¿FRANÇOIS VIÈTE, INVENTOR DEL ÁLGEBRA?

ANNE BOYÉ
I .R.E.M., Nantes

François Viète (en latín Franciscus Vieta) murió el 23 de febrero de 1603, por lo que celebramos en estos días el cuarto centenario de su muerte e inauguramos el «año Vieta». Es uno de esos científicos cuyo nacimiento y muerte podemos celebrar debido a su «considerable aportación a las ciencias, en este caso, las matemáticas. Se le considera generalmente como «el inventor» del álgebra; del álgebra moderna, debemos precisar. En 1630, Vaulezard, uno de los que queriendo contribuir a la difusión de ese invento tradujo al francés la obra clave de Vieta en ese campo, la titulará: *La nueva álgebra de Vieta*. Esto puede sorprender a algunos espíritus poco avisados, puesto que se ha transmitido a menudo que el álgebra nació en el mundo árabe. Todo el mundo sabe, por ejemplo, que el matemático al-Khwarizmi fue el primer autor de un «álgebra» en el siglo IX. Fue su nombre deformado, interpretado, el que dio lugar al término «algoritmo», y una de sus técnicas de resolución de ecuaciones «al jabr» originó el término «álgebra», que designará durante largo tiempo el dominio de las ecuaciones. Sin embargo, si se interroga a un alumno actual, o si un no matemático busca en sus recuerdos qué le evoca la palabra álgebra, será ciertamente el cálculo con letras.

> «En cuanto a los cuadrados y al número de raíces que igualan, es como cuando tú dices: Un cuadrado y veintiuno en número igualan diez de sus raíces. Esto vale también para toda cantidad que es tal que si se le añade veintiún dirhames, la suma resultante es igual a diez raíces de esa cantidad. El método de resolución consiste en esto: toma

> la mitad de las raíces, que es cinco, la multiplicas por sí misma, lo que da veinticinco, sustraes los veintiuno que se ha dicho que están con los cuadrados, lo que dará cuatro, tomas su raíz que es dos, la sustraes de la mitad de las raíces que es cinco y dará tres, que es la raíz del cuadrado que tú querías y el cuadrado es nueve».
>
> *Tratado de al jabr y de al muqabala*, al-Khwrizmi, siglo IX

Muchos se sorprenderán sin duda con este texto de al-Khwarizmi, donde se trata de resolver una ecuación de segundo grado. No hay letras ni símbolos y, no obstante, es «álgebra». Ese es el paso de gigante, que será preciso franquear, entre el álgebra retórica y el álgebra simbólica. Y Vieta es sin duda quien permitió franquear el paso decisivo abriendo el camino a sus sucesores, entre los cuales uno de los más brillantes será Descartes. Les propongo, a través de algunos aspectos de la obra de Vieta, tratar de comprender cuán difícil era ese paso, por qué y cómo aportó Vieta su contribución a ese desarrollo, y lo que quedaba por hacer para que la nueva álgebra, que Vieta llamaba también a veces análisis, se convirtiera realmente en eficaz, y ello sin introducirnos en los caminos más recientes de las matemáticas, pues como la mayor parte de las palabras, el sentido del término «álgebra» ha evolucionado ampliamente. El conocimiento de la vida y de la trayectoria intelectual de los autores con frecuencia aclara su obra. Por ello comenzaré ofreciendo algunas referencias biográficas sobre Vieta.

UN ESBOZO BIOGRÁFICO

> «François Viète, natural de Fontenai, en el Poitou, fue un hombre de gran genio y de tan profunda meditación, que descubrió los misterios más secretos de las ciencias más abstrusas, y llevó hasta el límite sin problema todo lo que un hombre sutil es capaz de concebir y ejecutar. Pero entre sus diversas ocupaciones, y las trabas de los negocios de los que su vasto e infatigable espíritu jamás se vio exento, ejerció su industria sobre todo en las matemáticas, y sobresalió en ellas de tal modo que todo lo que ha sido inventado por los antiguos en esa ciencia, y de lo que estamos privados por la injuria del tiempo que abolió sus escritos, lo inventó él mismo de nuevo, renovó su uso e incluso añadió muchas cosas a sus maravillosos descubrimientos. Meditaba con tanta aplicación que se le ha visto a menudo permanecer tres días enteros en su gabinete sin comer, e incluso sin dormir, lo que podía

hacer apoyando de vez en cuando la cabeza en la mano, para reparar fuerzas mediante unos momentos de sueño».

De Thou *(1553-1617)*, *Elogio de Vieta*

Vieta nació en 1540 en Fontenay-Le-Comte, capital del Bajo Poitou en Vendée. Su padre era un influyente leguleyo y podemos afirmar sin error que era de familia acomodada. Parece ser que estudió primero en el convento franciscano de Fontenay, en el que Rabelais había vivido y estudiado cincuenta años antes. Allí adquirió los conocimientos lingüísticos que le permitirían más tarde leer y comprender los textos griegos. A los dieciocho años ingresa en la universidad de Poitiers y en 1559, bachiller y licenciado en derecho, se inicia en la profesión. Rápidamente se forja una gran reputación, logrando resolver complicados asuntos jurídicos. No obstante, el acontecimiento más importante para su porvenir será el hacerse cargo de los asuntos de una familia hugonote, los de Soubise, en 1564. Vieta se convierte en el secretario y biógrafo del conde Jean du Parthenay, vinculado a esa familia, y preceptor de su hija Catherine. Francia vive por entonces un período muy doloroso, de conflictos religiosos exacerbados y muy violentos. Vieta se verá mezclado, de cerca o de lejos, con esos acontecimientos por sus relaciones con los de Soubise. No se convirtió a la nueva religión, pero permaneció fiel a sus amigos protestantes.

