# LAS ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS Y NICOLÁS BOURBAKI

*Jesús Hernández*
Universidad Autónoma de Madrid

## *1.- INTRODUCCIÓN*

Hacia mediados de los años sesenta empezó a llegar a España, procedente de París –como tantas otras antes, como algunas más después– una moda cultural, el "estructuralismo". Entre sus productos más visibles había alguno típicamente parisino (M. Foucault, con *Las palabras y las cosas*) y algunos que lo eran menos (Levi-Strauss, con la *Antropología estructural*, la gramática transformacional de Chomsky,...). Esta moda duró lo que duró y de ella ha quedado lo que ha quedado, pero no es ese el objeto de estas líneas. Un librito de Piaget, citado más abajo, sirvió a muchos de guía en aquellos años.

En las manifestaciones de este estructuralismo se hacía amplio uso (y abuso) de la palabra "estructura" en múltiples sentidos, y no pocos sinsentidos, no siempre coincidentes. Entre las muchas tendencias comunes del pensamiento *estructural* estaba, de todos modos, la manifestada en el texto que sigue de Levi-Strauss.

> *"La estructura no pertenece al orden de la observación empírica, no revela una simple coherencia interna ... sólo puede llamarse estructura a una organización que cumple las dos condiciones siguientes: se trata de un sistema regido por una cohesión interna, y esa cohesión,*

*inaccesible a la observación de un sistema aislado, se revela en el estudio de las transformaciones gracias a las cuales encontramos propiedades semejantes en sistemas distintos en apariencia".*

Estas tendencias que trasladan la atención de los elementos considerados para fijarla en las **relaciones** entre ellos, relaciones que se estudian independientemente de la **naturaleza** de los elementos, ya habían aparecido antes en otros lugares del pensamiento y de la geografía. Por citar un solo ejemplo, Cassirer, en un texto de 1945 dice que

*" Los métodos y fines de la lingüística estructural son representativos de una tendencia general del pensamiento de la moderna investigación científica. El acento sobre estructura y sistema puede hallarse en biología, psicología y filosofía".*

Cassirer no menciona aquí la matemática –que, por cierto, conocía bien, y sobre la que ha escrito páginas muy inteligentes– pero hubiera podido hacerlo. Unos años antes del texto anterior había comenzado a publicarse en París una serie de *Elementos de matemática*, de autor Nicolas Bourbaki, en los que las estructuras tenían un papel básico. Como veremos después, estas estructuras habían ido surgiendo en la matemática a lo largo del siglo XIX, cristalizando en las formas hoy manejadas hacia 1930. Ciertamente, las matemáticas se prestaban especialmente bien a esta organización. Una de sus características fundamentales, la demostración, no había variado desde los griegos, al menos si hacemos caso a Bourbaki.

*"... a partir de los primeros textos detallados que conocemos (que datan de mediados del siglo V) el "canon" ideal de un texto matemático está perfectamente fijado, y encontrará su realización más perfecta en los grandes clásicos, Euclides, Arquímedes y Apolonio: la noción de demostración en estos autores no se diferencia en nada de la nuestra".*

El modelo de presentación –axiomática– de la matemática es, como se sabe, los *Elementos* de Euclides, uno de los libros más célebres y traducidos de la historia de la humanidad y empleado todavía como texto en épocas recientes. En el siglo XIX surgen las geometrías no euclídeas y en 1899 publica Hilbert sus *Fundamentos de la Geometría*, que será el modelo de la axiomática moderna. A lo largo del siglo XIX las matemáticas han ido ocupándose cada vez más de objetos que no son números y de los que no se tiene una interpretación sensible:

Boole dice que "no forma parte de la esencia de la matemática el ocuparse de las ideas de número y cantidad" y que la matemática trata "acerca de las operaciones consideradas en sí mismas, independientemente de los distintos objetos a los que pueden aplicarse" ; también Grassmann, que intenta desarrollar un cálculo en cierto modo heredero de Leibniz, y Riemann hacen contribuciones importantes en esa dirección.

Estas tendencias son las que, desarrolladas de la manera que intentaremos resumir en la sección siguiente, dan lugar a la forma de presentación y organización de la matemática de Bourbaki. Como dice un historiador, H. Wussing, autor de una buena historia de la idea de grupo

> *"No hay duda de que el término "estructura" ha pasado a ocupar en los últimos tiempos un lugar central en la matemática. Esto no se limita a su uso cada vez mayor en la literatura reciente, sino también, lo que es más importante, al reconocimiento del estudio de las estructuras como una herramienta fundamental para un desarrollo unificado de la matemática".*

Como dijimos, en la segunda sección se hace una breve descripción de la evolución de algunas estructuras (grupo, anillo, etc.) para en la tercera dar una idea del papel de tales estructuras en la obra de Bourbaki. En la cuarta se comenta la actitud de Piaget ante las estructuras bourbakistas.

## *2.- LAS ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS ANTES DE BOURBAKI*

En este apartado intentaremos dar, en forma muy resumida, una idea de la evolución de algunas de las estructuras matemáticas más importantes, limitándonos a las algebraicas más conocidas.

A) Grupos. Suele atribuirse en general a Galois la introducción de la noción de grupo en matemáticas en relación con el problema de la resolución mediante radicales de las ecuaciones algebraicas de grado superior a 5. Un poco antes, sin embargo, hacia 1800, Gauss da una de las primeras extensiones importantes de la noción de ley de composición u operación a objetos que no son números, y que hasta son muy distintos de ellos. En el estudio de las formas cuadráticas $ax^2+ bxy + cy^2$ con coeficientes enteros, importantes en teoría de números, Gauss, usando resultados previos de Lagrange, introduce una ley de grupo conmutativo (o abeliano, de Abel), da algunas demostraciones muy generales, reconoce la analogía con otra operación (la multiplicación de enteros módulo un número primo) y, finalmente, enuncia resultados que hacen pensar en lo que hoy llamamos teorema de estructura de los grupos abelianos de tipo finito. Además, el hecho de que Gauss use para su ley una notación aditiva (y no la multiplicativa, que parecería más indicada) muestra que era consciente de la generalidad de sus concepciones, algo que abonaría también el que, al parecer, tuviera muchos años antes que Hamilton las fórmulas para la multiplicación de los cuaterniones, aunque no llegó a publicarlas en vida.

Los grupos de permutaciones –es decir, los formados por las biyecciones de un conjunto finito– aparecieron en el curso de los numerosos trabajos realizados a finales del siglo XVIII y principios del XIX para intentar probar la imposibilidad de resolver con radicales las ecuaciones de grado mayor que 5. Entonces Galois, partiendo de lo hecho antes que él por Lagrange, Cauchy y otros, introduce un este caso algunas de las nociones más importantes de la teoría, como la de subgrupo invariante, y muestra haber entendido la noción de isomorfismo de grupos.

