klein (1849-1925), a quien admiraba en gran manera. Decía Klein entonces:

"Parece que una poderosa e ingenua intuición espacial sea un atributo. de las razas teutónicas, mientras que el sentido crítico, puramente lógico, parece más desarrollado en las razas latinas y hebreas"

Poco podía imaginarse Félix Klein, que las policías de pureza racial nacional-socialistas hurgarían en su pasado, a pesar de que ya había muerto en 1925, a la búsqueda de antepasados judíos. Es de notar que también Poincaré en su libro **"La valeur de la science"** analiza las dos tipologías de analistas o formalistas y geómetras o intuicionistas, decantando sus simpatías por estos últimos.
Jacques Hadamard en 1949 en su libro **"Psicología de la invención en el campo matemático"** y a "toro pasado", afortunadamente bien para él, critica amargamente estas bastardas interpretaciones, fruto de la irracional pasión nacionalista.

(6) Para el laborioso desarrollo técnico de esta construcción, ver Weyl (1977).

(7) **J. Bouveresse**, autor de la comunicación **"Weyl, Wittgenstein, et le problème du Continu"**, presentada en 1990 en el Centro Cultural Internacional de Cerisy, en Francia, con motivo de un congreso internacional dedicado al problema del continuo y que forma parte del libro **"Le Labyrinthe du Continu"** (Colloque de Cerisy).