Estará en constante relación con Catherine du Parthenay, su alumna, quien impulsó su primer trabajo científico. Estaba interesada en las cuestiones de astronomía y Vieta redactó para ella cuadernos de curso, los *Principios de cosmografía*, basados en el *Almagesto* de Ptolomeo. En ellos es muy crítico con Copérnico, estimando que es un flojo matemático y que hay escasa correspondencia entre su teoría y las observaciones. Es preciso señalar que las cuestiones de astronomía jugaron un papel muy importante en los futuros trabajos matemáticos de Vieta, que por entonces esboza un manuscrito que nunca se imprimirá: *Harmonicon coeleste* (cuyo nombre evoca evidentemente el nombre de otra *Armonía celeste*, la de Kepler). Comienza también a componer su *Canon matemático*, tratado de trigonometría, destinado a las cuestiones de astronomía, sobre el que volveremos más adelante.

En 1568, Catherine se desposa con un aristócrata, quien pronto se enfrentará a su suegra. Ésta, Antoinette d'Aubeterre, se separa de su hija y se instala en La Rochelle, capital del partido hugonote. Vieta sigue a Antoinette y se reencuentra en La Rochelle con los jefes protestantes: Condé, Coligny, Jeanne d'Albret y su hijo Enrique de Navarra. Teniendo la oportunidad de regresar a París en 1570 se convierte en 1571 en abogado en el Parlamento de París. Allí se encuentra con grandes matemáticos, como Jacques Pelletier du Mans o Pierre de la Ramée, asesinado desgraciadamente en la masacre de San Bartolomé de 1572. El marido de Catherine también fue asesinado y ella misma escapó por poco a la masacre. Vieta aprovechó su estancia parisiense para intentar imprimir su *Canon*, que se editará en 1579. En 1574 fue nombrado, a propuesta del rey Carlos IX, consejero en el parlamento de Bretaña. Participa únicamente en la sesión de verano, y con frecuencia pasa temporadas en casa de Catherine o de Françoise de Rohan, tía de Enrique III.

En 1580 fue nombrado por Enrique III Maître de Requêtes de la Casa Real. Sin embargo, bajo la presión de los jefes de la Santa Liga católica, será suspendido en sus funciones desde 1584 a 1589. Ese período, probablemente difícil, le permitió disponer de tiempo para consagrarse a su pasatiempo preferido, las matemáticas. Solía precisar que era un matemático aficionado y nos percatamos de que la pesadez de sus cargos le permitía pocos placeres. Albergado y protegido por sus amigos, redactará su obra maestra: *In artem analyticem isagoge (Introducción al arte del análisis)*. De 1589 a 1593 recuperará sus funciones junto al rey Enrique IV, tras la muerte de Enrique III. La sede del gobierno se trasladó a Tours, que no está lejos de Fontenay, lo que le dio ocasión de regresar con frecuencia a su villa natal. Allí adquiere otra reputación, la de experto descifrador. Descifra para el rey los mensajes cifrados de sus enemigos, en particular, de los españoles. Su éxito fue tal que algunos lo denunciaron a Roma por brujo y nigromante.

> «Lo que voy a añadir es poco considerable, al parecer del propio Vieta, pero cualquier otro lo tendría en mucho. Como los estados españoles están separados y alejados unos de otros, para guardar los secretos comunicando sus designios y sus consejos a todas las partes de ese vasto organismo, se sirven de diversos signos desconocidos, a fin de que no sean descubiertos: y cuando se ven obligados a emplear nuevos, no lo pueden hacer hasta mucho después de haberlo decidido, porque tienen que avisar al virrey de las Indias. Durante los desórdenes de la liga, su cifrado se componía de más de quinientos signos diferentes y aunque a menudo habían sido interceptadas cartas suyas muy extensas, donde se explicaban todos sus designios, los que se encargaban de descifrarlos no habían podido hacerlo, a causa del infinito número de marcas que usaban. Perro por orden del rey se enviaron esas cartas a Vieta y las explicó sin problemas, y luego todas las demás que le llevaron: lo que desconcertó de tal forma a los españoles durante dos años, y les

causó tal extrañeza, que pregonaron en Roma y por doquier que el Rey había descubierto su cifrado mediante el recurso a la magia».

De Thou, *Elogio de Vieta*

También en esa época ocurrió una áspera disputa con Joseph Escalígero, un humanista que pretendía haber resuelto, entre otros problemas, la cuadratura del círculo y el problema de la trisección del ángulo con regla y compás. Vieta publicará varios opúsculos de su *Arte del análisis* entre 1591 y 1593, y luego dos opúsculos para rectificar los errores de Escalígero, que preferirá retirarse a los Países Bajos. En 1594, de regreso en París con Enrique IV, adquirirá más celebridad al recoger el desafío de resolver un problema propuesto por el belga Adrien Romain a «los matemáticos del mundo entero», entre los que no se hallaba ningún francés. Este incidente se hizo legendario, gracias al relato de Tallemant des Réaux en sus historietas.

«En tiempos de Enrique IV, un holandés llamado Adrianus Romanus, sabio en matemáticas, pero no tanto como creía, hizo un libro donde constaba una proposición a resolver que ofrecía a todos los matemáticos de Europa; ahora bien, en cierto lugar de su libro nombraba a todos los matemáticos de Europa y no concedía ninguno a Francia. Poco después llegó un embajador de los Estados para ver al Rey en Fontainebleau. El Rey tuvo el placer de enseñarle todas las curiosidades, y le hablaba de los más excelentes que en cada profesión había en su reino. Pero Sire, le dijo el embajador, vos no tenéis matemáticos. Sí tengo, sí tengo dijo el Rey, tengo un hombre excelente: que me vayan a buscar a Monsieur Viète. Se le mostró la proposición (de Adrianus Romanus) a Monsieur Viète, quien se puso en una de las ventanas de la galería donde se hallaban en ese momento y antes de que el Rey se fuera escribió dos soluciones a lápiz. Por la tarde envió varias más al embajador, añadiendo que le daría tantas como gustase».