Los algebristas de la escuela inglesa tuvieron un papel importante en el progreso de estas ideas a lo largo del XIX. Cayley, en particular, parece estar ya en 1854 en posesión de la noción de grupo abstracto y señala que "un grupo está definido por la ley de composición de sus símbolos (elementos)" y no depende de la naturaleza de ellos. Los grupos orden infinito (es decir, con infinitos elementos) no son considerados hasta 1868 por Jordan, a quien se deben otros muchos resultados y nociones como las de grupo cociente, representación de grupos, etc. Los grupos infinitos pasaron casi inmediatamente a tener un papel fundamental en distintas ramas de la matemática, con los trabajos de Klein, Lie y Poincaré.

Dedekind se ocupó igualmente de estas cuestiones pero, según Dieudonné, no llegó a enunciar explícitamente que los números racionales son un grupo para la suma y los racionales no nulos un grupo para la multiplicación, tal vez por considerarlo demasiado trivial. Aparentemente, esto se dice por primera vez en el *Algebra* de Weber, en 1895. Parece que es también allí donde se dan por primera vez los axiomas de grupo tal y como los enunciamos hoy.

Pero los grupos aparecen también en una tercera vía importante en la matemática del siglo XIX : la de los grupos de transformaciones goemétricas. Y la cumbre de este camino es, desde nuestro punto de vista, el *Programa de Erlangen* (1872) de Félix Klein, en el que las distintas geometrías (incluída la topología, pero no la geometría afín, que Klein todavía desconocía en aquel momento) son caracterizadas en términos de los correspondientes grupos de transformaciones y en el que la subordinación de una geometría a otra -en el sentido de que, por ejemplo, la geometría proyectiva es más general que la euclídea- se formula usando el hecho de que el grupo más pequeño es un subgrupo del mayor. Con este lenguaje una "geometría" vendría a ser el conjunto de propiedades invariantes mediante las transformaciones del grupo correspondiente: de este modo es posible distinguir las propiedades proyectivas de las métricas, etc.

Los teoremas de las geoemetría clásica no son, desde este punto de vista, más que la expresión de las relaciones entre los invariantes de los grupos. Esto lleva en cierto modo al final de las disputas entre las geometrías sintética y analítica a lo largo del siglo XIX. Para Klein

> *"... El dominio de la intuición espacial no le está vedado al método analítico..."*
> *y*
> *"... no puede subestimarse el avance que supone un formalismo adecuado para los trabajos posteriores, en tanto que se adelanta, por así decirlo, al pensamiento."*

Además, la teoría de invariantes proporciona métodos generales capaces de obtener, al menos en principio, todos los covariantes algebraicos de los "grupos clásicos" de la geometría, lo que, según Bourbaki, supone el fin de la teoría clásica de invariantes y de la llamada "geometría elemental" como campo de investigación matemática

> *" Pero para el matemático profesional la mina está agotada, puesto que ya no hay problema de estructura, susceptibles de tener repercusiones sobre otras ramas de las matemáticas, y este capítulo de la teoría de los grupos y de los invariantes puede considerarse cerrado hasta nueva orden".*

B) Anillos.- La idea de un conjunto en el que habría dos operaciones con las propiedades de la suma y multiplicación de los números enteros (y de los reales) se extendió a lo largo del siglo XIX hasta llegar al descubrimiento por Hamilton de los cuaterniones (o cuaternios), hacia 1843, que mostraban la imposibilidad de extender los números complejos sin renunciar a alguna de las propiedades conocidas de las operaciones: en el caso de los cuaterniones la multiplicación dejaba de ser conmutativa. Otras extensiones llevaron a renunciar a otras propiedades, como la asociatividad, en el estudio de las "álbegras" o "sistemas hipercomplejos", pero no volveremos sobre ello.

El primer ejemplo no trivial de anillo fue el de los "enteros de Gauss" a+bi, con $i=\sqrt{-1}$, a y b racionales, que éste concibió hacia 1800 y publicó en 1831. Otros casos parecidos fueron estudiados más tarde y en 1871 Dedekind dio la definición de "orden" (que es lo que hoy llamaríamos subanillos de los complejos que contienen los enteros). A Dedekind se debe asimismo la noción de "módulo", en el sentido de submódulos de los complejos sobre los enteros, de ideal, y de lo que es muy importante, las operaciones con ellos como conjuntos dentro de la teoría de los números algebraicos. Más tarde, cuando Dedekind y Weber estudian la teoría de las curvas algebraicas, introducen la noción próxima de "módulo con operadores", y Kronecker hace algo semejante casi a la vez. En 1913 Fraenkel hace un primer intento de dar una noción general de anillo, pero no se llega a una teoría general de anillos, conmutativos o no, y de módulos sobre un anillo, hasta 1920, con E. Noether y Krull.

C) Cuerpos.- En los trabajos de Abel y Galois a principios del XIX surgen los subconjuntos de los complejos obtenidos mediante sumas, productos y cocientes reiterados, pero hasta 1870 con Dedekind no se consideran como conjuntos propiamente dichos estos cuerpos de números (subcuerpos de los complejos en nuestra terminología) y se empieza a calcular con ellos como entidades. Kronecker tuvo algunas ideas análogas en 1882, y comenzó a desarrollarlas dentro de un vasto programa que pretendía en términos un tanto vagos rehacer la matemática prescindiendo de todo lo que no fuese operaciones algebraicas con enteros. En 1893 Weber da una definición general de cuerpo y más tarde, tras la introducción por Hensel de los cuerpos p-ádicos, Steinitz da en 1910 los axiomas de la teoría de cuerpos conmutativos y muchos resultados importantes de la teoría.

La consideración de otras estructuras algebraicas (espacio vectorial, álgebra exterior, etc.) mostraría una evolución con rasgos análogos. La noción de espacio vectorial tal como la conocemos hoy no cuaja hasta los últimos años del siglo XIX con Peano y Dedekind a partir, básicamente, de las fuentes que son el álgebra lineal y las matrices en n dimensiones, desarrollados con uso de determinantes.

Durante el siglo XIX tiene lugar igualmente la sistematización rigurosa de las distintas clases de números que manejamos en matemáticas y que son también, claro están, los principales ejemplos y modelos de las estructuras consideradas. La historia, una vez más, es los suficientemente complicada y alejada del orden natural como para que solo podamos dar un resumen que deja de lado muchos aspectos importantes.

A principios del XIX los números reales eran algo ligado magnitudes geométricas, mientras que los complejos, usados en particular en la resolución de las ecuaciones algebraicas, todavía no habían encontrado su representación geométrica como puntos del plano, a través de Argand, Wessel y, sobre todo, Gauss, que facilitaría tanto su aceptación como números y el desarrollo de la toería de funciones de variable compleja. Señalemos que Cauchy, quién ya en 1814 hace aportaciones relevantes a esta última, todavía al final de su vida tenía dificultades con la definición de los complejos. Por otra parte, recordemos que Gauss dio hasta cuatro demostraciones distintas del llamado "teorema fundamental del álgebra" que afirma que un polinomio de grado n con coeficientes complejos posee exactamente n raíces reales o complejas (si se cuentan con su multiplicidad). Algo parecido sucedía con las resistencias que todavía encontraban los enteros negativos para ser aceptados.

