PREHISTORIA DE LA GEOGRAFÍA MATEMÁTICA

Árapád Szabó
Instituto de Matemáticas de la Academia de Ciencias de Hungría

Es creencia general que la Geografía matemática antigua a su más alto nivel fue un producto de la Ciencia helenística. A menudo se atribuye su fundación a **Eratóstenes** de Cirene, un contemporáneo y amigo de **Arquímedes** que era director de la Escuela de Alejandría a finales del siglo III a.C. Éste alcanzó fama en Matemáticas, Astronomía, Geografía, Música, Filosofía y Literatura, y recibió por ello el sobrenombre de *Péntazlos* (el de los 5 trofeos); y también el de *Beta*, porque no fue primero en ninguno. De él se ha escrito que *su contribución más importante fue la aplicación de la Matemática a la Geografía; que aunque tiempo atrás los geógrafos griegos habían dividido el mundo en zonas, su mapa del mundo fue el primero basado en un sistema de meridianos de longitud y paralelos de latitud. También consiguió determinar con notable aproximación las dimensiones de la Tierra, basándose en observaciones hechas en Siena (próxima a la actual Assuán) y en Alejandría...* etc.[1]. Pero aunque a juzgar por estas afirmaciones, que expresan una opinión casi común de los historiadores, habría que atribuir a **Eratóstenes** la invención del sistema de meridianos de longitud y paralelos de latitud, los datos que vamos a exponer y explicar demuestran que tal atribución es en todo caso errónea; que el mismo sis-

[1] G.E.R. Lloyd: Greek Science after Aristotle (London, 1973), 49.

tema de meridianos y paralelos existía mucho antes de **Eratóstenes**, ya en el siglo IV (si es que no incluso el V) a.C. Pero antes de nada vamos a considerar cómo se determinaba en la antigüedad un *paralelo de latitud.*

Un pasaje importante en la obra del arquitecto romano **Vitrubio** nos enseña cómo se construye un reloj de sol[2]. Para ello, según su explicación, es indispensable conocer previamente *la longitud de la sombra que haga el gnomón al mediodía del Equinoccio en el lugar donde vaya a usarse el reloj en cuestión.* Esto significa que tal longitud en ese momento preciso varía de un lugar a otro. **Vitrubio** ilustra su afirmación con algunas relaciones numéricas. Por ejemplo, un gnomón que mida **9** unidades tendrá en Roma al mediodía del Equinoccio una sombra de **8**; así que la relación gnomón / sombra equinoccial meridiana será en Roma de **9/8**. Y registra igualmente las relaciones correspondientes a otros lugares: **4/3** en Atenas, **11/9** en Tarento, **7/5** en Rodas y **5/3** en Alejandría.

Es de notar que **Vitrubio** no dice nada más sobre el uso de estas relaciones. Se podría pensar por tanto, si no tuviéramos sino su texto, que únicamente se usaban para la construcción de relojes de sol en esos lugares. Por suerte la aclaración se halla en el primer libro de **Hiparco** (ca. 160-120 a.C.), su *Comentario a los 'Fenómenos' de **Arato y Eudoxo***: la relación gnomón / sombra equinoccial meridiana se usó para determinar el paralelo de latitud del lugar en que se medía la relación en cuestión. Tal como explica el autor con un ejemplo[3], la latitud geográfica de Grecia, es decir la distancia en grados de aquella región al Ecuador, o bien la altura del Polo en aquel lugar, es de unos **37°** siendo allí de **4/3** la relación en cuestión. La afirmación es casi exacta incluso según las medidas actuales, pues de hecho Atenas ronda los 38° de latitud (y digamos inmediatamente, siquiera entre paréntesis, que aunque el dato convenga más o menos a Atenas, **Hiparco** sólo habla de *regiones de Grecia*; y que según él mismo subraya, el de esos **37°** es sólo un cálculo aproximado).

Hiparco, es verdad, no nos proporciona cálculo alguno, ni nos muestra cómo se obtiene el paralelo **37** a partir de la relación **4/3**, y si no tuviéramos un capítulo específico de **Tolomeo**[4] no podríamos sino intentar verificarlo con alguna reconstrucción moderna. Pero no hay duda de que los mismos cálculos sobre latitud geográfica que se hallan en **Tolomeo** ya eran conocidos en época helenística.

---

[2]Vitruvius: De Architectura, Ed. J. Soubiran (París, 1969), IX 1; cf. IX 7, 1,11.