Tallemant des Réaux, *Mèmoires pour servir à l'histoire du XVII^{o} siècle*, historieta 46

Volveremos sobre ese episodio, porque ilustra adecuadamente la potencia del cálculo de Vieta. Tras ese desafío propondrá él mismo otro problema, del que dará la solución, bajo el nombre de Apolonius Gallus, que acrecentará su fama. En 1597, encargado por el rey de una misión en el Poitou, dispuso de algún tiempo libre y retomó sus trabajos matemáticos. Se interesó especialmente por los problemas del calendario, lanzándose a una polémica, poco justificada según parece, con el matemático jesuita Clavius, quien había sido encargado de la reforma del calendario por el papa. Muy fatigado y enfermo murió en París el 23 de febrero de 1603. Esta breve panorámica con que he presentado la vida profesional de Vieta quizás haya permitido vislumbrar la otra vida, paralela y «contemplativa» que evocaba de Thou. Fue esa vida paralela la que produjo las obras matemáticas que le aseguraron la fama.

LOS TRABAJOS MATEMÁTICOS Y EL ÁLGEBRA NUEVA

La vida matemática de Vieta se divide más o menos en dos épocas, sus períodos de relativo ocio. El primero se inicia hacia 1571, cuando dejó sus funciones a tiempo completo con la familia de Soubise. Este período acaba con la edición de su Canon por Jean Mettayer en 1579. Fue durante el segundo período, de 1584 a 1589, cuando produjo la mayor parte de sus trabajos. Su publicación se hizo poco a poco, aunque parece que Vieta los consideraba como un todo. El primero, In artem analyticem isagoge, lo publicó en 1591 Jean Mettayer, y los últimos fueron publicados de manera póstuma. Citemos entre ellos: *Supplementum geometriae, 1593; Zeteticum librum quinque, 1593; Variorum de rebus mathematicis responsorum libri VIII, 1593; Ad problema quod omnibus mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianus Romanus, responsum, 1595; Apollonius Gallus seu exsuscitata Apollonii Pergaei «peri epaphon» geometria, 1600; De numerosa potestatum ad exegesim resolutione, 1600; De aequationum recognitione et emendatione et Analytica angularum sectionum, 1615.*

En estos trabajos encontraremos tanto obras de geometría pura, siguiendo la tradición euclídea, ligadas con frecuencia a sus preocupaciones astronómicas, como trabajos muy innovadores en álgebra, así como obras de trigonometría, que se apoyan a la vez en su geometría y su álgebra. En todos ellos se transparenta profundamente lo que él denomina análisis. Para comprenderlos bien y evaluar su contribución al desarrollo de las matemáticas recordemos que sus efemérides, 1540-1603, lo sitúan una generación después de Girolamo Cardano (1501-76) y algo más de una generación antes que Descartes (1596-1650) y Fermat (1601-65).

LA INTRODUCCIÓN EN EL ARTE ANALÍTICO O LA NUEVA ÁLGEBRA

Lo que ha quedado como su contribución más importante es la introducción del uso sistemático de letras del alfabeto para representar a la vez términos variables y términos constantes o indeterminados en cualquier ecuación. Esto parece una obviedad en una época como la nuestra donde todo se enuncia en términos de fórmulas literales. Desde las primeras clases de secundaria se inicia a los alumnos en ese tipo de trabajo. Y sin embargo, si se piensa en ello, quizá algunos se interroguen sobre el verdadero sentido de ax^2, por ejemplo, o recuerden que sus dificultades empezaron el día que tuvieron que usar letras para los cálculos.

F. Cajori distingue, en su *Historia de las notaciones matemáticas*, tres períodos en el desarrollo del álgebra. El álgebra retórica, sin ningún símbolo, escrita toda con palabras, usada en numerosos trabajos de los matemáticos árabes y en los primeros italianos. El álgebra sincopada, donde todo se escribe en palabras, como la precedente, pero se usa algunas abreviaturas para ciertas operaciones o ideas recurrentes con frecuencia, designándose a veces la incógnita (sólo hay una) mediante un símbolo. Es el álgebra de Diofanto, de los árabes tardíos y de algunos europeos hasta el XVII. El álgebra simbólica, donde todo se expresa en símbolos. Es la de Vieta, Oughtred (1574-1660) en Inglaterra, y luego la de todos los europeos desde mediados del XVII. El paso del álgebra sincopada al álgebra simbólica será obra de Vieta y lo cambiará todo.

> «Con el lenguaje algebraico todo se simplifica: las condiciones que exigirían una página entera para expresarse en lenguaje ordinario apenas exigen una pocas líneas en la otra; se captará la escritura instantáneamente con la vista y será memorizada sin dificultad. Las consecuencias de los razonamientos se escribirán con la misma simplicidad; y de un solo vistazo se podrá captar al final el conjunto de todos los pasos intermedios por los que se ha avanzado».
>
> Lalande, *Conferencia sobre la filosofía de las ciencias*, 1913.