Después de que Hamilton mostrara cómo tratar los números complejos a partir de los reales como pares de ellos con la suma y la multiplicación definidas convenientemente, varios autores –entre ellos Weierstrass– mostraron cómo obtener los números racionales y los enteros negativos a partir de clases de pares de números naturales, algo finalmente muy sencillo. El paso de mayor dificultad conceptual, que es la construcción de los números reales irracionales a partir de los racionales, fue llevado a cabo más o menos simultáneamente por varios autores (Dedekind, Cantor, Meray, Weierstrass) hacia 1871. El primero usó su famoso método de las cortaduras, emparentado con el de Eudoxo en los *Elementos de Euclides*, mientras que los otros usaron "sucesiones fundamentales" de números racionales que "aproximan" los irracionales.

Quedaban pues los enteros positivos, los llamados números naturales, "productos exclusivos de nuestra mente", según dijo Gauss en 1832 ; también se atribuye a Kronecker que "Dios creó los números naturales y el hombre todos los demás". Grassmann dió algunos primeros pasos definiendo la suma y multiplicación de enteros y sus propiedades usando únicamente la operación siguiente $x \rightarrow x + 1$ y el principio de inducción. En 1888 Dedekind presenta el sistema de axiomas para los naturales que hoy solemos llamar de Peano.

## *3.- BOURBAKI Y LAS ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS*

Nicolas Bourbaki es el pseudónimo bajo el que algunos de los mejores matemáticos franceses, entre los que hay que incluir a H. Cartan, J. Dieudonné, C. Chevalley y A. Weil, publicaron, a partir del final de los años treinta, una serie de libros, en los que con el título nada inocente de *Elementos de matemática* se pretende ofrecer una exposición sistemática de una parte importante de la matemática. Este programa fue desarrollándose desde entonces, produciendo una larga lista de libros y algunos escritos secundarios, entre ellos unas notas de historia de las matemáticas, así como un amplio anecdotario en cuyo detalle no vamos a entrar.

Comenzaremos por intentar precisar un poco la finalidad perseguida con estos *Elementos* y el papel de las estructuras en su cumplimiento.

Aunque se partió del proyecto de escribir un libro de texto de cálculo para el primer año de universidad que fuera más satisfactorio que los entonces disponibles, las cosas tomaron casi inmediatamente una dimensión mucho más amplia. Uno de los fines fundamentales perseguidos parece haber sido el de presentar una versión coherente y unificada de la matemática, mostrando cómo, bajo una aparente dispersión en diversas ramas que crecen alejadas entre sí y se desarrollan independientemente, la matemática puede ser organizada de acuerdo con criterios simples y bien articulados, aunque ello suponga la modificación, a veces muy considerable, de las clasificaciones anteriores: aritmética, geometría, análisis, álgebra, etc. Bourbaki se pregunta

> *"si las matemáticas no están en vías de convertirse en una torre de Babel de disciplinas autónomas, aisladas unas de otras, tanto en sus fines como en sus métodos y hasta en su lenguaje. En una plabra, hoy en día ¿hay una matemática o varias matemáticas ?".*

En efecto, las matemáticas se habían extendido extraordinariamente durante el periodo 1890-1930, coincidiendo por cierto con lo que suele llamarse "crisis de fundamentos", en buena parte debida a la aparición de las llamadas "paradojas" o contradicciones en la recién nacida teoría de conjuntos de Cantor, y a los intentos llevados a cabo de procurar poner remedio a tal situación : ahí surgen las grandes escuelas del estudio de los fundamentos a las matemáticas -logicismo, formalismo, intuicionismo- de las que no vamos a ocuparnos aquí. Sin querer ser exhaustivos puede citarse la teoría de la integral de Lebesgue, las ecuaciones integrales lineales, la teoría espectral para operadores lineales y los espacios de Hilbert, la teoría de representación de grupos, el álgebra no conmutativa, los grupos de Lie, la topología general, la topología algebraica, etc. A periodos de actividad como éste, en los que a veces el rigor es dejado un poco de lado en favor de avances que parecen obligados y de la introducción de nuevas ideas y técnicas de manera a veces un tanto desenvuelta, suelen seguir en la historia de las matemáticas otros en los que se dedica más atención a la organización sistemática, la precisión de las nociones y el cuidado en los encadenamientos de las demostraciones de los teoremas. Según Dieudonné.

> *"La concepción de Bourbaki era mucho más ambiciosa : empezando desde el principio, poner los cimientos para todas las teorías existentes en la matemática pura".*

Desde un punto de vista un poco más doméstico, Bourbaki pretende volver a la gran tradición universalista francesa de los siglos XVIII y XIX, cuyo último gran representante fue Henri Poincaré. De este modo se quería remediar el desconocimiento en Francia de las aportaciones de la gran escuela alemana de comienzos de siglo –E.Noether, H. Hasse, E.Artin, Krull y, sobre todo, Hilbert– que, según Dieudonné, tenía en común con Poincaré y E. Cartan.

> *"Intentar resolver problemas clásicos mediante métodos que hacían intervenir nuevos conceptos "abstractos", y que es, en mi opinión, la idea central de Bourbaki. Esto quiere decir que, por mi parte, Bourbaki está totalmente a favor de aplicar a los viejos problemas toda la potencia obtenida en el estudio axiomático de las estructuras pero, por otra, rechaza a las matemáticas que caen en las teorías abstractas sin ninguna razón para ello...".*

Esto nos lleva a la consideración de los medios empleados para conseguir el fin perseguido: evitar la dispersión de las matemáticas y procurar por el contrario su unificación de acuerdo con criterios explícitos simples. Llegados a este punto, Bourbaki rechaza el formalismo lógico sin más como elemento caracterizador de la matemática, y se remite al método axiomático, un viejo conocido desde los *Elementos* de Euclides y los *Fundamentos de la geometría* de Hilbert, muy admirado por los Bourbaki

> *"Lo que se propone como fin esencial la axiomática es precisamente lo que el formalismo lógico, por sí sólo, es incapaz de suministrar : la inteligibilidad profunda de las matemáticas... El método axiomático enseña a buscar las razones profundas de este descubrimiento, a encontrar las ideas comunes sepultadas bajo el aparato exterior de los detalles propios de cada una de las teorías consideradas, a discernir estas ideas y a llevarlas a la luz".*

Aquí entra en juego el papel de las estructuras como instrumento básico para la realización del programa anterior. Introduciendo un cierto paralelismo de la axiomática con el método experimental de las ciencias, aquella buscará aislar los elementos fundamentales de los razonamientos que intervienen en una teoría; después, tomándolos por separado, desarrollará de manera abstracta las consecuencias que de ellos se siguen y, finalmente, se vuelve a la teoría considerada combinando de nuevo los distintos elementos y estudiando los detalles de sus interacciones mutuas. Con palabras de Bourbaki