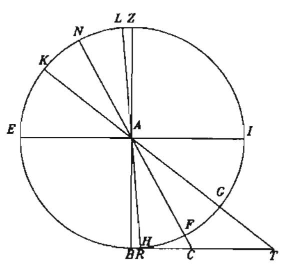
[3]Hipparchus: In Arati et Eudoxi Phaenomena Commentarius, Ed. C. Manitius (Leipzig, 1894), 26-27.

[4] Ptolemaeus: Syntaxis Mathematica, Ed. J. L. Heiberg (Leipzig, 1898), II.5.

Bueno será que demos en este punto una breve explicación de cómo se usaba el gnomón en la ciencia antigua. Si colocamos en cualquier punto del plano horizontal un bastón vertical y observamos su sombra de la mañana a la tarde, constataremos que desde la salida hasta la puesta del Sol varía sin cesar; primero se acorta gradualmente; y luego, después de un cierto tiempo, comienza a alargarse de nuevo. Un bastón vertical sobre el plano horizontal es la forma más antigua de reloj de sol: el llamado por los griegos *gnomón*. Ahora nos interesa el momento de la sombra más pequeña del día: en este momento es mediodía, es decir que el Sol ha alcanzado el punto más alto en su aparente camino diario, el punto de su culminación. Y en todo el hemisferio Norte, por otra parte, la sombra mínima del día indica la dirección Sur-Norte.

Será fácil percatarse además de que, aunque en cada lugar la dirección de la sombra meridiana es siempre la misma, no ocurre igual con su longitud: en verano la sombra del mismo bastón es más corta, y en invierno más larga; para nosotros, en efecto, el Sol culmina más alto en verano y más bajo en invierno.

Por tanto la misma sombra meridiana será un día del año *la más larga* y otro día *la más corta*. La **figura 1.ª** muestra esquemáticamente las sombras meridianas más corta (**BR**) y más larga (**BT**) del bastón (**BA**) puesto verticalmente. La *sombra meridiana más corta* caracteriza el día *más largo del año*, el *Solsticio de Verano*; e inversamente la *sombra más larga*, la del *Solsticio de Invierno*, es la del *día más corto*. Observando estas sombras se averiguaron los días más largo y más corto del año. Ha de transcurrir precisamente medio año para llegar de la sombra más corta a la más larga; y viceversa, para que la sombra más larga se reduzca a la más corta. En este punto es interesante recordar que fue precisamente **Tales**, el primer científico griego, en el siglo VI a.C. quien hizo la más antigua observación que resulta pertinente para nuestro argumento: se percató de que del Solsticio estival al invernal pasan más días que viceversa, del invernal al estival[5]. Esta diferente longitud de las dos mitades del año se debe, como es sabido, a la 2.ª ley de **Kepler**: nuestro planeta aumenta su velocidad al acercarse al Sol, y por eso una mitad del año es más breve que la otra.



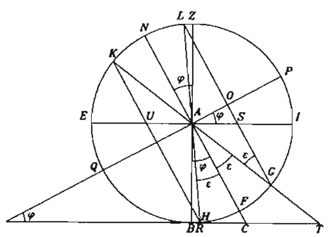
Pero incluso conociendo que **BR** era la sombra meridiana del día estival más largo y **BT** la del invernal más corto, no era fácil determinar la longitud de la sombra meridiana equinoccial. Los griegos llegaron a la solución de este problema haciéndose la siguiente reflexión:

[5] Cf. M. R. Cohen - I.E. Rabkin: A Source Book in Greek Science (Cambrigge Mass., 1958), 92 n .2.

La sombra meridiana (**BR**) es la más corta cuando el Sol en la bóveda celeste parece culminar en un punto de la prolongación del segmento **RA**, digamos en el punto **L**. Inversamente, la misma sombra será la más larga (**BT**), cuando el Sol culmine en el punto **K** de la bóveda celeste: no hace falta gran imaginación para representarse el arco de circunferencia entre los dos puntos de culminación **L** y **K**; y si trazamos un círculo con el bastón como radio y su extremo **A** como centro, obtendremos la imagen especular (**HG**) del arco (**LK**) tomado sobre el cielo; y si luego dividimos en dos por el punto **F** la imagen terrestre del arco celeste, no queda sino unir el punto **F** con el extremo **A** del bastón, y la prolongación de este segmento de recta nos dará el punto terminal **C** de la sombra meridiana equinoccial.