Cuando Vieta escribió su álgebra nueva era consciente de producir una ruptura y abrir la vía a importantes progresos:

> «Todos los matemáticos sabían que bajo su álgebra o al muqabala de la que se jactaban, y que llamaban El Gran Arte, se escondían vetas de oro incomparables, pero no las encontraban. Ofrecían hecatombes,

hacían sacrificios a Apolo y a las musas cuando alcanzaban la solución de alguno de los problemas que yo resuelvo espontáneamente por decenas y veintenas; lo que prueba que nuestro arte es el método de invención más cierto en matemáticas».

Dedicatoria a Catherine de Parthenay, en su *Introducción al Arte del análisis,* de 1591

EL PADRE DE LA NOTACIÓN ALGEBRAICA MODERNA: LOGÍSTICA ESPECIOSA VERSUS LOGÍSTICA NUMEROSA

Vieta reconoce dos influencias en su *Isagoge*: las *Aritméticas* de Diofanto y el séptimo libro de Papo *Colección matemática*. Nos ocuparemos ahora de la primera. Se suele considerar a Diofanto inventor del álgebra. Fue uno de los grandes matemáticos de la segunda escuela de Alejandría, hacia el 250 a.n.e. Su obra se incluye en el álgebra sincopada según la clasificación de Cajori. Sus *Aritméticas* no son un verdadero tratado sobre las ecuaciones, sino que propone una serie de problemas particulares que conducen a la resolución de ecuaciones, mediante las que indica el camino a seguir, que se pretende generalizable. No disponiendo de simbolismo sólo puede basarse en ejemplos numéricos concretos, como al Khwarizmi en el texto ya citado.

Debemos reconocer que hay un comienzo de simbolismo. Por ejemplo, un símbolo «ς« semejante a la letra sigma, llamado «arithme» en la traducción de ver Eecke (1925) designa la incógnita. Sólo puede haber una incógnita y propone símbolos para el cuadrado de la incógnita, para su cubo, para potencias superiores al cubo, rompiendo así la referencia a la geometría. Habla, por ejemplo, de bicuadrado para la cuarta potencia, de cuadrado cubo para la quinta, etc. Vieta recogerá esas denominaciones. Hay también un signo para la sustracción; la suma se traduce simplemente por la yuxtaposición.

A pesar de todo, esa manera de tratar la resolución de esos tipos de problemas parece muy moderna y no se encuentra en absoluto en la tradición geométrica griega anterior. Esos textos serán desconocidos para los matemáticos occidentales. La primera traducción latina la hará Xylander en 1575. Regiomontano (1436-76) fue uno de los primeros en inspirarse realmente en la lectura de Diofanto; la mayoría de su contemporáneos prefiere dirigirse a los textos árabes, de los que toman el vocabulario. Estos últimos encontraron una manera de anotar la incógnita, la «cosa», mediante una abreviatura; son los llamados cosistas. Son alemanes como Stiffel, o italianos, como Pacioli. Inventaron también signos para la adición y la sustracción, normalmente «p» y «m». Se trata de abreviaturas que mejoran mucho la exposición de la resolución de ecuaciones, aunque no se difundieron universalmente. Además siempre había que razonar sobre ejemplos numéricos. Es ahí donde se sitúa la gran invención de Vieta. Propone designar no sólo la incógnita, o incógnitas, por letras, sino también lo conocido.

> «A fin de que este método (poner en forma de ecuación) se ayude de algún artificio, se distingirá las magnitudes dadas de las magnitudes desconocidas y buscadas representándolas por un símbolo constante, invariable y muy claro, designando por ejemplo las magnitudes buscadas mediante la letra A o cualquier otra vocal E, I, O, U, Y, y las magnitudes dadas por las letras B,C,D, o cualquier otra consonante».
>
> Vieta, *Arte del análisis o Álgebra nueva*, cap.5.

Más aún, esas letras pueden designar números, pero asimismo cualquier cantidad o magnitud, a la que denomina «especie». A este nuevo cálculo sobre especies, que no son necesariamente números, lo llamará «álgebra especiosa», calificando el cálculo de Diofanto, que trata exclusivamente con números, como «logística numerosa». No alude a los algebristas que fueron sus predecesores directos, practicantes del álgebra sincopada. Este desconocimiento se hará sentir en los arcaísmos subsistentes en su obra, tan innovadora por otra parte. ¿Ignorancia consciente o laguna debida a su formación un poco caótica de matemático aficionado? Ocurre que no es tan fácil pasar de la logística numerosa a la especiosa.

LETRAS PARA LAS INCÓGNITAS, LETRAS PARA LO CONOCIDO

Cuando escribimos: $2x^2 + 3x = 1$, sabemos que la incógnita es x, luego es esa x lo que hay que determinar. Pero si escribimos: $x^2y + zx = y$ ¿cuál es la incógnita: x, y o z? Es necesario primero darse los medios para leer una ecuación escrita con letras. Vieta propone designar las incógnitas por vocales y los coeficientes (él inventó el término) indeterminados por consonantes. Todas esas letras se escriben en mayúsculas. Luego hay que darse los medios para indicar el cuadrado, el cubo, y las potencias superiores, ya que retoma las denominaciones de Diofanto.

Algunos matemáticos precedentes, como Stifel y Bombelli (cuya *Álgebra* es de 1572) habían ideado una notación semejante a la nuestra para las potencias. Vieta elegirá algo que nos parece poco práctico: «A quadratur» para el cuadrado de A, «A cubus» para el cubo, que pronto se convertirán en Aq y A c. Así «Aqq» es el cuadrado del cuadrado de A, es decir, A^4 No obstante, cuando las potencias son altas usará una notación numérica para la potencia. Una de sus proezas, por ejemplo, es haber resuelto una ecuación de grado 45.