> *"Ahora podemos hacer comprender lo que, de una manera general, debe entenderse por una estructura matemática. El rasgo común de las*

*diversas nociones agrupadas bajo este nombre genérico es que se aplican a conjuntos de elementos cuya naturaleza no está especificada; para definir una estructura, se dan una o varias relaciones en las que intervienen estos elementos; se postula luego que la o las relaciones dadas satisfacen ciertas condiciones (que se enumeran) y que son los axiomas de la estructura considerada. Hacer la teoría axiomática de una estructura dada es deducir las consecuencias lógicas de los axiomas de la estructura, con exclusión de toda otra hipótesis acerca de los elementos considerados (en particular toda hipótesis sobre su "naturaleza" propia )".*

Bourbaki distingue tres tipos básicos de estructuras, que son las denominadas "estructuras madre" o "estructuras matrices". Estas pueden dar lugar a subestructuras inducidas o derivadas, y pueden también combinarse entre sí dando lugar a estructuras mixtas, que cumplen ciertas condiciones de *compatibilidad*. Estos tres grandes tipos son (véase el Apéndice para más detalles)

a) Estructuras algebraicas: son aquellas en las que intervienen una, o varias, leyes de composición u operaciones. Estas leyes tienen propiedades como la asociatividad, existencia de elemento neutro, existencia de elemento inverso, conmutatividad, etc. Son ejemplos de ellas la de grupo, anillo, cuerpo, espacio vectorial, etc. Pueden intervenir igualmente leyes de composición externas, como en el caso de los espacios vectoriales.

b) Estructuras de orden: Son las correspondientes a relaciones de orden definidas en un conjunto dado, es decir, aquellas relaciones que tienen las propiedades

i) reflexiva: xRx,
ii) antisimétrica: xRy, yRx implican x=y
iii) transitiva: xRy, yRz implican xRz

Ejemplos de estas relaciones son los órdenes habituales en los números naturales o los reales. Otro ejemplo importante es el de los subconjuntos de un conjunto dado con la relación de contenido: A R B si A está contenido en B.

A estas relaciones puede asociarse la estructura de retículo.

c) Estructuras topológicas: son aquellas relacionadas con nociones como límite, continuidad, o convergencia. Las más conocidas pueden definirse a partir de la noción de *distancia* en un conjunto cualquiera, que es posible generalizar considerablemente.

Dada una estructura, es posible en general trasladarla a un subconjunto del conjunto de partida, a un producto de conjuntos, etc. Esto da lugar a nuevas estructuras, que en el caso de los grupos, por ejemplo, darían lugar a las de subgrupo, grupo producto, grupo cociente, etc. Estas estructuras heredan en general, de un modo u otro, las propiedades de la estructura de la que se parte.

También es posible enriquecer una estructura añadiendo axiomas. Por ejemplo, si se impone que la operación de un grupo sea conmutativa, se obtiene la estructura de grupo conmutativo o abeliano. También podría añadirse la condición de que el grupo sea finito, es decir, que tenga un número finito de elementos.

Es posible igualmente considerar estructuras en las que se "mezclan" de manera conveniente dos de las anteriores (a las tres, como sucede en el caso de los números reales). Daremos aquí un solo ejemplo, el de grupo topológico, donde se exige en particular que la operación del grupo sea continua con respecto a la topología correspondiente.

Que haya estas tres clases de estructuras no es fruto de una elaboración filosófica *a priori* sino, más bien, de un examen de su campo de trabajo realizado por el matemático profesional. Examen que desde luego no es inocente ni está libre de prejuicios filosóficos ni, por supuesto, matemáticos. Bourbaki reconoce explícitamente la posibilidad -que, por cierto, no parece haberse actualizado- de que puedan surgir nuevas clases de estructuras fundamentales.

Una vez establecidas de la manera anterior, las estructuras permiten al matemático una considerable *economía de pensamiento*: son una herramienta de trabajo muy útil en la medida de que, si se comprueba que ciertos objetos verifican los axiomas de una estructura, entonces es posible aplicar inmediatamente todos los resultados conocidos disponibles para esa estructura, en lugar de tener que demostrarlos de nuevo en cada caso particular. Siguiendo con las comparaciones laborales, sería un sistema tayloriano para el trabajo matemático.

> *"Pero la comparación es defectuosa. El matemático no trabaja maquinalmente, como el obrero en la cadena. Nunca se insistirá demasiado en el papel fundamental que representa, en sus investigaciones, una intuición particular, que no es la intuición sensible vulgar, sino más bien una especie de adivinación directa (anterior a todo razonamiento) del comportamiento normal que parecer tener derecho a esperar por parte de entes matemáticos son los que ha tenido una frecuentación tan prolongada que se han convertido en entes casi tan familiares como los del mundo real. Pues cada estructura lleva en sí ese lenguaje propio, cargado de resonancias intuitivas particulares, provenientes de las teorías de donde las ha extraído el análisis axiomático descrito ante-*

*riormente; y para el investigador, que descubre bruscamente esta estructura en los fenómenos que estudia, es como una modulación súbita que orienta de golpe en una dirección inesperada la corriente intuitiva de su pensamiento y aclara bajo un nuevo aspecto el paisaje matemático en el cual se mueve".*

Y añade un poco más adelante

*"Es decir, menos que nunca la matemática se reduce actualmente a un juego puramente mecánico de fórmulas aisladas; más que nunca la intuición reina soberanamente en la génesis de los descubrimientos. Pero dispone hoy en día de la potente palanca que le ofrece la teoría de los grandes tipos de estructuras y domina simultáneamente inmensos campos unificados por la axiomática, terrenos en los que antaño parecía reinar el caos más informe".*

Esta manera de proceder ha recibido numerosas críticas, de algunas de los cuales nos haremos eco más abajo. Hay que decir que la primera puede hallarse en el mismo artículo programático de Bourbaki ("La arquitectura de las matemáticas") del que están tomadas las citas anteriores y algunas otras, donde se dice explícitamente que se trata sólo de una aproximación muy grosera a la realidad matemática y que es "esquemático, idealizado y estereotipado". Aparte de lo dicho antes sobre la posibilidad de aumentar el número de tipos de estructuras y la riqueza de sus articulaciones, se reconoce que algunas partes de las matemáticas, como la Teoría de números o la de los grupos finitos, no se dejan reducir fácilmente a los esquemas anteriores. Otras zonas excluidas a causa de su permanente "estado de ebullición" son algunas tan extensas como la Topología Algebraica, la Topología Diferencial o la teoría de los sistemas dinámicos. Para Bourbaki la matemática

*"Es como una gran ciudad, cuyos suburbios no cesan de progresar, de manera un poco caótica, sobre el terreno circundante, mientras que el centro se reconstruye periódicamente, siguiendo un plan cada vez más claro y una disposición cada vez más majestuosa, echando abajo los viejos barrios y sus laberintos de callejuelas para lanzar, hacia la periferia, avenidas cada vez más directas, más amplias y más cómodas".*