Fue **Anaximandro**, en el siglo VI a.C. según la tradición, el primer griego que logró medir la sombra meridiana equinoccial, determinando así con exactitud la fecha del Equinoccio. De hecho la igualdad del día y la noche no se puede averiguar empíricamente a base de observaciones como la del día más largo o el más corto: el Equinoccio no puede sino calcularse. Y según mi reconstrucción, **Anaximandro** logró calcularlo mediante *la bisección del arco entre los Solsticios.*

Tal como se desprende de la descripción de **Vitrubio**, la operación que hemos llevado a cabo con nuestro bastón nos da al mismo tiempo un modelo astronómico del Universo. Ahora querría exponer ante todo los principales elementos de este modelo astronómico.



El círculo que hemos trazado con el bastón como radio y su extremo como centro es el círculo meridiano. Supongamos, en efecto, que estamos en el punto **B** de la figura **2.ª**, y desde allí observamos los fenómenos celestes: es como si a mediodía el Sol culminara siempre en el cuadrante superior izquierdo del círculo así trazado (mientras que el cuadrante inferior derecho sería su imagen especular). En la descripción de **Vitrubio** el círculo meridiano es, a la vez, la imagen bidimensional de toda la esfera celeste.

La recta indicada con las letras **BRCT** indica la dirección Sur-Norte, sobre la cual cae siempre la sombra meridiana del bastón. A su paralela, indicada con las letras **EAI**, que pasa por el centro del círculo meridiano, le da **Vitrubio** el nombre de *horizonte (o sea limitador).* Esta recta hace las veces de diámetro para el círculo del horizonte que en la bóveda celeste separa el hemisferio superior y visible del que queda inferior y oculto por la Tierra. Según este modelo simbólico del Universo, la Tierra misma no es sino el extremo superior del bastón, el punto **A**, una esfera minúscula en el centro de la inmensa esfera del Cielo.

La recta indicada con las letras **NAF** es el rayo del Sol de mediodía que da la sombra equinoccial sobre la recta **BRCT**, con su punto terminal **C**. Y además es el diámetro, no sólo del círculo meridiano visible sobre la figura, sino también de un círculo aún más interesante. Porque en efecto, en el momento del Equinoccio, el Sol como cuerpo celeste parece moverse en una órbita circular cuyo diámetro es precisamente la recta **NAF**. Así que **NAF** es ante todo el diámetro del *Ecuador celeste*, del que el terrestre es mera proyección: el *Ecuador* celeste es la órbita aparente del Sol en el momento del Equinoccio; y a su vez en el Ecuador terrestre, colocado bajo aquél, son siempre de igual duración los días y las noches[6].

En nuestra **figura 2.ª** pueden verse además dos segmentos paralelos al diámetro del Ecuador, uno a la derecha un poco por encima (**LG**), y el otro a la izquierda bajo dicho diámetro (**KH**). El texto de **Vitrubio** llama también *diámetros* a estos dos segmentos. Si consideramos nuestra figura como imagen simbólica del Universo, construida a partir de las sombras meridianas, esto significa que el Sol como cuerpo celeste parece describir en el momento de los Solsticios unas trayectorias que tienen por diámetros respectivamente las rectas **KH** y **LG**. En otras palabras, que incluso estos dos *diámetros* representan simbólicamente los círculos a que pertenecen: **LG** representa el *trópico de verano*, y **KH** es el diámetro del círculo *trópico de invierno*.

De su nombre griego *kykloi tropikói* deriva nuestra palabra *trópico*. Sólo que nosotros cuando hablamos de trópicos ya no solemos pensar en aquellos círculos que la observación inmediata proyecta sobre la bóveda celeste como órbitas del Sol en los meses de Junio y Diciembre, sino más bien en su proyección terrestre. Uno es el *trópico de Cáncer*, en el hemisferio septentrional, a la distancia de unos **24º** del Ecuador, y otro el *trópico de Capricornio*, en el hemisferio Sur, a igual distancia del Ecuador; y entre estos dos círculos paralelos se extiende la *zona tórrida*.