A pesar de su aparente arcaísmo, no es nada si lo comparamos con Diofanto u otros predecesores directos de Vieta, para quienes el símbolo de la incógnita no tenía nada que ver con el de su cuadrado o su cubo; por ejemplo, R (res) para la incógnita, Q para su cuadrado, y C para su cubo, lo que no permitía calcular con facilidad (por ejemplo, una eventual factorización) e impedía que hubiera varias incógnitas. Comparemos, por ejemplo, diversas notaciones:

Lo que nosotros escribimos como $2x^2 - 5x = 23$

Diofanto lo escribiría así: $\Delta^{\gamma} \uparrow \beta\ \varsigma\varepsilon\ \varepsilon\sigma\tau\iota\ \overset{\circ}{M}\chi\gamma$

y Stifel así: 2ʒ aequatus5x + 23

Cardano así: duo quad.m quinque reb.aequalis 23

Bombelli así: $\overset{\underset{\smile}{2}}{2}m\overset{\underset{\smile}{1}}{5}$ aequale a 23

y Vieta así: 2Aq – 5A aeq 23

Pero de ellos sólo Vieta escribiría, pues fue el primero en tener la idea, $ax^2 + bx - x^3 = c$

como B in Aq + F plano in A – Ac aequatur D solido

Esto les extrañará, ya que acabo de advertirles que Vieta inventó la notación moderna, pero las cosas no son tan sencillas. Tratemos primero de descifrarlo. B, F y D designan nuestros coeficientes a, b y c. En efecto, los coeficientes indeterminados son consonantes. A designa la incógnita. Al lado de A la q y la c designan el cuadrado y el cubo. Los signos + y – designan la suma y la resta, lo que es moderno e innovador. B in Aq designa el producto de B por Aq. Aequatur significa «igual»; el símbolo «=» fue usado por el inglés Recorde en 1557, pero le llevará mucho tiempo imponerse. ¿Qué pintan ahí, sin embargo, esos «plano» o «cubo»? Son lo que Vieta llama la regla de los homogéneos, que es a la vez una debilidad de su álgebra y una necesidad.

LAS OPERACIONES SOBRE LAS ESPECIES, LA REGLA DE LOS HOMOGÉNEOS

¿Qué puede significar, en efecto, el producto de B por D? ¿O el cociente de C entre F? En otras palabras, sabemos hacer operaciones con números, sabemos también que, por ejemplo, Aq (o sea A^2) es un cuadrado de lado A, que 3A es la longitud A tres veces seguidas. El único medio de dar sentido a las operaciones con letras es darles un sentido geométrico. Entonces, por ejemplo, el producto de B por C, será un rectángulo de lados B y C. Vieta precisará el sentido de cada operación hecha con las especies. En el caso del cubo-cubo, por ejemplo, algunos de sus contemporáneos se quedarán perplejos, porque no es muy geométrico. ¿Cómo imaginar algo de nueve dimensiones?

¿Pero podemos sumar ahora un rectángulo y un cubo? ¿Podemos obtener un cubo sumando dos rectángulos? Habrá que respetar la homogeneidad de las dimensiones. Los físicos reconocerán sin duda ese proceso por el que pasaron los matemáticos. Así B in Aq tiene como dimensión 3, luego lo que hay que añadirle ha de tener dimensión 3. F in A sería de dimensión 2, luego es absolutamente preciso que F sea un plano, de dimensión 2, para que el producto con A dé dimensión 3. Ac es ya de dimensión 3 y no hay problema. Estas operaciones con las especies de dimensión 3 no pueden dar sino un resultado de dimensión 3. Por tanto D debe ser un cubo. Como se ve, esta regla es pesada de respetar, pero puede tener su utilidad. Será Descartes quien romperá la necesidad de la homogeneidad eligiendo una unidad arbitraria y mostrando que se puede construir una «línea» igual al producto de A por B. Así todo podrá ser considerado como siendo de dimensión 1, en cualquier cálculo. Un alivio considerable, aunque sea al precio de algunos sacrificios.

LAS ESPECIES SON «POSITIVAS»

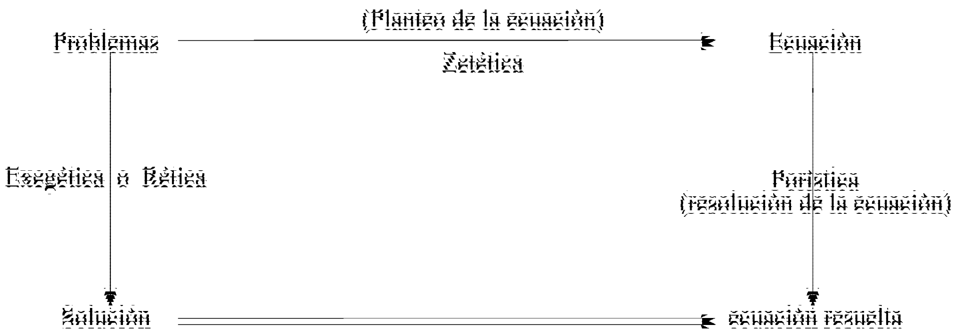
Vieta sigue siendo un euclidiano en el fondo. Su regla de homogeneidad testimonia su vinculación a la interpretación geométrica. También las especies, incluso las incógnitas, son magnitudes «geométricas», luego esencialmente positivas. De modo que cuando se resuelve una ecuación no se puede imaginar sino las soluciones positivas. Los coeficientes son también positivos. Evidentemente esto es otra debilidad del álgebra de Vieta, en el mismo momento en que algunos de sus predecesores y contemporáneos, aunque no aceptaban las cantidades negativas, se estaban percatando de que, a veces, tomando cantidades negativamente encontraban soluciones de ecuaciones. Es verdad que a esas soluciones las llaman «falsas», «imaginarias», pero en todo caso las señalan.