Un problema que no es esencial aquí, pero sobre el que de todos modos vale la pena decir algo, es el de la relación de estas estructuras con la realidad en la medida en que las matemáticas sirven de instrumento para las ciencias físicas. Bourbaki es un tanto elusivo sobre el asunto y se limita a decir que

*"En la concepción axiomática, la matemática aparece, en suma, como un depósito de formas abstractas, las estructuras matemáticas ; y resulta que ciertos aspectos de la realidad experimental vienen a moldearse, sin que se sepa muy bien por qué, en algunas de estas formas, como por una especie de adaptación previa. Es innegable, claro está, que la mayoría de estas formas tenía en su origen un contenido intuitivo bien determinado; pero es precisamente vaciándolas voluntariamente de este contenido como se les ha podido dar toda la eficacia que llevaban en potencia, y como se las ha hecho susceptibles de recibir interpretaciones nuevas y de cumplir plenamente su papel elaborador".*

Queda por último la cuestión de la actitud de Bourbaki ante los fundamentos de la matemática. Su tratado, en efecto, comienza con unos capítulos de teoría de conjuntos en los que, incluye, en particular, una formulación mucho más precisa y técnica de la noción de estructura. Estos capítulos procuran ofrecer los elementos necesarios para la construcción de los *Elementos* y son posiblemente los menos afortunados en muchos sentidos, además de ser los más áridos. Bourbaki intenta evitar todo tipo de compromiso filosófico, en particular con el problema de la no contradicción de la matemática: una vez que se ha llegado a una teoría axiomática de conjuntos aceptada por los matemáticos, se sigue adelante y, si surgieran contradicciones, se haría la poda que fuera necesaria. De lo que se trata, al fin y al cabo, es de que los matemáticos se entiendan entre sí. En cuanto al papel de la lógica, reproducimos un texto tomado de un artículo de 1949

*"Sin embargo, tenía que haber pruebas antes de que pudiera analizarse lógicamente una prueba, y el análisis, realizado por Aristóteles y después más profundamente por los lógicos modernos, debe haberse basado, como hoy, en un amplio acervo de escritos matemáticos. En otras palabras, en la medida en que a nosotros, matemáticos, nos afecta, la lógica no es ni más ni menos que la gramática del lenguaje que usamos, un lenguaje que tenía que existir antes de que pudiera elaborarse su gramática".*

## *4.- PIAGET Y LAS ESTRUCTURAS BOURBAKISTAS*

Jean Piaget es muy probablemente el científico no matemático que mayor atención ha dedicado a la presentación de las estructuras matemáticas hecha por los Bourbaki. Para él la matemática participa simultáneamente de una "claridad intrínseca" y de una "obscuridad epistemológica" que reclaman la adopción de una perspectiva genética para el tratamiento del problema. Esta dificultad epistemológica proviene del hecho de que las actividades ( matemáticas) más enraizadas y profundas son aquellas que ofrecen más dificultades para la toma de conciencia por el propio sujeto: de ahí que sea necesario

> *"... combinar el análisis lógico, siempre necesario para alcanzar los presupuestos más generales, con un análisis genético, que es el único apto para captar los modos de formación más elementales ; el problema es entonces coordinar epistemológicamente lo general de naturaleza lógica y lo elemental psicogenético".*

Para Piaget las matemáticas pueden considerarse, de modo análogo a su concepción de la lógica como axiomatización de las estructuras operatorias del sujeto, como un "sistema de construcciones que se apoyan igualmente en sus puntos de partida en las coordinaciones de las acciones y las operaciones del sujeto, y que procede mediante abstracciones reflexivas de niveles cada vez más elevados".

En este intento de poner en relación el nacimiento de las construcciones matemáticas con las estructuras matemáticas del sujeto van a tener un papel importante las estructuras bourbakistas. A estos efectos resulta de interés la "génesis" de las "estructuras madre", en el sentido de que éstas no sean el resultado de una axiomatización arbitraria, impuesta por decreto, sino más bien el resultado final de un proceso de disección o análisis regresivo de larga duración; de un cierto tipo de inducción, si se quiere, que ha depurado el resultado final.

> *"Es pues fundamental para el análisis epistemológico y genético, examinar el status de estas estructuras de base con vistas a establecer si tienen alguna relación con las actividades del sujeto o si, por el contrario, se presentan como una especie de arquetipos esencialmente trascendentales".*

Según Piaget, las tres estructuras madre presentan un máximo de generalidad y abstracción, lo que hace impensable creer que puedan aparecer en esa misma forma general y abstracta en las coordinaciones operatorias espontáneas del sujeto: "encontrarlas totalmente elaboradas sería una verificación casi milagrosa de la teoría platónica de la reminiscencia o de la teoría kantiana de los esquemas a priori, no confirmadas hasta ahora por ningún dato genético".

Si se quiere llevar a cabo un análisis regresivo de las estructuras elementales de la psicología

*"El problema es entonces establecer si hay relaciones entre lo más fundamental, formalmente hablando, y lo más elemental, hablando genéticamente. Si existen tales relaciones deberá haber tres clases de estructuras elementales, irreducibles entre sí y que aparecerán como casos particulares o "representaciones" de las estructuras algebraicas, de orden y topológicas".*

Parece que así es, y que el análisis de las primeras estructuras propiamente operatorias que se constituyen hacia los 7-8 años, que ofrecen ya formas relativamente equilibradas muestra

i) Estructuras relativas a objetos (y no relaciones) manipuladas mediante operaciones reversibles (grupos con elemento neutro);
ii) Estructuras relativas a relaciones invertibles en el sentido de la relación inversa;
iii) Operaciones en las que los elementos no son agrupados en función en de sus semejanzas, sino de su posición, y que habría que relacionar con intuiciones topológicas de nivel elemental.

Esto plantea el problema metodológico de saber en qué medida las estructuras que se atribuyen a las acciones y operaciones del sujeto están realmente en éste o son puestas por el propio psicólogo; según P. Gréco, citado por Piaget,

*"Nihil est in intellectu quod non prius fuerit in psychologo".*

De este modo el trabajo de Piaget y sus colaboradores vendría a dar una base genética a las estructuras bourbakistas y a sus formas de combinación y funcionamiento.