Según nuestra figura los arcos **LN** y **NK** respectivamente, o bien sus imágenes especulares **FH** y **FG**, corresponden cada uno a un *lado* del *pentadecágono* regular inscrito en el círculo, es decir a **24º**, de modo que la distancia entre ambos círculos sería de **48º**. Estas medidas son por supuesto aproximadas, y en todo caso fueron perfeccionadas ya en el siglo III a.C. por **Eratóstenes**, y más aún por **Hiparco** 100 años después. Pero vale la pena prestar atención a este dato, ya que esta medida angular (**24º**) es igualmente la del ángulo comprendido entre el eje de la Tierra y el de la *Eclíptica*, que en la literatura científica antigua se llamaba precisamente *Oblicuidad*.

---

[6] Á. Szabó - E. Maula: Enklima (Athen 1982).

Prestemos atención ahora a la siguiente pregunta: ¿Será verdad que no tenemos testimonios decisivos para decidir si **Enópides** de Quíos, el astrónomo del siglo V a.C., al hablar de la medida de la Eclíptica y determinar así como arcos las distancias de los trópicos al Ecuador, pensaba tan solo en los círculos trópicos de la bóveda celeste, o pensaba también en sus proyecciones terrestres? Dado que la expresión *zonas terrestres* ya se encuentra en el filósofo **Parménides**, anterior a **Enópides**, me parece plausible conjeturar que **Enópides** hizo la proyección de los círculos celestes sobre la Tierra; y que así, al determinar la distancia al Ecuador de los dos primeros paralelos de que hay noticia histórica, que son por tanto dos paralelos de longitud, fue también uno de los precursores de la Geografía matemática.

Y aún querría subrayar otro hecho: que **Enópides** expresó la medida del *arco* en cuestión como el *lado* de un *pentadecágono* regular inscrito en el mismo círculo[7]. Así pues, según este modo de pensar, el *lado* de un polígono considerado como *cuerda* pertenece a un *arco*. Esa conexión entre cuerda y arco nos recuerda la celebérrima tabla de *cuerdas* y *arcos*, la trigonometría de los griegos en **Tolomeo**.

Pero volvamos ahora a nuestro modelo astronómico de la **figura 2.ª**: consideremos el triángulo cuyos catetos son el bastón vertical (**AB**) y su sombra equinoccial (**BC**) en el plano horizontal; y su hipotenusa el rayo de Sol (**AC**) que proyecta la sombra al mediodía. En este triángulo reviste especial importancia el ángulo en el vértice A, que se puede medir con el arco de circunferencia **BF**. Este arco es, como se ve inmediatamente por la figura, *la distancia sobre un meridiano del Ecuador NF al punto B*. En nuestra moderna terminología este concepto toma el nombre de *latitud geográfica del punto B*, que solemos expresar en grados. Su nombre antiguo era la palabra griega *klima*, que hoy día usamos con un sentido algo cambiado: en la ciencia griega esta palabra técnica indicaba originalmente la *inclinación del cielo*. Con ayuda de la **figura 2.ª** podemos comprender también cuál era esta inclinación del cielo.

Si plantamos el gnomón en el punto **B** para medir su sombra, observamos la bóveda celeste sobre este punto **B**. Pero cuando trazamos el diámetro del círculo del horizonte (la recta **EAI**) no sólo dividimos la esfera celeste en un hemisferio superior *visible* y otro inferior *invisible*, sino que además el punto de partida de nuestra observación se traslada simbólicamente del punto **B** al **A**. El punto más alto sobre nuestra cabeza es el *Zenit* (**Z**). La distancia del Zenit al Ecuador, o más precisamente del punto **N** al diámetro del Ecuador, indicada con el arco **ZN** es la *inclinación del cielo*, el *clima*. Y como no podemos medir este

[7] *Ibidem*:120 s.

arco en la bóveda celeste, mediremos su imagen especular, el **BF** de la figura (evidentemente igual, al ser opuesto por el vértice).

No se olvide sin embargo el peculiar razonamiento que subyace en el término técnico griego: cuando los antiguos hablaban de *klima* medían la *inclinación del cielo* que es una pura apariencia. Pero aunque aparente, esta inclinación del cielo nos señala la real curvatura de la Tierra a lo largo de un meridiano, desde el Ecuador al punto en que hemos plantado el bastón cuya sombra medimos. Cierto que nuestra visión ya no es geocéntrica, pero respecto a las enormes distancias del Universo, la diferencia entre geocentrismo y heliocentrismo resulta insignificante. Las medidas de la longitud y latitud en la Geografía matemática reposan incluso hoy día en la misma ficción que fue el postulado de la Astronomía griega: la Tierra como esfera inmóvil en el centro del Universo: un punto imaginado como inmóvil al que seguimos refiriendo todo el movimiento.