Esta exigencia de positividad le llevará, sin embargo, a inventar una notación interesante. Cuando se tiene dos cantidades, B y C, y se quiere conocer su diferencia, es necesario saber cuál es la mayor, pues no se puede detraer (según Vieta y la mayoría de sus contemporáneos) lo más grande de lo más pequeño. Si se tiene 3 y 5 sabemos que 5 es mayor, pero si hemos adoptado como Vieta la notación simbólica y se quiere, al acabar la operación, escribir una fórmula en letras ¿cómo indicar si hacer A–B al ser A mayor que B, o al contrario, B–A si B es mayor? Inventando el valor absoluto. Es verdad que Vieta no inventa esta expresión pero inventa un símbolo: A=B (que no debemos confundir con el signo «igual») significará A-B si A es mayor que B y B-A si B es mayor.

LA INFLUENCIA DE PAPO. ¿POR QUÉ EL ALGEBRA DE VIETA ES ANÁLISIS? ZETÉTICA, PORÍSTICA, EXEGÉTICA

La segunda influencia reconocida por Vieta, como ya hemos dicho, es la de Papo. Es la que cuenta a los ojos de Vieta, pero es probablemente más difícil de captar. La *Colección Matemática* de Papo es la única obra que nos ha llegado de él. Vieta asociará el «análisis» de Papo, relacionado únicamente con problemas y teoremas geométricos, con las *Aritméticas* de Diofanto. Es lo que Vieta llamará «Arte del análisis», que debe permitir la resolución de cualquier problema. El análisis de Papo de los problemas geométricos es, más o menos, lo que solemos llamar la técnica del problema resuelto. Suponiendo efectivamente resuelto el problema se analiza la figura, por ejemplo, y luego, con la ayuda de teoremas conocidos se retrocede hasta el punto de partida. Tras ese análisis se necesita generalmente realizar una síntesis, es decir, recorrer el camino a la inversa.

Papo es una especie de teórico del razonamiento geométrico. Asevera que el análisis es el medio de descubrir resultados y teoremas. La presentación, por el contrario, se hace mediante la síntesis. Eso es lo que gente como Descartes reprochará a los antiguos: hallaron sus resultados con el análisis, pero sólo presentaron la síntesis; o sea, ocultaron cómo los habían hallado. Descartes, y antes que él Vieta, pondrá el acento en el análisis y su omnipotencia. Así pues, el análisis se compone de dos partes: la primera, que Vieta llamará Zetética (búsqueda de la verdad), y la segunda, a la que llamará Porística (producción del teorema propuesto). Vieta añadirá una tercera, que llamará Exegética, que corresponde más o menos a la redacción de teoremas, cuando se trata de geometría, o Rética, que sería la presentación (oral) de los resultados, en el caso de los problemas numéricos.



Este pequeño esquema resume el camino a seguir para resolver un problema, aunque ya no sólo de geometría. Es decir, cuando se busca una magnitud desconocida, se plantea el problema como una ecuación, suponiendo en cierto modo el problema resuelto. Por ejemplo, buscamos dos números cuya suma es 12 y el producto 35. Desgnamos las incógnitas por A y B y suponemos que las hemos encontrado, por tanto, $A+B = 12$ y $AxB = 35$. Es la primera parte del análisis. Luego examinamos las operaciones que podemos hacer, los teoremas conocidos, que nos permitirán encontrar los dos números. O sea, que Diofanto en sus *Aritméticas* hacía análisis sin saberlo, puesto que el análisis estaba reservado a la geometría.

La nueva álgebra de Vieta, su logística especiosa, es análisis. Por esa razón la llama Análisis. Y del mismo modo que el análisis geométrico descrito por Papo es un potente instrumento de geometría, el Arte analítico de Vieta también tiene un gran rendimiento, incluso más. En efecto, el planteamiento como ecuación cualquier problema y la posibilidad de hacer cálculos con cualesquiera especies, incluso no numéricas, ofrece maravillosas posibilidades. Por eso Vieta concluye su obra sobre el arte analítico diciendo:

> «Finalmente, el Arte analítico se apropia con todo derecho el magnífico problema de la triple forma de que se reviste: la zetética, la porística y la exegética. Lo que significa: NINGÚN PROBLEMA SIN RESOLVER».

EL ARTE ANALÍTICO EN ACCIÓN

Vieta pondrá a prueba su Arte analítico en una primera obra de 1591 que titula *Sobre las Zetéticas*. Examinemos el ejemplo siguiente, que es el primer problema del libro I.

> «Dada la diferencia de dos lados y su suma encontrar los lados. Sea B la diferencia entre los lados y D su suma. Hay que hallar los lados. Sea A el lado menor, por tanto, el mayor será A+B. Por ese motivo la suma de ambos será 2A+B. Lo que es lo mismo que D. Por lo cual 2A+B es igual a D. Y por antítesis 2A será igual a D-B, y dividiendo todo por dos A será igual a D/2 – B/2.
>
> O bien sea E el lado mayor. El menor será entonces E-B. Por ese motivo la suma de los lados será 2E-B. Lo que es lo mismo que D. Por lo cual 2E-B será igual a D, y por antítesis 2E será igual a D+B; y dividiendo todo por dos, E será igual a D/2 + B/2».
>
> De modo que dada la diferencia de dos lados y su suma se puede hallar los lados. En efecto, la mitad de la suma de los lados menos la mitad de la diferencia es igual al lado menor; las mismas cantidades sumadas dan el lado mayor. Esa era la investigación a realizar. Siendo B 40, D 100, A resulta ser 30 y E 70».