Dice Piaget que

*"Las matemáticas, una vez promovidas al estado de ciencia reflexiva y deductiva, no proceden de otro modo: estando en posesión de las estructruas madre en sus formas inicialmente más intuitivas e implícitas, y de los números "naturales" y de operaciones geométricas no menos naturales, han podido comenzar con la ciencia griega mediante una axiomatización de esos logros espontáneos infinitamente más rica de lo que se pensaría sin el análisis genético, y permitirse una nueva serie de abstracciones reflexivas en un nivel superior de formulación y no sólo de acción".*

En esta línea de abstracciones reflexivas que van subiendo escalones sucesivos en la vía de la abstracción hay que señalar que Piaget (y alguno de sus principales colaboradores, como S. Papert) se ha ocupado de la llamada "teoría de categorías", creada por los matemáticos Eilenberg y McLane hacia 1945, en la que manejan objetos formados por "clases" (conjuntos, grupos, espacios topológicos, etc.) junto con las correspondientes funciones o "morfismos" entre ellas (funciones, homomorfismos de grupos, funciones continuas, etc.) y en la que nociones como subestructura (subconjunto, subgrupo, etc.) estructura producto, estructura cociente, isomorfismo, etc., son presentadas en un plano superior de generalidad. Según Piaget, estas categorías no han sido construidas ya a partir de las estructuras madre, sino de los mismos procedimientos que han permitido aislarlas; es decir, que las nuevas estructuras no proceden de los "entes" obtenidos en las operaciones anteriores sino de las mismas operaciones consideradas como procesos de formación. S. Papert considera entonces que las categorías responden a las operaciones del matemático más que a las de la Matemática:

> *"Se trata de un nuevo ejemplo de esa abstracción reflexiva que extrae su substancia no de los objetos sino de las acciones ejercidas sobre ellos ( incluso cuando los objetos anteriores eran ya ellos mismos productos de dicha abstracción) y esos hechos son preciosos en cuanto a la naturaleza y al modo de construcción de las estructuras".*

Señalemos igualmente, aunque ello no tenga para nosotros un interés primordial, que la noción de grupo desempeña un papel muy importante en el trabajo de Piaget y sus colaboradores. En particular, es bien conocido el grupo de cuatro elementos que suele llamarse grupo INRC o "grupo de Piaget" y que le permite realizar la síntesis en un sistema único de las inversiones y las reciprocidades.

Pero la noción general de grupo es igualmente fundamental en el sentido de que es un principio de coherencia dotado de autorregulación y que incluye alguno de los principios básicos del racionalismo: el de no-contradicción, encarnado en la reversibilidad de las transformaciones; el de identidad, dado por el elemento neutro; y el correspondiente a la asociatividad, según el cual el resultado final resulta ser independiente del camino recorrido, lo que hace posible la coherencia del espacio y su construcción. Aquí Piaget establece la relación con el Programa de Erlangen de F. Klein considerado anteriormente, y a la pregunta de si la geometría elaborada espontáneamente por el niño sigue el orden "histórico" (es decir, de la geometría euclídea a la proyectiva, y de ésta a la topología) o el de construcción "teórica" (de la topología de las geometrías cada vez menos generales) contesta diciendo que está mucho más próxima a la segunda.

## *5.- BOURBAKI Y LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS MODERNAS*

En torno a 1957 varios de los países más avanzados del mundo occidental modificaron los programas para la enseñanza de las matemáticas en la primera y segunda enseñanza, y lo hicieron en un sentido que resultó mucho más llamativo y discutido de lo habitual en tales casos. (Hubo, de todos modos, diferencias importantes en cuanto a la fecha y a los contenidos). No solo se modificaron los temas incluidos en los programas sino también el modo de organización y presentación de muchos de los que se conservaban: muchos de estos cambios cristalizaron alrededor de los "conjuntos", sin duda la palabra clave, símbolo y resumen de la reforma. Se ha hablado mucho acerca de las razones que llevaron a hacer estos cambios, y entre ellas se ha mencionado la de que el éxito de los soviéticos al conseguir colocar en órbita el primer satélite hizo cundir el miedo a que los países de este lado del telón de acero quedaran atrasados si no introducían más y mejor ciencia en sus programas. Es difícil contestar de manera definitiva a preguntas como éstas, pero parece –a falta de una historia sistemática que cubra todos los aspectos del asunto– que no hay que excluir que esa fuera, al menos, una de las razones para un cambio que otras circunstancias, como el propio desarrollo de las matemáticas (del que ya hemos hablado antes) ya venía exigiendo: el Sputnik habría hecho, entonces, de catalizador de un proceso que ya estaba en marcha.

Tal proceso comenzó y alcanzó un desarrollo especialmente amplio en Francia, y también en algunos otros países como Canadá, Suiza, Bélgica, Holanda, etc., para extenderse a continuación a otros países europeos; incluído el nuestro, donde, como tantas otras veces, todo llegó con retraso y se impuso por decreto y sin preparación alguna. No hay que pensar, de todos modos, que no hubiera dificultades, y muchas, en los lugares antes citados. Se diría que la influencia fue mucho menor en los Estados Unidos, debido seguramente a las particularidades del sistema americano, y algo parecido sucedió, aunque por motivos diversos, en la Unión Soviética, país de muy buen nivel matemático. La introducción de estas "matemáticas modernas" dio lugar a muchas discusiones, protestas de padres y de profesores: por una vez, las matemáticas fueron objeto de atención por parte del gran público y de algunos medios de comunicación. Que ello fuera útil o no es cosa que no trataremos. El proceso, que duró entre quince y veinte años, según los sitios, fue detenido de modo bastante abrupto, suprimiéndose muchos de los cambios introducidos y eliminándose en particular casi por completo el lenguaje de los "conjuntos". El sentido y contenidos de este nuevo cambio escapan del tema de esta conferencia, por lo que no entraremos en ellos.

Como es sabido Francia tenía –empieza a ser necesario hablar en pasado, aquí y en otros asuntos– algunas tradiciones sólidamente asentadas, entre ellas la de una escuela pública (la de Jules Ferry) y unos liceos bien organizados y de buen nivel dentro de un sistema fuertemente centralizado; además, había (y hay) una tradición matemática importante, llena de nombres gloriosos, consolidada y muy presente dentro del sistema educativo. Las matemáticas, por otra parte, han tenido un papel muy decisivo en los exámenes de ingreso a centros universitarios de élite como la Escuela Politécnica o la Escuela Normal Superior. No es de extrañar, entonces, que fuera uno de los centros de la reforma. Más puede sorprender el papel de los otros países antes citados, con tradiciones matemáticas recientes menos importantes -aunque en absoluto desdeñables- y quizá haya que conceder mayor importancia al peso de la organización escolar propiamente dicha, y en especial a la influencia de algunos grupos pequeños situados en la vanguardia de las investigaciones didácticas. Desde nuestro punto de vista, es bien sabido que durante mucho tiempo Francia fue una de las referencias culturales básicas para España, en ocasiones la decisiva : aquí también, desde luego, hay que empezar a hablar en pasado. Y lo dicho es especialmente cierto en cuanto a los planes de estudio para los niveles primario y secundario, aun a pesar de las diferencias entre los correspondientes regímenes políticos.