Aquí debo llamar la atención sobre otro interesante concepto: La recta **PQ** de la **figura 2.ª** es perpendicular en el punto A al diámetro del Ecuador, **NAF**. Esta recta es el eje imaginario de la Tierra, y por tanto del Universo entero. Da la impresión de que toda la bóveda celeste da una vuelta completa en torno a este eje en las 24 horas del día y la noche. El extremo superior del eje, el punto **P**, indica la dirección del Polo Norte. Pero miremos ahora el ángulo que este eje forma con al línea del horizonte, el ángulo indicado con la letra griega ϕ. Observando con atención se notará que los lados del arco **BF** por una parte, y del ángulo ϕ por otra, son perpendiculares entre sí, con lo que ambos ángulos son iguales. Del arco **BF** sabemos ya que es el *clima*, la latitud geográfica, o bien la distancia en grados del punto **B** al Ecuador. Y a su vez el ángulo ϕ es la *altura del polo Norte* sobre el horizonte; es decir, sobre el horizonte aparente del punto **B**. Así que estos dos conceptos, designados con los tres nombres de *clima, latitud geográfica* (*o distancia al Ecuador*) *y altura polar*, tienen siempre por medida el mismo valor numérico.

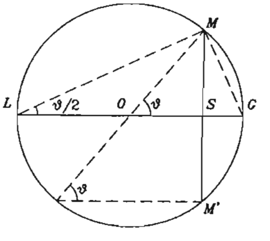
Vale la pena distinguir los conceptos de *distancia al Ecuador y altura polar* en un lugar dado, que se miden con los mismos grados de ángulo. La ciencia antigua elaboró *tres* procedimientos diferentes para calcular la latitud geográfica. Y aunque el 3º de éllos no siguió usándose en la ciencia antigua, tenemos indicios de su existencia desde la época arcaica tardía. Y los otros dos, usados ya antes de **Tolomeo**, aseguraban el control de sus resultados.

El 1^er^ método de los dos que se usaban en la ciencia helenística consistía en medir en cualquier punto la relación entre el *gnomón* vertical plantado en el plano horizontal y su sombra meridiana equinoccial. En Roma, por ejemplo, según hemos adelantado, esta relación era de **9/8**; lo cual significa que en esta localidad un bastón de **9** unidades de longitud tiene en el Equinoccio una sombra meridiana de sólo **8**. Con estos dos datos se calculaba la distancia en grados de aquella localidad al Ecuador, es decir, el arco **BF** de la **figura 2.ª**.

El 2.º método consistía en averiguar la duración del día más largo del año en horas (y fracción de hora) para la localidad en cuestión, y con este dato calcular la altura polar, el ángulo ϕ de la **figura 2.ª**, igualmente en grados. Siempre que fueran exactas las medidas y correctos los cálculos, ambos métodos debían dar en cada sitio iguales resultados. Y estos son los métodos que hallamos efectivamente en nuestras fuentes helenísticas.

Sin embargo a mi entender es más interesante aquel 3er método *arcaico* y caído ya en desuso en la época helenística. Sabemos que **Eudoxo** (en la primera mitad del siglo IV a. C.) quiso determinar la latitud geográfica de Grecia del siguiente modo: dividió la trayectoria aparente del Sol en el Solsticio de verano en **8** partes, y afirmó que **5** de ellas quedan sobre el horizonte y **3** debajo[8]. Tal relación de **5/3** entre el día y la noche es característica en efecto de una determinada latitud geográfica (y precisamente a partir de este método se desarrolló el procedimiento para determinar la altura polar de un lugar dado conociendo la duración del día más largo del año); pero se impone la pregunta de cómo consiguió **Eudoxo** dividir en esa proporción la órbita del Sol en el Solsticio de verano.

A mi parecer se basó en el esquema de nuestra **figura 2.ª**. Tal como puede verse, el diámetro **EAI** del horizonte corta en el punto **S** el diámetro **LG** del círculo del Solsticio estival (es decir, la órbita del Sol en este día). Esta división nos permite determinar también los arcos diurno y nocturno del Sol en esta época del año.