Es sin duda la primera vez en la historia de las matemáticas que vemos en acción un tratamiento algebraico puramente literal de un problema matemático. Es decir, disponemos de fórmulas que se pueden aplicar a cualquier problema numérico. Por eso Vieta propone al final de cada uno de sus problemas una aplicación numérica. Quizá por mostrar a los escépticos que su método es bueno.

Salvo la ventaja de la generalidad del cálculo y la obtención de fórmulas aplicables directamente a no importa qué caso, los resultados conservan la huella de las operaciones realizadas. En especial Vieta es uno de los primeros en interesarse por lo que generalmente se llama funciones simétricas de las raíces de una ecuación. Por ejemplo, en una ecuación que escribiremos: $x^2 + ax + b = 0$ sabemos que el producto de las raíces (soluciones) es b y que la suma es -a. Lo cual pone inmediatamente esa ecuación en relación con el problema de Diofanto en que se trata de encontrar dos números cuya suma y producto son conocidos.

Fórmulas análogas se pueden establecer para ecuaciones de grado superior. Pero Vieta se vio frenado en su estudio por el hecho de no tener en cuenta sino las soluciones positivas. A veces otra ventaja de poder seguir la construcción de las soluciones es relacionar esta construcción con construcciones geométricas, puesto que es así como han sido definidas las operaciones sobre las especies. De esa manera podrá inclinarse por las soluciones construibles con regla y compás. Es la forma en que atacará los problemas que Escalígero pretendía haber resuelto.

Una consecuencia suplementaria de su álgebra es que, a la inversa, a través de una ecuación puede «leerse» el soporte geométrico de un problema. Vieta es, a la vez que inventor de una nueva álgebra, un brillante geómetra, que se interesó profundamente por la trigonometría. El álgebra, la geometría y la trigonometría se nutren unas de otras. Entre otras cosas, aplicó su álgebra a la trigonometría estableciendo fórmulas generales y nuevas.

Su gran talento quedó brillantemente ilustrado en la anécdota citada, la resolución de una ecuación de grado 45 propuesta a todos los matemáticos del mundo. Hemos referido que Adrianus Romanus no consideraba que hubiera ningún matemático francés digno de tal nombre.Los escritos de Vieta, en el momento del suceso, estaban empezando a publicarse y no era extraño que Adrianus ignorara su trabajo. Se asombrará del genio del francés, lo visitará pronto en su casa e intercambiarán otros problemas, en particular el de Apollonius Gallus. La ecuación propuesta por Adrianus se escribiría en notación moderna:

$$45 x - 3795 x^3 + 95634 x^5 - 1138500 x^7 + 7811375 x^9 - 34512075 x^{11} + 1050306075 x^{13} - 232676280 x^{15} + 384942375 x^{17} - 488494125 x^{19} + 483841800 x^{21} - 378658800 x^{23} + 236030652 x^{25} - 117679100 x^{27} + 46955700 x^{29} - 14945040 x^{31} + 3764565 x^{33} - 740459 x^{35} + 111150 x^{37} - 12300 x^{39} + 945 x^{41} - 45 x^{43} + x^{45} = N$$

Vieta se dio cuenta inmediatamente de que podía relacionar esa ecuación con sus resultados en trigonometría, en particular con el problema de la trisección del ángulo, que le permitió resolver ecuaciones de grado 3. Sabe pues que puede encontrar varias soluciones para ese tipo de ecuación. Puesto que 45 = 3x5x5, basta dividir un ángulo en 5 partes, luego en 3, y otra vez más en 3. De ese modo, resolviendo una ecuación de quinto grado y luego dos de tercer grado, obtiene casi inmediatamente 23 soluciones para la ecuación propuesta, geométricas y numéricas con gran precisión: ¡ocho decimales exactos! He aquí lo que nuestro matemático escribe al final de su respuesta al problema planteado (*Ad problema... reponsum*).

> «Así, en el espacio de tres horas, resulté ser un gran geómetra. Es verdad que el bárbaro vocablo de algebrista no me place. Trato geométricamente lo que es geométrico, analíticamente lo que es analítico. Sin embargo, vigilaré para que el común de los algebristas me abra sus oídos, sea como una especie de geómetra, sea como un nuevo Analista».

Jean d'Alambert subrayará en su artículo «Álgebra» de la *Enciclopedia*, en 1784:

> «Su primer descubrimiento fue haber introducido en el cálculo las letras del alfabeto para designar incluso las cantidades conocidas. El segundo, haber imaginado casi todas las transformaciones de las ecuaciones, así como los diversos modos de hacer más simples las ecuaciones propuestas».

LA POSTERIDAD

No hemos abordado más que la excepcional contribución de Vieta al álgebra. Su contribución a la geometría pura, más desconocida, fue también muy importante. Kepler, por ejemplo, esperaba ciertos resultados geométricos de Vieta para sus cálculos orbitales. Recordemos que una de los motivaciones de Vieta para sus primeros trabajos había sido la astronomía, que siempre sería una de sus pasiones. No deja de tener interés hacer notar que fue el primero en expresar el área de un círculo de radio 1 como el límite de un producto infinito, que llevaría a lo que hoy escribimos como:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots\cdots}$$