Pasamos a continuación a intentar precisar un poco la relación de los Bourbaki y sus estructuras con los contenidos y las formas de exposición propias de las "matemáticas modernas" y que, con más o menos razón, han sido entendidas como una ruptura con la matemática tradicional, con "la de siempre". Hay muy pocas declaraciones explícitas de los miembros de Bourbaki, y las que hay (debidas sobre todo a Dieudonné) muestran una distancia considerable con respecto a los aspectos concretos de la reforma –cambios en los programas, métodos de enseñanza, formación de los profesores, papel de la psicología (sobre todo la de Piaget), etc. y de la relación que éstos puedan tener con sus escritos. Sí es posible, por el contrario, intentar extraer las consecuencias implícitas en textos de alcance mucho más general, aunque de todos modos dirigidos al profesorado: un buen ejemplo de ellos es el libro "Algebra lineal y geometría elemental", en especial su largo prólogo, del que hay traducción castellana. Por el momento nos limitaremos a ver cual es el papel que se adjudica a los Bourbaki en dos libros de autores estrechamente ligados a la reforma.

El primero se debe a J. Kuntzmann y era, cuando se publicó, uno de los pocos dedicados al estudio de la evolución de la enseñanza de la matemática. No se han publicado muchos después, y por ello, pese a sus deficiencias, sigue teniendo interés, al menos como fuente de información documental. Su descripción de la síntesis bourbakista no es muy feliz, no ya por cometer errores de bulto como decir que hay una única estructura madre –los conjuntos– y que todas las otras deben ser consideradas como intermedias, sino porque la exposición del papel de la estructuras es mucho más deficiente que cualquiera de las mencionadas en esta conferencia. Se alaba la capacidad de unificación cultural que proporciona la noción de conjunto, sobre todo para los estudiantes más dotados, así como su utilidad para formalizar situaciones que se presentan en el tratamiento de la informática

Más interesante es la información que da cuando analiza la evolución de la enseñanza de la matemática en Francia. Según su periodización, las "matemáticas modernas" aparecen en el intervalo 1957-1972, cuyas tres características principales son la toma de conciencia de la rapidez de la evolución, tanto en lo que se refiere al progreso técnico como al número de alumnos, la victoria de las "matemáticas modernas" y la abundancia de cambios de todo género. Las "matemáticas modernas" son presentadas como una especie de movimiento más o menos homogéneo surgido entre los profesores de unos cuantos países y del que la reunión de la O.C.D.E. de Royaumont en 1959 constituiría un punto de referencia. Este movimiento afirmaría

- que la finalidad de la enseñanza de la matemática es la presentación de la matemática
- que la matemática es la síntesis bourbakista.
- que esta enseñanza debe estar unificada desde la escuela maternal hasta la universidad.

Otra declaración de principios orientada en la misma dirección es la que sigue

> "... la concepción constructiva, axiomática y estructural de las matemáticas, fruto de la evolución de las ideas, se adapta "como un guante" a la formación de la juventud de nuestra época".

Este movimiento se presenta en Francia como una violenta reacción contra el estado de cosas anterior, con duros ataques contra los programas antes en vigor y elogios indiscriminados, y a menudo acríticos, hacia todas las innovaciones introducidas. Kuntzmann recoge igualmente una cierta cantidad de textos tomados de las circulares ministeriales destinadas a la implementación de la reforma : de ellos es posible entresacar citas insistiendo en la "potencia del razonamiento deductivo", ofrecer una enseñanza "orientada hacia la abstracción" y presentando la geometría como "una construcción matemática... en la que están en primer plano las estructuras algebraicas... y topológicas".

André Revuz, que fue uno de los defensores más inteligentes de la reforma, expone el punto de vista bourbakista de un modo mucho más satisfactorio, lo que hace que sus excesos sean precisamente por ello más significativos. Insiste en la unidad de la matemática y en su carácter dinámico, lo que permite adaptarse a situaciones nuevas y no previstas. La importancia de las estructuras es bien presentada, insistiendo en la importancia de la linealidad. Presenta a Bourbaki en su contexto, dentro de la evolución reciente de la ciencia matemática, y asegura que su aparente dogmatismo se ve atenuado por las modificaciones que se hacen en las sucesivas ediciones de sus libros, afirmación que no es fácil compartir. Le parece sencillamente impensable la vuelta a lo anterior y muestra grandes esperanzas en la evolución futura de la matemática, citando como ejemplo las posibilidades ofrecidas por la teoría de las categorías, algo muy de la época. Su postura ante Bourbaki es inequívoca

> *"Para los matemáticos de mi generación, la obra de Bourbaki es una respuesta a una necesidad más o menos expresada y sentida, y nuestro agradecimiento a aquellos que, con diez años más que nosotros fueron sus promotores, no terminará nunca; ellos nos abrieron las puertas de la tierra prometida".*

Otra presentación del pensamiento de Bourbaki, también claramente favorable, ha sido hecha por G. Choquet, matemático francés de primera fila muy interesado por la enseñanza, y autor en particular de trabajos sobre la de la geometría. Pone en relación la síntesis bourbakista con la de Descartes y muestra el papel del método axiomático y las estructuras en la organización de la matemática, incluyendo el Análisis :

> *"De este modo, el Análisis se presentaría como un mundo cuya complejidad nos recordaría de algún modo la de la vida, mientras que el Algebra sería por el contrario algo así como un mundo mineral, cuyas bellezas estarían constituídas por cristales de formas puras".*

Choquet examina el papel del método axiomático con las virtudes que le atribuyen los bourbakistas, pero previene también de sus peligros: si los sistemas axiomáticos son las máquinas-herramienta de la matemática, hay que vigilar que su rendimiento sea satisfactorio.

> *"Se plantea pues el problema urgente de saber cuales son los sistemas axiomáticos útiles. Seguramente no existe ningún criterio absoluto que nos permita decidir de un modo definitivo, pero si admitimos que "no hay que matar moscas a cañonazos" parecerá razonable admitir que una teoría general estará justificada solamente si sirve para revelar*

*relaciones inesperadas y fecundas entre teorías que hasta entonces habían estado totalmente alejadas, o si nos da la solución de algún problema que aún no estaba resuelto. Por otro lado, el que una teoría general se aplique a numerosos casos particulares no indica que sea útil, porque muy bien podría suceder que la luz que arroje sobre ellos sea demasiado escasa".*

Los sistemas axiomáticos deben pues pasar un examen y el criterio para hacerlo es que contribuyan a los grandes problemas de la matemática. También aquí se muestra Bourbaki discípulo fiel de Hilbert, quien no fue solamente maestro de la axiomática sino que usó también esas ideas para resolver algunos problemas muy importantes, pero también muy concretos de la matemática.

Otro gran matemático francés, René Thom, se muestra mucho menos entusiasta ante los Bourbaki, y sus discrepancias con Dieudonné han sido abundantes y notorias. Para él

*"La vieja esperanza de los bourbakistas de ver surgir las estructuras matemáticas de la jerarquía de los conjuntos, de sus subconjuntos y de su combinatoria, es sin duda una quimera".*

Thom ha criticado extensamente la reforma de las "matemáticas modernas" en muchos de sus aspectos, y sus críticas han tenido eco. Ha insistido mucho en el apoyo que han buscado los partidarios de la reforma en los Bourbaki: puesto que las estructuras y los conjuntos son la base de la matemática, y todo el resto se construye a partir de ellos, lo que hay que hacer es enseñar tales cosas a los niños tan pronto como sea posible y hacerlo de manera explícita:

*"Si conseguimos hacer explícitos y conscientes los mecanismos implícitos del pensamiento, estos mecanismos funcionarán más fácilmente".*

Thom no se muestra en absoluto de acuerdo con este modo de proceder, del que hace abundantes críticas tanto desde las mismas matemáticas como desde la psicología del niño. La comparación con el psicoanálisis, donde el paso de lo implícito a lo explícito desempeña también un papel importante, es otro de sus argumentos.