La **figura 3.ª** relaciona el diámetro **LG** con su círculo (no representado en la **2.ª**). Así pues, según la **figura 3.ª**, en Grecia y en el Solsticio de verano el Sol sale por el punto **M**, culmina a mediodía en el punto **L**, y luego se pone por **M´**, siendo **MGM´** el arco nocturno. Pero en esta **figura 3.ª** se ven también los mismos segmentos **LS** y **SG** del diámetro que en la **2.ª**. Y se aprecia inmediatamente que el segmento **MS** es la *media proporcional* entre **LS** y **SG**. Doblando esta *media* tendremos la cuerda **MM´** que pertenece al arco nocturno **MGM´**; y al ser conocida la proporción del diámetro **LG** con sus dos partes **LS** y **SG** (determinadas prácticamente a partir de las sombras meridianas en los Solsticios), ya se podían calcular la de esta cuer-

[8] Cf. supra n. 3.

da **MM´** con el diámetro y la del arco **MGM´** con el círculo entero ($\theta/180 = 2\theta/360$). Y es así por consiguiente como pudo **Eudoxo** determinar, aproximadamente al menos, la latitud geográfica de Grecia[9].

Tradujo del italiano HERMENEGILDO DELGADO REYES,
Catedrático de Griego en el Instituto Villalba Hervás de La Orotava.

---

9 **Los métodos griegos en términos actuales**

Los cálculos griegos de los ángulos ϕ y ϵ consisten en usar 2 de las 3 proporciones que se descubren midiendo en los días de solsticio las sombras meridianas de un gnomón, o la duración del día o la noche. Hoy diríamos que **BR/AB** y **BT/AB** (figura 2ª), proporciones entre las sombras y el gnomón, son las tangentes de (ϕ-ϵ) y (ϕ+ϵ); y que el coseno del ángulo ϑ (figura 3ª), que representa el arco del día o noche mínimos del año, equivale al producto de las tangentes de ϕ y ϵ.

Un modo fácil de probar esta relación entre los 3 ángulos es observar en los triángulos **AOS** y **AOG** (figura 2ª) que las tangentes de ϕ y ϵ son **OS/OA** y **OA/OG**; y que su producto **OS/OG =OS/OM** (figura 3ª) es el coseno de ϑ. Otro algo más retorcido pasa por calcular las tangentes a partir de las sombras meridianas; multiplicar sus valores, respectivamente **(BTxAR+BRxAT)/(AB)(AR+AT)** y **(BTxAR-BRxAT)/(AB)(AR+AT)**; y comprobar que la expresión **(AT-AR)/AT+AR)** de su producto resulta equivalente a **(LS-SG)/(LS+SG)** (probada por las semejanzas **ATC** $\approx$ **GAS** y **ARC** $\approx$ **LAS** la igual proporción de estas sagitas y aquellas hipotenusas), y por tanto a OS/OG y al coseno de ϑ.

Si este mismo coseno se expresa como **(CT-RC)/CT+RC)** (aprovechando la proporción de **CR** y **CT** con las hipotenusas, según el teorema de la bisectriz), se verá aún más clara la correspondencia de la línea **RCT** de las sombras con el diámetro solsticial **GSL**.

Así pues, ya se midan en un solsticio la sombra meridiana y el día o noche más cortos; ya se espere 6 meses de uno a otro para partir de ambas sombras, siempre habrá dos ecuaciones para despejar los dos ángulos.

El cálculo resulta más simple una vez determinados el día del equinoccio y el valor constante de ϵ; entonces para hallar la tangente de ϕ basta, en el día del equinoccio, medir directamente la sombra **BC**; y en el del solsticio medir la noche o día más cortos, deducir el ángulo ϑ (multiplicando la duración por 7'5), y dividir el coseno de éste por la tangente de ϵ.

Entreténgase el lector en calcular el valor actual de la eclíptica, y la latitud de un lugar donde un gnomón de 240 unidades da sombras solsticiales de 21 y 306; y la noche más corta, con 10h,11'18", da para ϑ 76° 24'45".

Estos cálculos, ahora tan fáciles, eran laboriosísimos cuando las proporciones angulares sólo podían estudiarse en los polígonos regulares construibles. Acaso por ello hable **Eudoxo** de la proporción 5/3, referida al octógono en que se apoyaba su cálculo; y **Enópides** del pentadecágono que permitía construir el ángulo ϵ.

[Nota del T. E., inspirado en trabajos del Prof. Szabó].