El álgebra, después de él, se convertiría con frecuencia en análisis, creando con ello ciertas ambiguedades sobre el término. Nosotros distinguimos actualmente álgebra y análisis, pero hemos conservado el nombre de geometría analítica, ligado al análisis de Vieta por mediación de Descartes. Fue éste quien nos dió la escritura y la generalización actual del álgebra. La notación literal que usamos es la suya: las últimas letras del alfabeto para las incógnitas y las primeras para los coeficientes indeterminados. Asimismo nos liberó de la noción de homogeneidad, al menos en matemáticas. Incluso aunque calificara las soluciones negativas de falsas las tomaba en cuenta, y también tenía en cuenta las soluciones imaginarias; es seguro que el abandono de la homogeneidad le permitió construir eso que llamamos geometría analítica. ¿Reconocía Descartes lo que probablemente le debía a Vieta? Veamos lo que dice Baillet en *La vie de M. Descartes*, de 1691:

> «Un día que [su maestro] le había propuesto el problema más difícil que pudo encontrar, pareció tan sorprendido por la novedad y sutileza con que Descartes había hallado la solución mediante su nuevo método, que no atinaba a salir de su asombro, sino diciendo que creía

> que Vieta había escrito algo sobre ese tema. Maravillado Descartes de saber que había tropezado con alguien que se le había adelantado en esa invención, le pidió allí mismo a su maestro que le procurara la manera de conseguir un Vieta. Lipstopius añade que Descartes había encontrado algo abstruso y difícil de descifrar en ese autor, y solicitó respetuosamente a su maestro que le ayudara; el maestro se excusó de ello por la dificultad del asunto [...] Eso fue lo que llevó a Descartes a atenerse a lo que él mismo había inventado sobre el análisis con independencia de la invención de Vieta y a contentarse con su propio genio para lo que pudiera inventar o descubrir en adelante. [...] Para que veamos la escasa verosimilitud (de esta anécdota) basta aducir el testimonio de M. Descartes, quien en una carta dirigida a Mersenne en 1639 señalaba que no recordaba ni siquiera haber visto la portada de Vieta durante su estancia en Francia».

¿A quién debemos creer? Sucede además que otros, por el contrario, han declarado lo que le debían a Vieta e incluso prefirieron sus notaciones a las de Descartes. Fue el caso de uno de nuestros más brillantes matemáticos, Pierre de Fermat. Otros, ingleses en su mayoría, cultivaron el análisis de Vieta para hacerlo progresar, como Harriet, Oughtred, Wallis y Anderson. Debemos reconocer, no obstante, que la faceta arcaica de los escritos de Vieta, a pesar del gran avance que suponían para los matemáticos, les pudo repeler. Citaremos como conclusión al historiador de las matemáticas Montucla, que a mediados del siglo XVIII escribía:

> «El célebre M. Viète floreció en Francia hacia finales de ese siglo [el XVI]. Fue un hombre de una clase muy superior a la de sus compatriotas que se dedicaron a esa misma actividad. El análisis algebraico le debe numerosos descubrimientos. No fue menos profundo en la geometría antigua. [...] Vieta fue el primero en avanzar hasta 11 decimales la relación aproximada entre el diámetro del círculo y la circunferencia. Determinó mediante fórmulas analíticas las relaciones entrre las cuerdas de los arcos múltiplos o submúltiplos, y sobre ese principio elaboró sus tablas trigonométricas, que publicó bajo el título de Canon matemático. Las obras de Vieta fueron recopiladas en 1646 por Schooten, con excepción de su Canon. Hay que convenir en que, a excepción de lo que atañe a la geometría antigua, el resto es casi ilegible, tanto ha cambiado el estilo analítico, amén de que Vieta, muy familiarizado con el griego, había introducido denominaciones nuevas que no se adoptaron».

Bibliografía básica

BAILLET, *La vie de M. Descartes*, Paris, 1691, reed. Agora, Presses Pocket, París, 1961.

BOYÉ, A., *L'Apollonius Gallus et le problème des trois cercles, comme défense et illustration de la géométrie synthétique*, Tesis de doctorado, Universidad de Nantes, 1998.

CAJORI, F., *A history of mathematical notations*, Chicago, 1928.

CARDANO, J., *Ars magna sive de regulis algebraicis*, Nuremberg 1545, Trad. Richard Witmer, Dover, Nueva York, 1968.

DIOFANTO DE ALEJANDRÍA, *Les six livres d'arithmétique et le livre des nombres polygones*, Trad. Paul Ver Eecke, Blanchard, París, 1959

MONTUCLA, J. E., *Histoire des mathématiques*, 4 vol., Agasse, París, 1799-1802, reed. Blanchard, París, 1968.

PAPO DE ALEJANDRÍA, *La Collection mathématique*, trad. Paul Ver Eecke, Blanchard, París, 1982.

RITTER, F., François, «Viète inventeur de l'algèbre moderne, 1540-1603. Essai sur sa vie et son œuvre», en *Revue occidentale de philosophie sociale et politique*, pgs 234-274 y 354-415, París, 1895.

TALLEMANT DES RÉAUX, *Mémoires pour servir à l'histoire du XVII° siècle*, historieta 46, 2ª edición, tomo 2, pg 88, Garnier, París, 1861.

VAULEZARD, J. L. (de), *La nouvelle algèbre de M. Viète, suivi de Zététiques*, París, 1630, reed. *Corpus des œuvres philosophiques en langue française*, Fayard, París, 1986.

VIÈTE F., *Opera mathematica, recognita Francisci a Schooten*, ed. Joseph Hofmann, Leyden 1646, reed. Hildesheim, Nueva York, 1970.

VIÈTE, F., *The analytic Art : nine studies in algebra, geometry and trigonometry from the opus restitutae mathematicae analyseos, seu algebra nova*, trad. T. Richard Witmer, Kent, Ohio, 1983.

Traducido del francés por Sergio Toledo, F.C.O.H.C.