## 6.- CONCLUSIÓN

En lo anterior hemos expuesto muy resumidamente la evolución de la noción de estructura matemática, hecha desde el punto de vista de la formulación de los Bourbaki, que ha tenido una aceptación bastante amplia dentro de la vida académica contemporánea. En lo que sigue se hace un rápido balance de su influencia, sobre todo en lo que se refiere a la enseñanza de las "matemáticas modernas".

En cierto sentido, la principal influencia –ampliamente reconocida por los interesados– sobre Bourbaki, fue la de la gran escuela alemana del Göttingen de la época de Hilbert, cristalizado en un libro famoso y justamente afortunado, el *Álgebra moderna* escrito por el entonces jovencísimo B. L. van der Waerden (nacido en 1903, y muerto muy recientemente) en 1930 y que durante los cuarenta años siguientes fue el texto de referencia fundamental en la materia. Como se sabe –y el autor reconoce– debe mucho, muchísimo, a los grandes del momento, a E. Noether, E. Artin,... Este libro extiende la concepción general de Steinitz a todo el álgebra y, a la vez, cambia el punto de vista: nunca hasta entonces se había dado tan poca importancia a la resolución de las ecuaciones algebraicas.

El afán sistemático de Bourbaki cuidando extraordinariamente tanto la elección de la terminología y las notaciones –con notable éxito esto último, dicho sea de paso– como la generalidad de las pruebas, nunca omitidas, tiene ese origen.

Según Leo Corry, que ha estudiado a fondo el papel de las estructuras en Bourbaki:

*"La formulación abstracta de los conceptos algebraicos era una condición necesaria para la aparición del enfoque estructural representado por el Álgebra Moderna, pero si intentamos enumerar las diferencias entre ese libro y un texto como el de Weber encontraremos que hay mucho más. El enfoque estructural del álgebra de van der Waerden es reflejo de una imagen del álgebra : allí se establece tácitamente qué cuestiones son importantes en álgebra, cuales son las respuestas adecuadas a esas preguntas, cuales son los métodos adecuados para obtenerlas. Esta imagen del conocimiento fue pronto la aceptada por los algebristas, aun cuando no se hubiera articulado ni sugerido ningún concepto formal de estructura algebraica en el libro de van der Waerden o en otro lugar previamente. La búsqueda de este concepto formal fue una consecuencia a posteriori del surgimiento de la concepción originada por la imagen informal, y Bourbaki fue uno de los participantes en esa búsqueda".*

Corry ha hecho igualmente una crítica muy detallada de la presentación técnica, presuntamente rigurosa, de la noción de estructura en el capítulo correspondiente de los *Elementos* de Bourbaki, crítica que desbordaría los límites de estas páginas.

Otras críticas vinieron de Hans Freudentahl, otro gran matemático muy interesado por la enseñanza:

> *"El ejemplo más espectacular de organización de las matemáticas es, desde luego, Bourbaki. ¡Qué convincente es su organización ¡ Tan convincente que Piaget pudo volver a descubrir el sistema de Bourbaki en psicología evolutiva... Piaget no es matemático, de manera que no podía saber cuán poco hay que fiarse de quienes construyen sistemas matemáticos".*

Una primera conclusión es que en lo que se refiere a la evolución, tanto psicológica como matemática, los trabajos de Piaget y sus colaboradores parecen apoyar la frase de Hadamard citada por Bourbaki : "Las ideas sencillas son las últimas en llegar". La descripción de las dificultades halladas en ambos recorridos es algo que todavía no ha terminado de ser estudiado con la profundidad que merece.

Otra es que las críticas de Thom, Corry, Freudentahl y otros pueden ayudar a relativizar las estructuras y su papel en el trabajo cotidiano del matemático. Este lenguaje es un instrumento muy útil en la exposición y, en general, en la comunicación. El compositor Arnold Schoenberg, a quien Cocteau acusaba de ser un "músico de encerado" por su sistema dodecafónico, decía que " no he descrito mi forma de trabajar como un "sistema", sino más bien como un "método", como una herramienta de compositor y no como una simple teoría" y que "cuando compongo procuro olvidar todas mis teorías y no empiezo a escribir hasta que me he liberado de ellas".

## *REFERENCIAS*

1. N. Bourbaki. Elementos de historia de las matemáticas. Madrid, Alianza, 1976
2. L. Corry. Modern algebra and the rise of mathematical structures. Basilea, Birkhaüser, ,1996.
3. F. le Lionnais. Las grandes corrientes del pensamiento matemático. Buenos Aires, Eudeba, 1962. Véase los artículos de Bourbaki y Dieudonné
4. J. Piaget y otros. La enseñanza de las matemáticas. Madrid, Aguilar, 1968
5. J. Piaget y otros. La enseñanza de las matemáticas modernas. Madrid, Alianza, 1978. Véase los artículos de Dieudonné, Choquet, Thom y Piaget sobre todo.
6. J. Kuntmann. Evolution et étude critique des enseignements de mathématique. París. CEDIC, 1976
7. A. Revuz. Mathématique moderne, mathématique vivante. París O.C.D.L., 1970

## *BIBLIOGRAFIA*


**BERGSON, H.** (1981) Memoria y Vida. Alianza Editorial

**BENACERRAF, P.** (1993) Philosophy of Mathematics. Cambridge U.Press

**BROUWER, L. J.** (1983) Lezioni sull'intuizionismo. Boringhieri

**BROUWER, L. J.** (1975) On the Foundations of Mathematics. North-Holland Publishing Company

**BLACK, M.** (1965) The Nature of Mathematics. Littlefield

**CAÑON, C.** (1993) La Matemática: Creación y Descubrimiento. Univ. Pontificia de Comillas

**HADAMARD, J.** (1945) The Psicology of Invention in the Mathematical Field. Princeton University Press

**KORNER, S.** (1986) The Philosophy of Mathematics. Dover

**KUIK, W.** (1977) Il discreto e il continuo. Boringhieri

**POINCARE, H.** (1970) La valeur de la science. Flammarion

**POINCARE, H.** (1968) La Science et l'Hypothèse. Flammarion

**SALANSKIS, J.** (Ed.) (1992) Le labyrinthe du continu. Springer V.

**STIGT, W. van** (1990) Brouwer's intuitionism. North-Holland

**WEYL, H.** (1932) The open world. Yale University Press

**WEYL, H.** (1977) Il continuo. Bibliopolis

**WEYL, H.** (1949) Philosophy of mathematics and natural science. Princeton University Press